Oltre la terza dimensione

Massimo Ferri
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia

Abstract. *Spaces of any dimension can be worked on analytically; but this still defies intuition. Configuration spaces yield not only a way of direct understanding but also a motivation for nD geometry.*

1. Introduzione

Perché studiare spazi di dimensione superiore a quella (tre) del nostro? E come farlo? Queste sono domande naturali: al di là della ben nota (ma mal compresa) dimensione 4 dello spazio-tempo i costrutti e i teoremi che abitano spazi n-dimensionali possono apparire o come una tortura per gli studenti o come un futile gioco per matematici perditempo.
Da una parte c'è una ragione "culturale": se un ragionamento formulato in un ambito ristretto può funzionare anche in un ambito più ampio, vale la pena di fargli dispiegare tutta la sua potenza, anche se la ricaduta pratica può non apparire subito evidente. È questo il caso di molta geometria: certe definizioni, proposizioni, dimostrazioni ideate nel nostro mondo tridimensionale si rivelano valide anche nelle dimensioni superiori. Ciò è particolarmente chiaro nella geometria analitica: passare dalle solite due o tre coordinate a n non crea eccessivi problemi.
C'è però anche una ragione pratica, applicativa: gli spazi diversi dal nostro sono utili per rappresentare sistemi complessi; si tratta degli *spazi delle configurazioni*; ne darò qualche semplice esempio per illustrare non solo che le dimensioni superiori hanno senso, ma che è importante studiare addirittura spazi che non sono nemmeno euclidei globalmente. [Ho trattato ampiamente l'argomento in Ferri (2006)].

2. Spazi delle configurazioni

Qualunque situazione, naturale o artificiale, che sia descrivibile con un certo numero n di parametri (con qualche condizione di regolarità su tale descrizione, che i matematici postulano con precisione nei diversi casi) può essere rappresentata da un punto di uno spazio n-dimensionale. Questo permette di avere una visualizzazione – e quindi uno strumento di studio e comprensione – per fenomeni che nulla hanno a che vedere con il nostro spazio geometrico. [Un'eccellente lettura sull'argomento è: Thurston e Weeks (1984)].

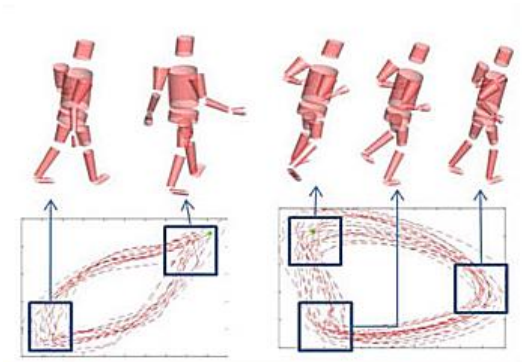

Fig. 1 – Un manichino virtuale per la simulazione di diverse andature.

Qualche esempio: il dato, istante per istante, ricavato da un elettrocardiografo è un punto in uno spazio 8-dimensionale, visto che è formato dai valori di differenza di potenziale elettrico fra un elettrodo particolare e altri otto piazzati sul nostro torace. La pianificazione dello stoccaggio delle materie prime di una fabbrica viene eseguita percorrendo un *politopo* (l'analogo *n*-dimensionale di un poliedro) in uno spazio che ha tante dimensioni quante sono le materie stesse (Bland, 1981). La stabilità di una centrale elettrica richiede di lavorare in uno spazio *n*-dimensionale, dove *n* è il numero di parametri che descrive lo stato istantaneo della centrale.

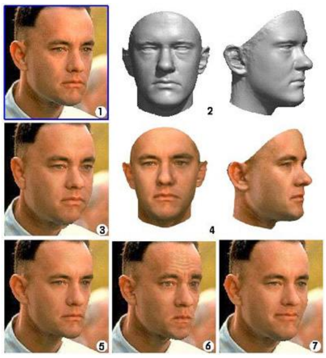

Figura 2 – Bastano 22 dimensioni per lo spazio delle espressioni umane?

Le possibili configurazioni di un corpo umano costituiscono, probabilmente, uno spazio di dimensione infinita; ma è possibile simularle abbastanza da vicino con le configurazioni di manichini virtuali; lo studio delle andature o dei gesti di un umano si sposta allora in uno spazio di dimensione 62 [Figura 1, John e Trucco (2013)]. Un'idea simile è sviluppata in Blanz, Scherbaum e Seidel (2007) per la ricostruzione e simulazione di espressioni facciali sovrapponendo immagini reali a un modello artificiale di viso; la dimensione qui è "solo" 22 (Figura 2).

2.1 Punti su una curva

Una retta *r*, un suo verso positivo, un suo punto *O* che faccia da origine, un'unità di misura; ecco che siamo pronti a rappresentare ogni punto *P* di *r* con un numero, la sua "ascissa" x_P . Nulla vieta, però, di fare qualcosa di analogo con una curva aperta *C*: la posizione di un punto *Q* su *C* viene rappresentata da un numero x_Q, la sua "ascissa curvilinea". Facciamo un passo ulteriore: segniamo sulla retta *r* di prima il punto *Q'* che ha come ascissa il numero x_Q; ecco che la retta *r* viene a rappresentare la curva *C* trascurando le sue sinuosità; è un semplice espediente che troviamo del tutto naturale nei servizi televisivi su gare di velocità.

Analogamente, siamo abituati a pensare ad una coppia di numeri come rappresentativa di un punto del piano. Giusto, ma una tale coppia (*a*,*b*) può rappresentare altre cose; per esempio *a* e *b* potrebbero essere entrambe ascisse, ma di due punti *A* e *B* su una retta, o su una curva, o su due diverse curve. Che vantaggio possiamo trarre da questa rappresentazione? Be', si passa attraverso la normale geometria analitica di un piano fittizio in cui il punto di coordinate (ascissa e ordinata) (*a*,*b*) rappresenta la configurazione costituita dalle posizioni dei due punti (Figura 3); a questo punto i problemi relativi a una coppia di punti sulla curva diventano problemi relativi a un punto nel suo spazio delle configurazioni: il piano.

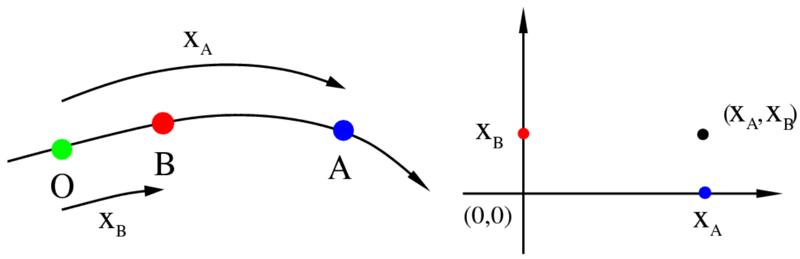

Fig. 3 – Una coppia di punti su una curva e il punto che la rappresenta nello spazio delle configurazioni

Ora, per esempio, possiamo rappresentare su questo piano fittizio dei vincoli cui siano sottoposti i due punti sulla curva. Supponiamo che, per qualche ragione, debba essere $x_B = x_A + 1$. Le configurazioni accettabili vengono allora rappresentate dai punti della retta *r* della Figura 4. Consideriamo poi un secondo vincolo, per cui i due punti non debbano distare da *O* più di 1: otteniamo il quadrato azzurro *Q*. A questo punto, abbiamo immediatamente sott'occhio l'insieme delle configurazioni che soddisfano entrambi i vincoli: sono quelle rappresentate dai punti del segmento viola d'intersezione.

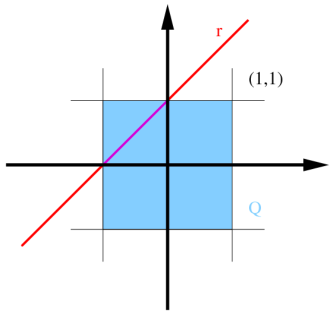

Fig. 4 – Raffigurazione grafica di due vincoli nello spazio delle configurazioni

2.2 Configurazioni di un sistema meccanico

Il trucco che abbiamo appena visto si può generalizzare sempre con la stessa idea di base: sostituire un oggetto complicato (nell'esempio precedente la coppia di punti) che abita in uno spazio semplice (la curva) con un oggetto semplice (un punto) che abita in uno spazio complicato (il piano).
Chiaramente per complicare davvero lo spazio delle configurazioni basta considerare 3, 4, 5 (eccetera) punti sulla curva invece di due ed ecco che dovremo usare uno spazio di dimensione 3, 4, 5 (eccetera) invece del piano. Ma si tratterebbe pur sempre di spazi euclidei. In generale, invece, non è detto che gli spazi astratti, che si costruiscono per rappresentare come punti le configurazioni di nostro interesse, siano euclidei, cioè – per così dire – come estensioni infinite di una stanza cubica. Basta infatti che uno di tali parametri sia un angolo, ed ecco che l'uguaglianza 0° = 360° (o $0 = 2\pi$) fa sì che invece di una retta occorra utilizzare una circonferenza.
Nella meccanica di un braccio robotico questo problema è molto sentito, sia perché normalmente si agisce proprio sugli angoli formati dalle varie parti del braccio, sia perché non è importante solo la posizione dell'oggetto ("attuatore finale") che il braccio porta alla sua estremità, ma anche la sua orientazione.

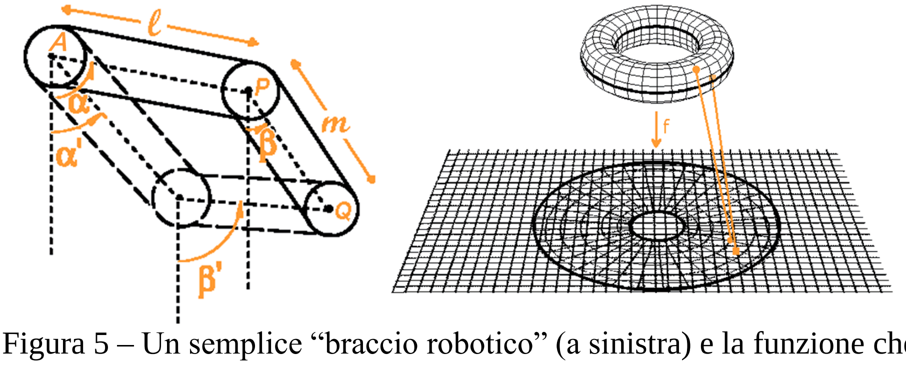

Figura 5 – Un semplice "braccio robotico" (a sinistra) e la funzione che associa ad ogni sua configurazione la posizione del punto Q (a destra).

La Figura 5 illustra un semplice "braccio robotico" formato da due segmenti rigidi di cui il primo ruota su un piano attorno ad un punto fisso A e il secondo ruota attorno all'altra estremità del primo. In questo caso lo spazio delle configurazioni è un toro, ed è interessante studiare analiticamente la funzione *f* che ad ogni configurazione associa la posizione dell'"attuatore finale" costituito dall'altra estremità del secondo segmento.

3. Spazio-tempo

Come potremmo far comprendere il nostro spazio tridimensionale ad un abitante di un universo bidimensionale, come in Abbott (1884)? Magari attraverso il piano-tempo, il cui generico elemento è il dato di un punto del piano assieme a un istante temporale. Nel piano-tempo com'è fatta una retta? O è proprio una retta ma per un solo istante, o è un punto che si muove di moto rettilineo uniforme. Ecco che allora possiamo far capire ad un omino bidimensionale un concetto a lui alieno come quello di "rette sghembe": due punti che si muovono di moto rettilineo uniforme su traiettorie che s'intersecano, ma passando sullo stesso punto in momenti diversi (come facciamo noi rispetto a un'automobile quando attraversiamo la strada).
Per noi tridimensionali non è difficile visualizzare tutto ciò mettendo il piano del nostro amico sul fondo di un ascensore in movimento (si veda la Figura 5).

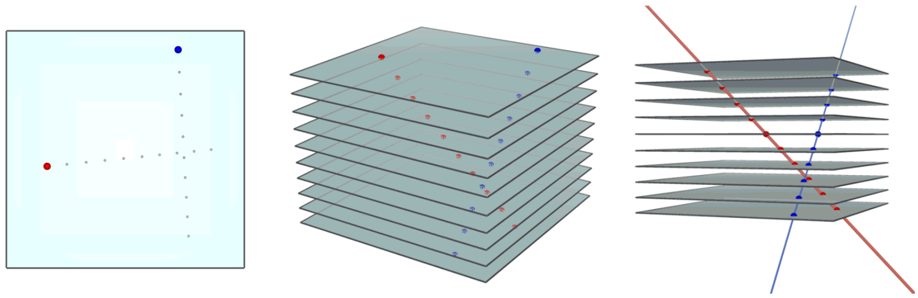

Fig. 5 – Due punti in moto rettilineo uniforme realizzano due rette sghembe nel piano-tempo

La geometria analitica supera i limiti dimensionali dell'intuizione: non c'è niente di strano, algebricamente, nell'uso di 4 o più coordinate. Subito, però, si verificano fenomeni algebrici che sfidano la nostra immaginazione. Per esempio, in dimensione quattro un piano si esprime mediante un sistema di due equazioni lineari in quattro incognite (un po' come una retta in dimensione tre); l'intersezione di due piani, perciò, è data da un sistema di quattro equazioni. Un teorema classico dell'algebra lineare (Rouché-Capelli) ci garantisce allora che un tale sistema può avere soluzione unica. Cioè due piani possono avere un unico punto in comune! Ciò è chiaramente impossibile nel nostro spazio dove (in coerenza col Teorema di Rouché-Capelli, relativamente a un sistema di due equazioni lineari in tre incognite) l'intersezione di due piani o è vuota o è una retta.
Per "vedere" due piani che s'intersecano in un punto ricorriamo allora allo spazio-tempo.

Com'è fatto un piano nello spazio-tempo? O è un piano del nostro spazio, ma solo per un istante, o è una retta che si muove di moto traslatorio uniforme. Immaginiamo due rette sghembe che si muovono una verso l'altra; nello spazio-tempo sono due piani; il punto + istante in cui si incrociano è il punto ad essi comune.
Non posso poi tacere il fatto che la natura geometrica dello spazio-tempo sia molto particolare grazie alla relatività. Ci sono ottimi libri divulgativi in proposito; cito solo Bais (2008) e addirittura un libro a fumetti: Edney e Bassett (2008).

4. Conclusioni

Lo studio di spazi di dimensione superiore alla nostra non è solo un affascinante esercizio matematico; è un efficace strumento per descrivere situazioni complesse mediante un'estensione della nostra intuizione geometrica. Poter ragionare in termini di parallelismo, ortogonalità, intersezione, proiezione, distanza, angoli eccetera dove in realtà non c'è niente di effettivamente geometrico è un enorme vantaggio per la comprensione e l'inventiva umana.
Un fascino particolare acquista l'aspetto quadridimensionale dello spazio-tempo; gli aspetti veramente sorprendenti emergono, però, quando le quattro grandezze (tre spaziali e una temporale) si mescolano fra loro. Ma questa è tutta un'altra storia…

Bibliografia

Abbott E.A. (1884). *Flatlandia. Racconto fantastico a più dimensioni*. Milano: Adelphi, 2003.
Bais S. (2008). *Relatività. Guida illustrata molto speciale*. Bari: Edizioni Dedalo.
Bland R.G. (1981). Programmazione lineare e allocazione di risorse. *Le Scienze* 156, 92-103.
Blanz V., Scherbaum K., e Seidel H.-P. (2007). Fitting a Morphable Model to 3D Scans of Faces. *In: Proc. of Int. Conf. on Computer Vision ICCV 2007*.
Edney R. e Bassett B. (2008). *La relatività a fumetti*. Milano: Raffaello Cortina.
Ferri M. (2007). Geometria da esportazione. *XlaTangente* 6, 51-56.
John V. e Trucco E. (2013). Charting-based subspace learning for video-based human action classification. *Machine Vision and Applications DOI 10.1007/s00138-013-0508-y*
Thurston W.P., Weeks J.R. (1984). La matematica delle varietà tridimensionali. *Le Scienze*. 193, 94-108.

Parole chiave: dimensione; spazio delle configurazioni; geometria analitica; spazio-tempo; braccio robotico.