2° metodo per determinare se una curva dello spazio è piana: Calcolo in ogni punto il piano osculatore, la curva è piana $\Leftrightarrow$ il piano osculatore è sempre lo stesso.

$$C: \begin{cases} x = u \\ y = e^{u} + u + 1 \\ z = 2e^{u} \end{cases}$$

$$x' = 1 \qquad x'' = 0$$

$$y' = e^{u} + 1 \qquad y'' = e^{u}$$

$$z' = 2e^{u} \qquad z'' = 2e^{u}$$

$$\begin{vmatrix} (x-u) & (y-e^{u}-u-1) & (z-2e^{u}) \\ 1 & (e^{u}+1) & 2e^{u} \\ 0 & e^{u} & 2e^{u} \end{vmatrix} = 0$$

$$e^{u}z - 2e^{u}y + 2e^{u}x + 2e^{u} = 0$$

$$e^{u}\boxed{(z - 2y + 2x + 2) = 0}$$

$$C : \begin{cases} x = u & x' = 1 & x'' = 0 \\ y = e^{u} & y' = e^{u} & y'' = e^{u} \\ z = e^{2u} & z' = 2e^{2u} & z'' = 4e^{2u} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} (x-u) & (y-e^{u}) & (z-e^{2u}) \\ 1 & e^{u} & 2e^{2u} \\ 0 & e^{u} & 4e^{2u} \end{vmatrix} = 0$$

$$e^{u}\left(z - 4e^{u}y + 2e^{2u}x - 2e^{2u}u + 3e^{2u}\right) = 0$$

$\vec{t}(s)$ versore tangente in $P(s)$

$\vec{n}(s)$ versore normale principale

$\vec{b}(s)$ versore binormale

$\vec{t}'$, $\vec{n}'$, $\vec{b}'$ loro vettori derivati rispetto ad s

$\varkappa$ flessione in $P(s)$

τ torsione

Formule di Frenet

$$\begin{pmatrix} \vec{t}\,' \\ \vec{n}\,' \\ \vec{b}\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ -\varkappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

$\Sigma: \; x^3 - 2y^2 - 2z - 4x + 4 = 0 \qquad P \equiv (2,0,2)$

Verifico $\Phi(0) = 0$

Generica retta per $P \equiv (2,0,2)$

$$\begin{cases} x = 2 + l u \\ y = m u \\ z = 2 + n u \end{cases} \qquad P \Longleftrightarrow u = 0$$

$$\Phi(u) = l^3 u^3 - 2m^2 u^2 + 6 l^2 u^2 - 2 n u + 8 l u$$

$$\Phi'(u) = 3 l^3 u^2 - 4 m^2 u + 12 l^2 u - 2 n + 8 l$$

$$\Phi''(u) = 6 l^3 u - 4 m^2 + 12 l^2$$

Impongo $\begin{cases} \Phi'(0) = 0 \\ \Phi''(0) = 0 \end{cases}$

$$\Phi(0) = 0$$

$$\Phi'(0) = -2n + 8l$$

$$\Phi''(0) = -4m^2 + 12 l^2$$

$$\begin{cases} \Phi'(0) = 0 \\ \Phi''(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} n = 4l \\ m^2 = 3 l^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} n = 4l \\ m = \pm\sqrt{3}\, l \end{cases}$$

Scelgo $l = 1$ Tang. asint.:

$$\begin{cases} x = 2 + u \\ y = \pm\sqrt{3}\, u \\ z = 2 + 4u \end{cases}$$

$C: \begin{cases} x = z^3 - 1 \\ y = 0 \end{cases}$ ruotare attorno all'asse z

$\pm\sqrt{x^2+y^2} = z^3 - 1$

$x^2 + y^2 = z^6 - 2z^3 + 1$

$\Sigma: x^2 + y^2 - z^6 + 2z^3 - 1 = 0$

$F =$

$F_x = 2x$

$F_y = 2y$

$F_z = -6z^5 + 6z^2$

$\begin{cases} F = 0 \\ F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} F = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ -6z^2(z^3 - 1) = 0 \end{cases}$ $\to$ $\cancel{z = 0}$, $z = 1$

$\cancel{\begin{cases} 1 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}}$

$\begin{cases} -1 + 2 - 1 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

$\boxed{M \equiv (0, 0, 1)}$

$F_x = 2x$

$F_y = 2y$

$F_z = -6z^5 + 6z^2$

$F_{xx} = 2$ 2

$F_{xy} = 0$ 0

$F_{xz} = 0$ 0

$F_{yy} = 2$ 2

$F_{yz} = 0$ 0

$F_{zz} = -30z^4 + 12z$ -18

$F_{xx}(x-0)^2 + 2F_{xy}(x-0)(y-0) + 2F_{xz}(x-0)(z-1) + F_{yy}(y-0)^2 +$

$+ 2F_{yz}(y-0)(z-1) + F_{zz}(z-1)^2 = 0$

$(0,0,1)$

$2x^2 + 2y^2 - 18(z-1)^2 = 0$

$$\boxed{2x^2 + 2y^2 - 18z^2 + 36z - 18 = 0}$$