

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Scienze di Internet

**ANALISI DEI SISTEMI DINAMICI  
E DELLA LORO STABILITA'  
NELLE APPLICAZIONI ECONOMICHE**

Tesi di Laurea in Matematica

**Relatore:  
Chiar.ma Prof.  
RITA FIORESI**

**Presentata da:  
SERENA COSTANZINI**

**Sessione II  
2008/2009**



*Alla mia famiglia...*  
*“I numeri governano il mondo” Platone*



# Introduzione

In questa tesi cercheremo di dimostrare come gli strumenti matematici derivanti dallo studio dei sistemi dinamici possano essere utilizzati per analizzare le applicazioni economiche e la stabilità dei sistemi associati ai modelli economici.

Nel primo capitolo verrà introdotto, in primo luogo, lo studio dei sistemi lineari, e verrà illustrato il caso in cui si verificano autovettori complessi. Successivamente verrà presentato il piano delle fasi dei sistemi lineari, che consiste nel caratterizzare l'equazione differenziale in base ad un disegno geometrico delle traiettorie, tenendo conto dei diversi casi che variano a seconda della natura degli autovalori, che saranno successivamente illustrati discutendone il comportamento delle traiettorie in generale con l'ausilio di opportuni esempi. Saranno poi introdotte le definizioni di sistema autonomo e di stabilità, e verrà mostrata l'analisi dei sistemi quasi lineari e le relative differenze con i sistemi lineari, basate sul tipo e sulla stabilità dei punti critici. Concluderemo questo capitolo con la descrizione del Secondo Metodo di Lyapunov, utile nella ricerca di un bacino di attrazione per eventuali punti di equilibrio stabili.

Nel secondo capitolo verranno applicati gli studi del capitolo precedente a dei problemi che riguardano la dinamica di popolazione; verranno quindi illustrati due particolari esempi di specie in competizione. Sarà descritto,

per entrambi i casi in esame, quando può presentarsi una situazione in cui entrambe le specie possano coesistere, cioè quando esiste un punto critico asintoticamente stabile. Verranno entrambi completati con un opportuno esempio.

Nel terzo capitolo si presenta la teoria dell'ecologia intra-organizzativa di adattamento, che sarà alla base del modello economico di studio; verrà quindi presentato il modello stesso e introdotte le equazioni che compongono il sistema dinamico associato. Termineremo il capitolo con una breve conclusione del modello finale in esame.

Nel quarto ed ultimo capitolo analizzeremo il sistema generale di equazioni differenziali presentato nel capitolo precedente, e con l'ausilio degli strumenti matematici descritti nei primi capitoli, si studieranno il tipo e la stabilità dei punti critici dello stesso, e si concluderà con una descrizione del significato economico dei risultati ottenuti.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Sistemi di equazioni differenziali</b>	<b>1</b>
1.1 Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti . . . . .	1
1.2 Autovalori complessi . . . . .	4
1.3 Piano delle fasi: sistemi lineari . . . . .	5
1.3.1 Caso 1: autovalori reali diversi con lo stesso segno . . .	6
1.3.2 Caso 2: autovalori reali con segno opposto . . . . .	7
1.3.3 Caso 3: autovalori uguali . . . . .	8
1.3.4 Caso 4: autovalori complessi . . . . .	10
1.3.5 Caso 5: autovalori puri e immaginari . . . . .	12
1.4 Sistemi autonomi e stabilità . . . . .	13
1.4.1 Sistema autonomo . . . . .	13
1.4.2 Stabilità e instabilità . . . . .	14
1.5 Sistemi quasi lineari . . . . .	16
1.6 Il Secondo Metodo di Lyapunov . . . . .	21
<b>2 Problemi di dinamica di popolazione</b>	<b>27</b>
2.1 Specie competitive . . . . .	27
2.2 Predatore-preda . . . . .	36

<b>3</b>	<b>La teoria intra-organizzativa di adattamento</b>	<b>45</b>
3.1	Il modello di ecologia intra-organizzativa . . . . .	45
3.2	Costruzione del modello . . . . .	47
3.3	Equazioni del modello . . . . .	48
3.3.1	Attività centrali . . . . .	49
3.3.2	Attività non centrali . . . . .	51
3.3.3	Risorse inutilizzate . . . . .	52
3.4	Conclusione del modello finale . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Descrizione e significato del modello economico</b>	<b>55</b>
4.1	La ricerca dei punti critici del modello . . . . .	55
4.2	Significato economico . . . . .	66
4.2.1	Condizioni di equilibrio . . . . .	66
4.2.2	Condizioni di equilibrio stabile . . . . .	68
	<b>Conclusioni</b>	<b>71</b>
<b>A</b>	<b>Autovettori e autovalori</b>	<b>73</b>



# Elenco delle figure

1.1	Autovalori reali con lo stesso segno. . . . .	7
1.2	Autovalori reali con segno opposto. . . . .	8
1.3	Autovalori uguali due autovettori indipendenti. . . . .	9
1.4	Autovalori uguali un autovettore indipendente. . . . .	10
1.5	Autovalori complessi. . . . .	12
1.6	(a) stabilità asintotica (b) stabilità . . . . .	16
1.7	Stabilità e instabilità dei sistemi lineari e dei sistemi quasi lineari. . . . .	20
2.1	I diversi casi per le specie competitive. . . . .	29
2.2	Punti critici e campo di direzione esempio. . . . .	32
2.3	Ritratto delle fasi esempio. . . . .	36
2.4	Punti critici e campo direzionale del sistema predatore-preda. . . . .	40
2.5	Un ritratto di fase del sistema non lineare. . . . .	43
2.6	Variazioni della popolazione di preda e predatore nel tempo. . . . .	43



# Capitolo 1

## Sistemi di equazioni differenziali

In questo capitolo tratteremo lo studio dei sistemi lineari, il loro piano delle fasi, i vari tipi di punti critici e la loro stabilità. Introduciamo anche la definizione di sistema autonomo per poi concludere con lo studio dei sistemi quasi lineari, e le loro differenze con i sistemi lineari per quanto riguarda il tipo e la stabilità dei punti critici. Tratteremo inoltre la funzione di Lyapunov che ci permette di trovare un bacino di attrazione di un punto critico stabile. Questo studio ci servirà, nei capitoli successivi, per analizzare un sistema dinamico associato ad un modello economico particolare.

### 1.1 Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti

Un sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine ha una forma del tipo:

$$\dot{x} = Ax$$

dove  $A$  è una matrice reale costante  $n \times n$  e  $x$  un vettore in  $\mathbb{R}^n$  (con  $x = x/t$ ).

Se  $n = 1$  il sistema si riduce ad una sola equazione di primo ordine, ovvero

$$dx/dt = ax$$

la cui soluzione è

$$x = Ce^{at}$$

Nel punto  $x = 0$  il sistema è stazionario. Se  $a < 0$ ,  $x = 0$  è un punto di equilibrio asintoticamente stabile; nel caso in cui  $a > 0$ , allora  $x = 0$  è instabile, perché il sistema tende ad allontanarsi da questo punto.

Per i sistemi con  $n > 1$  la situazione è in qualche modo analoga ma più complessa, cioè il punto di equilibrio si trova ponendo  $\dot{x} = 0$ , ossia  $Ax = 0$ , se il  $\det A \neq 0$ , l'unica soluzione è  $x = 0$ .

Quando  $n = 2$  abbiamo un caso particolarmente importante, che si presta alla visualizzazione delle traiettorie del sistema nel piano  $x_1, x_2$ , chiamato *piano delle fasi*. Un grafico, che rappresenta un insieme di traiettorie per un certo sistema, è chiamato *ritratto delle fasi*.

Le soluzioni che cerchiamo sono nella forma  $x = \xi e^{rt}$ , dove l'esponente  $r$  e il vettore  $\xi$  sono costanti da determinare.

Andando a sostituire alla  $x$  del sistema iniziale  $\xi e^{rt}$  avremo:

$$r\xi e^{rt} = A\xi e^{rt}$$

ed eliminando il fattore scalare non nullo  $e^{rt}$  otteniamo

$$A\xi = r\xi$$

$$(A - rI)\xi = 0$$

dove  $I$  è la matrice identità  $n \times n$ .

Quindi per risolvere il sistema di equazioni differenziali bisogna risolvere l'equazione algebrica sopra descritta. Questo problema si traduce in quello di determinare gli autovalori  $r$  e gli autovettori  $\xi$  della matrice  $A$ .

Vediamo un esempio:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x$$

Andiamo a calcolare gli autovalori e gli autovettori di  $A$ .

Gli autovalori sono dati da

$$\left\| \begin{pmatrix} 3-r & -2 \\ 2 & -2-r \end{pmatrix} \right\| = (3-r)(-2-r) + 4 = r^2 - r - 2 = 0.$$

Quindi questa equazione ha soluzioni  $r_1 = -1$  e  $r_2 = 2$ .

Calcoliamo l'autovettore corrispondente all'autovalore  $r_1 = -1$ :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo

$$2\xi_1 - \xi_2 = 0$$

quindi l'autovettore corrispondente all'autovalore  $r_1 = -1$  è:

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Analogamente per l'autovalore  $r_2 = 2$  abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo

$$\xi_1 - 2\xi_2 = 0$$

quindi l'autovettore corrispondente all'autovalore  $r_2 = 2$  è:

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La soluzione generale del sistema è:

$$x = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

## 1.2 Autovalori complessi

Vediamo ora il caso in cui la matrice  $A$  del sistema ha autovalori complessi.

Poiché  $A$  è una matrice a valori reali, i coefficienti dell'equazione polinomiale  $\det(A - rI)\xi = 0$  per  $r$  sono reali, ed eventuali autovalori complessi devono essere a coppie di complessi coniugati. Ad esempio, se  $r_1 = \lambda + i\mu$ , dove  $\lambda$  e  $\mu$  sono reali, è autovalore di  $A$ , allora anche  $r_2 = \lambda - i\mu$ . Inoltre, i corrispondenti autovettori  $\xi^{(1)}$  e  $\xi^{(2)}$  sono complessi coniugati. Per verificare questo supponiamo che  $r_1$  e  $\xi^{(1)}$  soddisfino

$$(A - r_1 I)\xi^{(1)} = 0$$

Stabilendo che  $A$  e  $I$  sono a valori reali, otteniamo

$$(A - \bar{r}_1 I)\bar{\xi}^{(1)} = 0$$

dove  $\bar{r}_1$  e  $\bar{\xi}^{(1)}$  sono i complessi coniugati, rispettivamente di  $r_1$  e  $\xi^{(1)}$ . In altre parole  $r_2 = \bar{r}_1$  è un autovalore e  $\xi^{(2)} = \bar{\xi}^{(1)}$  è un autovettore corrispondente.

Le soluzioni che soddisfano il sistema sono

$$x^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{r_1 t}$$

$$x^{(2)}(t) = \bar{\xi}^{(1)} e^{\bar{r}_1 t}.$$

Quindi possiamo trovare due soluzioni a valori reali per il sistema corrispondenti agli autovalori  $r_1$  e  $r_2$  prendendo la parte reale e immaginaria di  $x^{(1)}(t)$  o di  $x^{(2)}(t)$  delle equazioni sopra.

Se scriviamo  $\xi^{(1)} = a + ib$ , dove  $a$  e  $b$  sono reali, allora abbiamo

$$x^{(1)}(t) = (a + ib)e^{(\lambda + i\mu)t} = (a + ib)e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \sin \mu t)$$

Separando  $x^{(1)}(t)$  nella sua parte reale e immaginaria, otteniamo

$$x^{(1)}(t) = e^{\lambda t}(a \cos \mu t - b \sin \mu t) + ie^{\lambda t}(a \sin \mu t + b \cos \mu t)$$

Se scriviamo  $x^{(1)}(t) = u(t) + iv(t)$ , allora i vettori

$$u(t) = e^{\lambda t}(a \cos \mu t - b \sin \mu t),$$

$$v(t) = e^{\lambda t}(a \sin \mu t + b \cos \mu t)$$

sono soluzioni a valori reali del sistema. E' possibile dimostrare che  $u$  e  $v$  sono linearmente indipendenti.

Ad esempio, supponiamo di avere autovalori  $r_1 = \lambda + i\mu$ ,  $r_2 = \lambda - i\mu$  e che i restanti autovalori  $r_3, \dots, r_n$  siano tutti reali e distinti. I corrispondenti autovettori sono  $\xi^{(1)} = a + ib$ ,  $\xi^{(2)} = a - ib$ ,  $\xi^{(3)}, \dots, \xi^{(n)}$ . Allora l'equazione generale del sistema sarà

$$x = C_1 u(t) + C_2 v(t) + C_3 \xi^{(3)} e^{r_3 t} + \dots + C_n \xi^{(n)} e^{r_n t}$$

dove  $u(t)$  e  $v(t)$  sono dati dalle equazioni sopra.

Ricordiamo che questa analisi si applica solo se la matrice  $A$  coefficiente del sistema è reale, perché è solo allora che autovalori complessi e autovettori avvengono a coppie coniugate.

### 1.3 Piano delle fasi: sistemi lineari

Dal momento che molte equazioni differenziali non possono essere risolte facilmente con metodi analitici è importante sapere quali informazioni qualitative possono essere ottenute dalle loro soluzioni senza però risolvere l'equazione; studieremo dunque la stabilità di una soluzione utilizzando metodi essenzialmente geometrici.

Consideriamo un sistema semplice, ossia un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti di primo ordine, nella forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

dove  $A$  è una matrice reale costante  $n \times n$  e  $x$  un vettore  $2 \times 1$ .

I punti, dove  $Ax = 0$ , corrispondono ad un equilibrio (costante) di soluzioni e vengono chiamati *punti critici*.

Si assuma che  $A$  sia non singolare, o che il  $\det A \neq 0$ , ne consegue che  $x = 0$  è l'unico punto critico del sistema.

Una soluzione dell'equazione  $\frac{dx}{dt} = Ax$  è una funzione vettoriale  $x = \Phi(t)$ ,  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ , che soddisfa l'equazione differenziale. Tale funzione può essere vista come una rappresentazione parametrica per una curva nello spazio  $x_1, \dots, x_n$ . E' spesso utile considerare questa curva come il percorso, o traiettoria, attraversato da una particella in movimento la cui velocità  $\frac{dx}{dt}$  è specificata dall'equazione differenziale, se  $n = 2$ . Il piano  $x_1, x_2$  è chiamato *piano delle fasi* e una serie di traiettorie viene indicato come un *ritratto delle fasi*. Nell'analizzare il sistema  $\frac{dx}{dt} = Ax$  bisogna considerare diversi casi, a seconda della natura degli autovalori di  $A$ . L'obiettivo principale è quello di caratterizzare l'equazione differenziale in base al disegno geometrico formato dalle sue traiettorie. Per ogni caso discuteremo il comportamento delle traiettorie in generale, e le illustreremo con un esempio particolare.

### 1.3.1 Caso 1: autovalori reali diversi con lo stesso segno

La soluzione generale dell'equazione  $\frac{dx}{dt} = Ax$  è

$$x = C_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + C_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t}$$

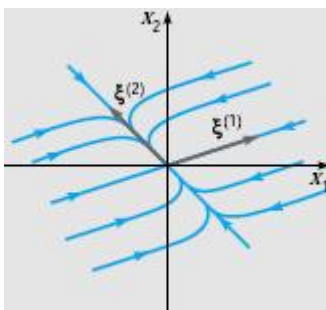
dove  $r_1$  e  $r_2$  sono o entrambi positivi o entrambi negativi, quindi  $r_1 < r_2 < 0$ . E' utile riscrivere la soluzione generale in forma:

$$x = e^{r_2 t} [C_1 \xi^{(1)} e^{(r_1 - r_2)t} + C_2 \xi^{(2)}],$$



si può notare che tutte le soluzioni per  $t \rightarrow \infty$  si avvicinano all'origine, indipendentemente dai valori di  $C_1$  e  $C_2$ . Osserviamo che  $r_1 - r_2 < 0$ , pertanto finché  $C_2 \neq 0$ , il termine  $C_1 \xi^{(1)} e^{(r_1 - r_2)t}$  è trascurabile rispetto a  $C_2 \xi^{(2)}$  con  $t$  sufficientemente grande. Così, con  $t \rightarrow \infty$ , la traiettoria si avvicina, non solo all'origine, ma tende anche verso la direzione di  $\xi^{(2)}$ . Pertanto tutte le soluzioni si avvicinano all'origine tangenti alla direzione di  $\xi^{(2)}$  ad eccezione di quelle che si trovano sulla direzione di  $\xi^{(1)}$ . Questo tipo di punto critico viene chiamato *nodo*.

Figura 1.1: Autovalori reali con lo stesso segno.



Se  $r_1$  e  $r_2$  sono entrambi positivi, e  $0 < r_2 < r_1$ , allora le traiettorie hanno lo stesso modello descritto sopra ma la direzione del movimento è lontano da, piuttosto che verso, il punto critico. Anche in questo caso il punto critico viene chiamato *nodo*.

### 1.3.2 Caso 2: autovalori reali con segno opposto

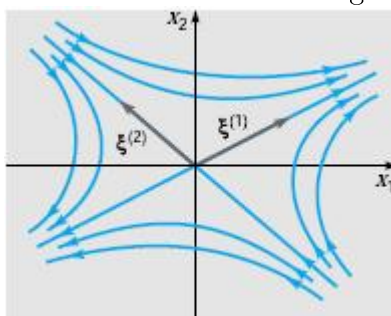
La soluzione generale in questo caso è come il precedente

$$x = C_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + C_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t}$$

dove però  $r_1 > 0$  e  $r_2 < 0$ . Se la soluzione parte da un punto iniziale sulla direzione di  $\xi^{(1)}$ , allora consegue che  $C_2 = 0$ , quindi la soluzione rimane sulla direzione di  $\xi^{(1)}$  per qualunque  $t$ , e poiché  $r_1 > 0$ ,  $x \rightarrow \infty$  per  $t \rightarrow \infty$ . Se la

soluzione parte da un punto iniziale sulla direzione di  $\xi^{(2)}$ , allora la soluzione è simile con l'eccezione che  $x \rightarrow 0$  se  $t \rightarrow \infty$  perché  $r_2 < 0$ . Possiamo dire, quindi, che le uniche traiettorie che si avvicinano all'origine sono quelle su  $\xi^{(2)}$ , mentre le altre seguiranno traiettorie simili a quelle mostrate in figura. Il punto critico in questo caso viene chiamato *punto di sella*.

Figura 1.2: Autovalori reali con segno opposto.



### 1.3.3 Caso 3: autovalori uguali

Ora supponiamo che i due autovalori siano uguali, ovvero che  $r_1 = r_2 = r$ . Consideriamo prima il caso in cui gli autovalori siano negativi (se fossero positivi le traiettorie sono simili ma vengono percorse in senso opposto). Ci sono due sottocasi, a seconda che l'autovalore ripetuto abbia due autovettori indipendenti o uno solo.

#### Caso 3/a: autovettori indipendenti

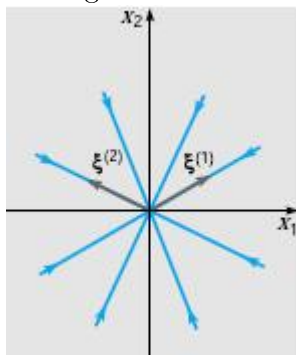
La soluzione generale è data da

$$x = C_1 \xi^{(1)} e^{rt} + C_2 \xi^{(2)} e^{rt}$$

dove  $\xi^{(1)}$  e  $\xi^{(2)}$  sono gli autovettori indipendenti. Osserviamo che il rapporto  $x_2/x_1$  è indipendente da  $t$ , ma dipende dai componenti di  $\xi^{(1)}$  e  $\xi^{(2)}$  e dalle costanti arbitrarie  $C_1$  e  $C_2$ . La direzione delle traiettorie all'aumentare

di  $t$  viene definita dall'esponenziale, per questo ogni traiettoria giace su una retta passante per l'origine. Il punto critico è chiamato *punto stella*.

Figura 1.3: Autovalori uguali due autovettori indipendenti.



### Caso 3/b: un autovettore indipendente

In questo caso la soluzione generale è data da

$$x = C_1 \xi e^{rt} + C_2 (\xi t e^{rt} + \eta e^{rt})$$

dove  $\xi$  è l'autovettore e  $\eta$  è l'autovettore generalizzato associato all'autovettore ripetuto. All'aumentare di  $t$  il termine dominante nell'equazione è  $C_2 t \xi e^{rt}$ . Così, per  $t \rightarrow \infty$  ogni traiettoria si avvicina all'origine attraverso la tangente alla direzione dell'autovettore. Questo è vero anche se  $C_2 = 0$ , quindi la soluzione  $x = C_1 t \xi e^{rt}$  si trova su questa direzione. Allo stesso modo per  $t$  negativo molto grande, il termine dominante è di nuovo  $C_2 \xi e^{rt}$  pertanto, se  $t \rightarrow -\infty$ , ogni traiettoria è asintotica a una direzione parallela all'autovettore  $\xi$ . L'orientamento delle traiettorie dipende dalla posizione relativa di  $\xi$  e di  $\eta$ . Per individuare la traiettoria è utile riscrivere la soluzione nella forma:

$$x = [(C_1 \xi + C_2 \eta) + C_2 \xi t] e^{rt} = y e^{rt}$$

dove  $y = (C_1 \xi + C_2 \eta) + C_2 \xi t$ . Si osservi che il vettore  $y$  determina la direzione di  $x$ , mentre lo scalare quantitativo  $e^{rt}$  riguarda solo la grandezza

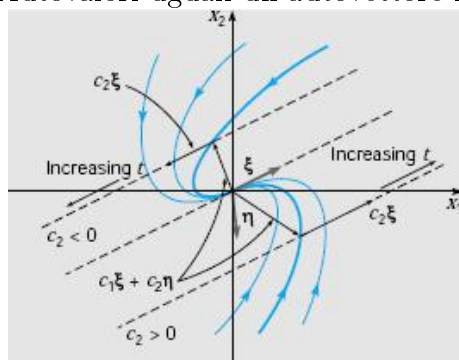
di  $x$ . Si noti, inoltre, che per valori fissi di  $C_1$  e  $C_2$ , l'espressione di  $y$  è un'equazione vettoriale della retta che attraversa il punto  $C_1\xi + C_2\eta$  e parallela a  $\xi$ .

Per disegnare la traiettoria corrispondente ad una coppia di valori  $C_1$  e  $C_2$ , si procede come segue.

In primo luogo si traccia la retta corrispondente alla direzione  $(C_1\xi + C_2\eta) + C_2\xi t$ , si noti che, quando  $t = 0$  la traiettoria passa per il punto  $C_1\xi + C_2\eta$ . Se  $t$  aumenta, la traiettoria segue l'incremento di  $t$  contemporaneamente al decrescere di  $x$ , che si avvicinerà allo 0 a causa del fattore esponenziale  $e^{rt}$  decrescente.

Se  $r_1 = r_2 > 0$  è possibile disegnare le traiettorie seguendo la stessa procedura. In tal caso, la direzione delle traiettorie sarà rivolta verso l'esterno e l'orientamento della traiettoria rispetto a  $\xi$  e  $\eta$  è invertito. Quando un autovalore doppio ha solo un unico autovettore indipendente il punto critico viene chiamato *nodo degenere* o *improprio*.

Figura 1.4: Autovalori uguali un autovettore indipendente.



### 1.3.4 Caso 4: autovalori complessi

Supponiamo che gli autovalori siano  $\lambda \pm i\mu$ , dove  $\lambda$  e  $\mu$  sono reali,  $\lambda \neq 0$  e  $\mu > 0$ .

I sistemi che hanno autovalori  $\lambda \pm i\mu$  sono caratterizzati da

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} x$$

o in forma scalare

$$x_1' = \lambda x_1 + \mu x_2, \quad x_2' = -\mu x_1 - \lambda x_2.$$

Introduciamo la coordinata polare  $r, \theta$  data da

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \tan \theta = x_2/x_1.$$

Differenziando queste equazioni otteniamo

$$rr' = x_1x_1' + x_2x_2', \quad (\sec^2 \theta)\theta' = (x_1x_2' - x_2x_1')/x_1^2.$$

Sostituiamo all'equazione  $x_1' = \lambda x_1 + \mu x_2, x_2' = -\mu x_1 - \lambda x_2$  l'equazione  $rr' = x_1x_1' + x_2x_2'$  troveremo che

$$r' = \lambda r,$$

e quindi

$$r = Ce^{\lambda t},$$

dove  $C$  è una costante. Allo stesso modo se sostituiamo all'equazione  $x_1' = \lambda x_1 + \mu x_2, x_2' = -\mu x_1 - \lambda x_2$  l'equazione  $\tan \theta = x_2/x_1$  e sfruttando il fatto che  $\sec^2 \theta = r^2/x_1^2$  abbiamo

$$\theta' = -\mu.$$

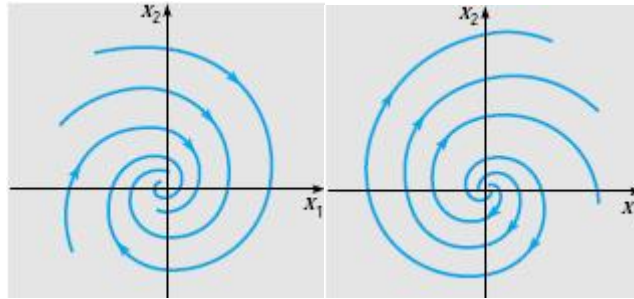
e quindi

$$\theta = -\mu t + \theta_0,$$

dove  $\theta_0$  è il valore di  $\theta$  quando  $t = 0$ .

L'equazione  $r = Ce^{\lambda t}$  e l'equazione  $\theta = -\mu t + \theta_0$  sono equazioni parametriche in coordinate polari delle traiettorie del sistema  $\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} x$ . Poiché  $\mu > 0$  ne consegue dall'equazione  $\theta = -\mu t + \theta_0$  che  $\theta$  diminuisce al crescere di  $t$ , quindi la direzione del moto su una traiettoria è in senso orario. Per  $t \rightarrow \infty$ , possiamo notare dall'equazione  $r = Ce^{\lambda t}$  che  $r \rightarrow 0$  se  $\lambda < 0$  e  $r \rightarrow \infty$  se  $\lambda > 0$ . In questo modo le traiettorie saranno spirali, che si avvicinano o si allontanano dall'origine, a seconda del segno di  $\lambda$ . Più in generale, è possibile dimostrare che per ogni sistema con autovalori complessi  $\lambda \pm i\mu$ , dove  $\lambda \neq 0$ , le traiettorie saranno sempre spirali che possono essere dirette verso l'interno o verso l'esterno, rispettivamente, a seconda che  $\lambda$  sia positivo o negativo, possono essere allungate o inclinate rispetto agli assi, e la direzione del movimento può essere in senso orario o in senso antiorario. Il punto critico è chiamato *punto spirale*.

Figura 1.5: Autovalori complessi.



### 1.3.5 Caso 5: autovalori puri e immaginari

In questo caso avremo che  $\lambda = 0$  e il sistema utilizzato nel caso 4 si ridurrà a

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} x$$

con autovalori  $\pm i\mu$ . Usando gli stessi argomenti del caso precedente, troviamo che

$$r' = 0, \quad \theta' = -\mu,$$

e conseguentemente

$$r = C, \quad \theta = -\mu t + \theta_0,$$

dove  $C$  e  $\theta_0$  sono costanti. Le traiettorie saranno ellissi, con il centro nell'origine, percorse in senso orario se  $\mu > 0$  e in senso antiorario se  $\mu < 0$ . Il punto critico è chiamato *centro*.

## 1.4 Sistemi autonomi e stabilità

### 1.4.1 Sistema autonomo

I sistemi autonomi in due variabili sono sistemi di due equazioni differenziali della forma

$$dx/dt = F(x, y), \quad dy/dt = G(x, y).$$

dove le funzioni  $F$  e  $G$  sono continue e hanno derivate parziali continue in un dominio  $D$  del piano  $xy$ . Se  $(x_0, y_0)$  è un punto del dominio  $D$ , esiste un'unica soluzione  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  del sistema che soddisfa le condizioni iniziali

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

La soluzione è definita in qualche intervallo di tempo che contiene il punto  $t_0$ .

Le condizioni iniziali, si possono scrivere in forma vettoriale, come:

$$dx/dt = f(x), \quad x(t_0) = x^0,$$

dove  $x = xi + yj$ ,  $f(x) = F(x, y)i + G(x, y)j$ ,  $x^0 = x_0i + y_0j$  e  $(i, j)$  è la base canonica.

In questo caso la soluzione è espressa come  $x = \Phi(t)$ , dove  $\Phi(t) = \phi(t)i + \psi(t)j$ . La soluzione  $x = \Phi(t)$  si interpreta come una curva descritta da un punto che si muove nel piano  $xy$ , nel piano delle fasi. Si osservi che le funzioni  $F$  e  $G$  nel sistema iniziale non dipendono dalla variabile indipendente  $t$ , ma solo dalle variabili dipendenti  $x$  e  $y$ . Un sistema con queste proprietà è detto *sistema autonomo*.

Il sistema

$$\dot{x} = Ax$$

dove  $A$  è una matrice costante, è un semplice esempio di sistema autonomo bidimensionale. D'altra parte, se uno o più elementi della matrice  $A$  è una funzione della variabile indipendente  $t$ , allora il sistema non è autonomo. In particolare, il sistema autonomo dispone di un campo associato di direzione che è indipendente dal tempo. Di conseguenza, vi è solo una traiettoria che passa attraverso il punto  $(x_0, y_0)$  nel piano delle fasi. In altre parole, tutte le soluzioni che soddisfano la prima condizione  $x(t_0) = x_0$  si trovano sulla stessa traiettoria, a prescindere dal tempo  $t_0$ , che attraversa il punto  $(x_0, y_0)$ .

I sistemi autonomi si incontrano di frequente nelle applicazioni fisiche. Un sistema autonomo è un sistema la cui configurazione, compresi i parametri fisici e le forze esterne o gli effetti, è indipendente dal tempo. La risposta del sistema alle condizioni iniziali date è quindi indipendente dal momento in cui le condizioni sono imposte.

## 1.4.2 Stabilità e instabilità

Consideriamo, ora, un sistema autonomo della forma



$$\dot{x} = f(x)$$

la notazione  $\|x\|$  verrà usata per esprimere la lunghezza, o la grandezza, del vettore  $x$ .

I punti in cui  $f(x) = 0$  sono chiamati *punti critici* del sistema autonomo. I punti in cui  $\dot{x} = 0$  corrispondono ad una soluzione di equilibrio per il sistema di equazioni differenziali. Un punto critico  $x^0$  del sistema  $\dot{x} = f(x)$  si definisce *stabile* se, dato un qualsiasi  $\epsilon > 0$ , vi è un  $\delta > 0$  tale che ogni soluzione  $x = \Phi(t)$  del sistema iniziale, con  $t = 0$  soddisfa

$$\|\Phi(0) - x^0\| < \delta,$$

esiste per tutte le  $t$  positive e soddisfa, inoltre,

$$\|\Phi(t) - x^0\| < \epsilon$$

per tutte le  $t \geq 0$ .

Questo significa che tutte le soluzioni partono sufficientemente vicino (cioè entro il  $\delta$  di distanza) a  $x^0$ . Si noti che le traiettorie sono all'interno del cerchio  $\|x - x^0\| = \delta$  per  $t = 0$  e, mentre passano fuori da questo cerchio, rimangono all'interno del cerchio  $\|x - x^0\| = \epsilon$  per  $t \geq 0$ . Tuttavia, la traiettoria della soluzione non deve avvicinarsi al punto critico  $x^0$  se  $t \rightarrow \infty$ . Il punto critico non è stabile e quindi viene chiamato *instabile*.

Il punto critico  $x^0$  è chiamato *asintoticamente stabile* se è stabile e se esiste un  $\delta_0$ , con  $0 < \delta_0 < \delta$ , tale che la soluzione  $x = \Phi(t)$  soddisfa

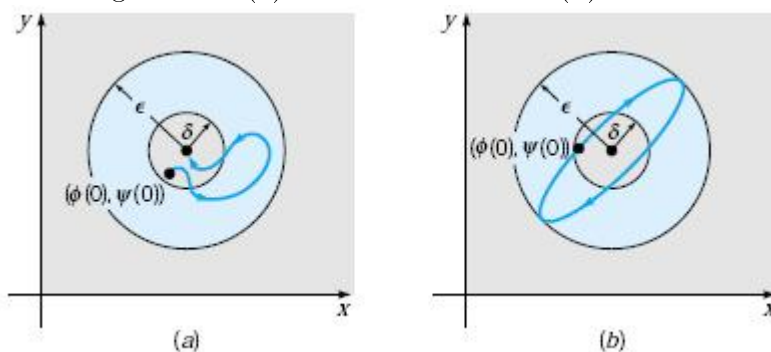
$$\|\Phi(0) - x^0\| < \delta_0,$$

allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = x^0.$$

Così le traiettorie che iniziamo sufficientemente vicine al punto  $x^0$  devono avvicinarsi a  $x^0$ , se  $t \rightarrow \infty$ . Si noti che la stabilità asintotica è una proprietà più forte della stabilità, dal momento che un punto critico deve essere stabile prima che si possa dire se sia asintoticamente stabile. Le definizioni date valgono anche per i sistemi n-dimensionali.

Figura 1.6: (a) stabilità asintotica (b) stabilità



## 1.5 Sistemi quasi lineari

Introduciamo un risultato importante:

*Il punto critico  $x = 0$  del sistema lineare  $\dot{x} = Ax$  è **asintoticamente stabile** se gli autovalori  $r_1$  e  $r_2$  sono reali e negativi o hanno la parte reale negativa; è **stabile**, ma non asintoticamente stabile, se  $r_1$  e  $r_2$  sono puramente immaginari; è **instabile** se  $r_1$  e  $r_2$  sono reali e positivi, o se hanno parte reale positiva.*

Dal teorema risulta che il segno degli autovalori  $r_1$  e  $r_2$  della matrice  $A$  determina la stabilità del punto critico  $x = 0$ . A loro volta, i valori di  $r_1$  e  $r_2$  dipendono dai coefficienti del sistema.

Nelle applicazioni, i coefficienti sono di solito il risultato di qualche misurazione di alcune quantità fisiche, quindi può essere interessante verificare

se piccole perturbazioni nei coefficienti possano pregiudicare la stabilità o instabilità di un punto critico.

Ricordiamo che gli autovalori  $r_1$  e  $r_2$  sono le radici dell'equazione polinomiale

$$\det(A - rI) = 0.$$

E' possibile dimostrare che piccole perturbazioni in alcuni o in tutti i coefficienti si traducano in piccole perturbazioni negli autovalori. La situazione più delicata si verifica quando  $r_1$  e  $r_2$  sono puramente immaginari, cioè  $r_1 = i\mu$  e  $r_2 = -i\mu$ , ovvero quando il punto critico è un centro e le traiettorie sono curve chiuse che lo circondano. Se un piccolo cambiamento si presenta nei coefficienti, gli autovalori  $r_1$  e  $r_2$  assumono nuovi valori  $r'_1 = \lambda' + i\mu'$  e  $r'_2 = \lambda' - i\mu'$ , dove  $\lambda'$  è di piccole dimensioni e  $\mu' \cong \mu$ . Se  $\lambda' \neq 0$ , allora le traiettorie del sistema perturbato sono spirali, piuttosto che curve chiuse. Il sistema sarà asintoticamente stabile se  $\lambda' < 0$  e instabile se  $\lambda' > 0$ . Così, nel caso di un centro, delle piccole perturbazioni ai coefficienti possono cambiare un sistema da stabile a instabile, ed in ogni caso ci si può aspettare di modificare radicalmente il modello di traiettorie nel piano delle fasi.

Un altro caso meno sensibile si verifica se gli autovalori sono uguali, ovvero se  $r_1 = r_2$ , in questo caso il punto critico è un nodo. Perturbando i coefficienti si avranno radici distinte ma il punto critico del sistema perturbato rimarrà un nodo, se però le radici sono complesse coniugate il punto critico diventerà un punto spirale. In questo caso la stabilità o instabilità del sistema non è influenzata da piccole perturbazioni dei coefficienti, ma le traiettorie possono essere modificate notevolmente. In tutti gli altri casi le piccole perturbazioni ai coefficienti del sistema non alterano la stabilità o instabilità del sistema stesso, né il tipo di punto critico.

Ora consideriamo un sistema autonomo bidimensionale non lineare:

$$\dot{x} = f(x).$$

L'obiettivo principale sarà quello di studiare il comportamento delle traiettorie del sistema vicino ad un punto critico  $x^0$ . Cercheremo di farlo mediante l'approssimazione del sistema non lineare attraverso un adeguato sistema lineare, le cui traiettorie saranno più facili da descrivere. La domanda cruciale è se le traiettorie del sistema lineare sono buone approssimazioni di quelle del sistema non lineare. Naturalmente abbiamo bisogno di sapere come trovare il sistema lineare associato.

E' conveniente scegliere come punto critico l'origine, ciò non comporterà alcuna perdita di generalità in quanto se  $x^0 \neq 0$  è sempre possibile effettuare la sostituzione  $u = x - x^0$  nell'equazione  $\dot{x} = f(x)$ .

In primo luogo, dobbiamo considerare cosa significa per un sistema non lineare essere approssimato da un sistema lineare. Pertanto, supponiamo che

$$\dot{x} = Ax + g(x),$$

e che  $x = 0$  sia un punto critico isolato del sistema qui sopra. Ciò significa che vi è un cerchio vicino all'origine all'interno del quale non ci sono altri punti critici. Inoltre, assumiamo che il  $\det A \neq 0$ , in modo che  $x = 0$  sia anche un punto critico isolato del sistema  $\dot{x} = Ax$ . Il sistema non lineare  $\dot{x} = Ax + g(x)$  è approssimato dal sistema lineare  $\dot{x} = Ax$  se assumiamo che  $g(x)$  sia "piccola". Più precisamente, si assume che le componenti di  $g$  abbiano derivate parziali continue e soddisfino la condizione limite

$$\|g(x)\| / \|x\| \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow 0;$$

ossia che  $\|g(x)\|$  sia molto piccolo confronto a  $\|x\|$  vicino all'origine. Questo sistema viene chiamato *sistema quasi lineare* nelle vicinanze del punto critico  $x = 0$ . Può essere utile esprimere la condizione limite sopra descritta in forma scalare. Se poniamo  $x^T = (x, y)$ , allora avremo che

$\|x\| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = r$ . Analogamente  $g^T(x) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$  avremo quindi che  $\|g(x)\| = [g_1^2(x, y) + g_2^2(x, y)]^{\frac{1}{2}}$ . Ne consegue che la condizione del limite sopra citato è soddisfatta se e solo se

$$g_1(x, y)/r \rightarrow 0, \quad g_2(x, y)/r \rightarrow 0 \text{ quando } r \rightarrow 0.$$

Torniamo ora al sistema non lineare  $\dot{x} = f(x)$ , che scriveremo nella forma scalare

$$\dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y).$$

Il sistema qui sopra è quasi lineare in prossimità di un punto critico  $(x_0, y_0)$  ogni volta che le funzioni  $F$  e  $G$  avranno derivate parziali continue fino all'ordine due. Per dimostrare questo utilizziamo gli sviluppi di Taylor vicino al punto  $(x_0, y_0)$  e scriveremo  $F(x, y)$  e  $G(x, y)$  nella forma:

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_1(x, y),$$

$$G(x, y) = G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0)(x - x_0) + G_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_2(x, y),$$

dove  $\eta_1(x, y)/[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$  se  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  e analogamente per  $\eta_2$ . Si noti che  $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$  e che  $dx/dt = d(x - x_0)/dt$  e  $dy/dt = d(y - y_0)/dt$ . Quindi il sistema si riduce in

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{pmatrix},$$

o in forma vettoriale

$$\frac{du}{dt} = \frac{df}{dx}(x^0)u + \eta(x),$$

dove  $u = (x - x_0, y - y_0)^T$  e  $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T$ .

Se le funzioni  $F$  e  $G$  sono doppiamente differenziabili il sistema è quasi lineare e il sistema lineare che approssima il sistema non lineare, vicino a  $(x_0, y_0)$ , è dato dalla parte lineare ridotta qui sopra, ovvero:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

dove  $u_1 = x - x_0$  e  $u_2 = y - y_0$ .

Questa equazione fornisce un metodo semplice e generale per trovare il sistema lineare in prossimità di un punto critico. Ritornando al sistema quasi lineare  $\dot{x} = Ax + g(x)$ , dal momento che il termine non lineare  $g(x)$  è piccolo rispetto al termine lineare  $Ax$  quando  $x$  è piccolo, è ragionevole pensare che le traiettorie del sistema lineare  $\dot{x} = Ax$  siano buone approssimazioni per il sistema non lineare  $\dot{x} = Ax + g(x)$ , almeno vicino all'origine. Questo risulta essere vero in molti (ma non tutti) i casi come afferma il seguente teorema:

*Prendendo che  $r_1$  e  $r_2$  sono gli autovalori del sistema lineare  $\dot{x} = Ax$  corrispondono al sistema quasi lineare  $\dot{x} = Ax + g(x)$ . Quindi il tipo e la stabilità del punto critico  $(0, 0)$  del sistema lineare e del sistema quasi lineare sono indicati nella seguente tabella.*

Figura 1.7: Stabilità e instabilità dei sistemi lineari e dei sistemi quasi lineari.

$r_1, r_2$	Linear System		Almost Linear System	
	Type	Stability	Type	Stability
$r_1 > r_2 > 0$	N	Unstable	N	Unstable
$r_1 < r_2 < 0$	N	Asymptotically stable	N	Asymptotically stable
$r_2 < 0 < r_1$	SP	Unstable	SP	Unstable
$r_1 = r_2 > 0$	PN or IN	Unstable	N or SpP	Unstable
$r_1 = r_2 < 0$	PN or IN	Asymptotically stable	N or SpP	Asymptotically stable
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$				
$\lambda > 0$	SpP	Unstable	SpP	Unstable
$\lambda < 0$	SpP	Asymptotically stable	SpP	Asymptotically stable
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	C	Stable	C or SpP	Indeterminate

Note: N, node; IN, improper node; PN, proper node; SP, saddle point; SpP, spiral point; C, center.

In sostanza il teorema ci dice che per  $x$  di piccole dimensioni (o  $x - x^0$ ) i termini non lineari sono piccoli e non pregiudicano la stabilità e il tipo di punto critico, tranne in due casi sensibili:  $r_1$  e  $r_2$  puri e immaginari

e  $r_1$  e  $r_2$  reali e negativi. Ricordiamo che abbiamo affermato che piccole perturbazioni dei coefficienti del sistema lineare, e quindi agli autovalori  $r_1$  e  $r_2$ , può modificare il tipo e la stabilità del punto critico solo in questi due casi sensibili. Quindi il termine non lineare piccolo del sistema non lineare potrebbe avere un effetto analogo almeno in questi due casi sensibili. Questo è vero, ma il significato principale del teorema è che in tutti gli altri casi il termine non lineare piccolo non altera il tipo o la stabilità del punto critico. Quindi, tranne in due casi particolari, il tipo e la stabilità del punto critico del sistema non lineare può essere determinato da uno studio del sistema molto più semplice e lineare.

Anche se il punto critico è dello stesso tipo di quello del sistema lineare, le traiettorie del sistema quasi lineare potrebbero essere notevolmente diverse in apparenza da quelle del corrispondente sistema lineare, ad eccezione di quelle molto vicine al punto critico.

## 1.6 Il Secondo Metodo di Lyapunov

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto come la stabilità di un punto critico di un sistema quasi lineare possa essere, di solito, determinata attraverso lo studio di un sistema lineare associato; tuttavia abbiamo potuto constatare che non si può trarre alcuna conclusione quando il punto critico è un centro del sistema lineare corrispondente. Inoltre, per un punto critico asintoticamente stabile, può essere importante indagare il bacino di attrazione, cioè quel dominio nel quale tutte le soluzioni partono da questo settore verso il punto critico. Poiché la teoria dei sistemi quasi lineari è una teoria locale, non ci fornisce informazioni su questo problema.

In questa sezione discuteremo un altro tipo di approccio, noto come *Secondo Metodo di Lyapunov* o *Metodo Diretto*. Questo metodo è definito come metodo diretto perché non è necessaria la conoscenza della soluzione

del sistema di equazioni differenziali, ma vedremo che le conclusioni circa la stabilità o instabilità di un punto critico sono ottenuti con la costruzione di una funzione ausiliaria adeguata.

Questa tecnica è molto potente in quanto fornisce un tipo più globale di informazioni. Inoltre, il secondo metodo di Lyapunov può essere utilizzato anche per studiare i sistemi di equazioni che non sono quasi lineari.

Si consideri, ora, il seguente sistema autonomo:

$$dx/dt = F(x, y), \quad dy/dt = G(x, y),$$

e supponiamo che il punto  $x = 0, y = 0$  è un punto critico asintoticamente stabile. Allora esiste un dominio  $D$  contenente  $(0, 0)$ , tale che ogni traiettoria che parte da  $D$  si avvicina all'origine per  $t \rightarrow \infty$ .

Supponiamo che esista una funzione “energia”  $V$  tale che  $V \geq 0$  per  $(x, y)$  nel dominio  $D$  con  $V = 0$  solo all'origine. Dal momento che ogni traiettoria in  $D$  si avvicina all'origine per  $t \rightarrow \infty$ , a seguito di una particolare traiettoria,  $V$  si riduce a zero quando  $t$  tende ad infinito. Il tipo di risultato che vogliamo dimostrare è essenzialmente il contrario: se, su ogni traiettoria,  $V$  si riduce a zero al crescere di  $t$ , allora le traiettorie devono avvicinarsi all'origine per  $t \rightarrow \infty$ , e quindi l'origine sarà asintoticamente stabile.

Prima però dobbiamo dare alcune definizioni.

Sia  $V$  definita su un dominio  $D$  contenente l'origine, allora  $V$  è detta *definita positiva* su  $D$  se  $V(0, 0) = 0$  e se  $V(x, y) > 0$  per tutti gli altri punti del dominio  $D$ ; allo stesso modo,  $V$  si dice *definita negativa* su  $D$  se  $V(0, 0) = 0$  e se  $V(x, y) < 0$  per tutti gli altri punti del dominio  $D$ . Se le disuguaglianze  $>$  e  $<$  sono sostituite da  $\geq$  e  $\leq$ ,  $V$  si dirà *semidefinita positiva* e *semidefinita negativa* rispettivamente.

Ad esempio prendiamo la funzione

$$V(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$



è definita positiva su  $x^2 + y^2 < \pi/2$  in quanto  $V(0, 0) = 0$  e  $V(x, y) > 0$  per  $0 < x^2 + y^2 < \pi/2$ . Tuttavia, la funzione

$$V(x, y) = (x + y)^2$$

è solo semidefinita positiva da  $V(0, 0) = 0$  sulla linea  $y = -x$ .

Consideriamo ora la seguente funzione

$$\dot{V}(x, y) = V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y)$$

dove  $F$  e  $G$  sono le funzione del sistema autonomo iniziale.

E' stata scelta questa notazione perché  $\dot{V}(x, y)$  può essere identificata come il tasso di variazione di  $V$  lungo la traiettoria del sistema che passa per il punto  $(x, y)$ .

Cioè, se  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  è una soluzione del sistema, allora

$$\begin{aligned} \frac{dV[\phi(t), \psi(t)]}{dt} &= V_x[\phi(t), \psi(t)] \frac{d\phi(t)}{dt} + V_y[\phi(t), \psi(t)] \frac{d\psi(t)}{dt} \\ &= V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y) \\ &= \dot{V}(x, y) \end{aligned}$$

La funzione  $\dot{V}$  è a volte indicata come la derivata di  $V$  rispetto al sistema.

Ora enunciamo due teoremi di Lyapunov, il primo riferito alla stabilità, il secondo all'instabilità.

Primo teorema:

*Supponiamo che il sistema autonomo abbia un punto critico isolato all'origine. Se esiste una funzione  $V$  continua, con derivate parziali prime continue, definita positiva, e per la quale la funzione  $\dot{V}$  è definita negativa su un certo dominio  $D$  nel piano  $xy$  contenente  $(0, 0)$ , allora l'origine è un punto critico asintoticamente stabile. Se  $\dot{V}$  è semidefinita negativa, allora l'origine sarà un punto critico stabile.*

Secondo teorema:

*Consideriamo sempre che l'origine sia un punto critico isolato del sistema autonomo e che  $V$  sia una funzione continua, e siano continue anche le sue derivate parziali prime. Supponiamo che  $V(0,0) = 0$  e che in ogni intorno dell'origine vi è almeno un punto in cui  $V$  è positiva (negativa). Se esiste un dominio  $D$  contenente l'origine in modo tale che la funzione  $\dot{V}$  è definita positiva (definita negativa) su  $D$ , allora l'origine è un punto critico instabile.*

La funzione  $V$  è detta *funzione di Lyapunov*. Si nota però che la difficoltà dell'utilizzo di questi teoremi è che non viene detto nulla su come si costruisce una funzione di Lyapunov, ammesso che esista.

Consideriamo la seconda parte del primo teorema, cioè, il caso in cui  $\dot{V} \leq 0$ . Sia  $c \geq 0$  una costante, e considerando la curva del piano  $xy$  data da  $V(x,y) = c$ , per  $c = 0$ , la curva si riduce a un singolo punto  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Assumiamo che se  $0 < c_1 < c_2$ , allora la curva  $V(x,y) = c_1$  contiene l'origine e si trova all'interno della curva  $V(x,y) = c_2$ . Ciò dimostra che una traiettoria che parte all'interno di una curva chiusa  $V(x,y) = c$  non può uscire.

Quindi, dato che un cerchio di raggio  $\epsilon$  circa l'origine, tenendo  $c$  sufficientemente piccolo, possiamo garantire che ogni traiettoria di partenza all'interno della curva chiusa  $V(x,y) = c$  rimane all'interno del cerchio di raggio  $\epsilon$ , inoltre possiamo dire che rimane dentro la curva chiusa stessa. In tal modo l'origine è un punto critico stabile.

Ricordiamo il calcolo vettoriale

$$\nabla V(x,y) = V_x(x,y)i + V_y(x,y)j$$

noto come gradiente di  $V$ , è “normale” per la curva  $V(x,y) = c$  e per i punti nella direzione dell'aumentare di  $V$ . In questo caso  $V$  cresce verso l'esterno rispetto all'origine. Successivamente, consideriamo una traiettoria  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  del sistema quasi lineare, ricordando che il vet-

tore  $T(t) = \phi'(t)i + \psi'(t)j$  è tangente alla traiettoria in ogni punto. Permettendo che  $x_1 = \phi(t_1)$ ,  $y_1 = \psi(t_1)$  sia un punto di intersezione della traiettoria con la curva chiusa  $V(x, y) = c$ , a questo punto avremo che  $\phi'(t_1) = F(x_1, y_1)$ ,  $\psi'(t_1) = G(x_1, y_1)$ , derivanti dall'equazione  $\dot{V}(x, y) = V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y)$ , e otteniamo

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= V_x(x_1, y_1)\phi'(t_1) + V_y(x_1, y_1)\psi'(t_1) \\ &= [V_x(x_1, y_1)i + V_y(x_1, y_1)j] \cdot [\phi'(t_1)i + \psi'(t_1)j] \\ &= \nabla V(x_1, y_1) \cdot T(t_1)\end{aligned}$$

Così  $\dot{V}(x_1, y_1)$  è il prodotto scalare del vettore  $\nabla V(x_1, y_1)$  per il vettore  $T(t_1)$ . Dato che  $\dot{V}(x_1, y_1) \leq 0$ , consegue che il coseno dell'angolo tra  $\nabla V(x_1, y_1)$  e  $T(t_1)$  è inferiore o uguale a zero, quindi l'angolo è di per sé nel range  $[\pi/2, 3\pi/2]$ .

Così la direzione della traiettoria è verso l'interno rispetto a  $V(x_1, y_1) = c$  o, nella peggiore delle ipotesi, tangente a questa curva chiusa. Le traiettorie partono all'interno di una curva chiusa  $V(x_1, y_1) = c$  (non importa quanto  $c$  sia piccolo) e non possono allontanarsi fuori, quindi l'origine è stabile. Se  $\dot{V}(x_1, y_1) < 0$ , allora le traiettorie passanti per i punti della curva sono in realtà interne. Di conseguenza, si può dimostrare che le traiettorie che partono sufficientemente vicine all'origine si devono avvicinare all'origine, quindi, l'origine è un punto asintoticamente stabile.

Si supponga che  $\dot{V}$  è definita positiva, e supponiamo che, dato un cerchio circa l'origine,  $(x_1, y_1)$  è un punto interno, in cui  $V(x_1, y_1) > 0$ . Consideriamo una traiettoria che parte da  $(x_1, y_1)$ , lungo questa traiettoria  $V$  deve aumentare, dal momento che  $\dot{V}(x_1, y_1) > 0$ ; inoltre, dato che  $V(x_1, y_1) > 0$ , la traiettoria non può avvicinarsi all'origine in quanto  $V(0, 0) = 0$ .

Ciò dimostra che l'origine non può essere asintoticamente stabile, e ulteriormente, sfruttando il fatto che  $\dot{V}(x, y) > 0$ , è possibile dimostrare che l'origine è un punto instabile.

Terzo teorema:

*Considerando che l'origine sia un punto critico isolato del sistema e che la funzione  $V$  sia continua, con derivate parziali prime continue, se c'è un delimitato dominio  $D_k$  che contiene l'origine e dove  $V(x, y) < k$ ,  $V$  è definita positiva, e  $\dot{V}$  è definita negativa, quindi tutte le soluzioni del sistema che partono in un punto del dominio  $D_k$  si avvicinano all'origine per  $t \rightarrow \infty$ .*

In altre parole, il teorema dice che se  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  sono soluzioni del sistema per i dati iniziali di  $D_k$ ,  $(x, y)$  si avvicina al punto critico  $(0, 0)$  per  $t \rightarrow \infty$ . Così  $D_k$  crea una regione di stabilità asintotica. Questo teorema è verificato dalla dimostrazione che non esistono soluzioni periodiche del sistema in  $D_k$ , e non ci sono altri punti critici in  $D_k$ . Ne consegue che le traiettorie che partono in  $D_k$  non possono allontanarsi, e di conseguenza, devono tendere all'origine per  $t \rightarrow \infty$ .

Purtroppo non esistono metodi generali per la costruzione delle funzioni di Lyapunov, tuttavia, un risultato algebrico elementare, che è spesso utile nella costruzione di funzioni definite positive o definite negative, lo troviamo nel seguente teorema:

*La funzione*

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

*è definita positiva se, e solo se*

$$a > 0 \text{ e } 4ac - b^2 > 0$$

*ed è definita negativa se, e solo se,*

$$a < 0 \text{ e } 4ac - b^2 > 0.$$

## Capitolo 2

# Problemi di dinamica di popolazione

In questo capitolo applicheremo l'analisi del piano delle fasi ad alcuni problemi di dinamica della popolazione. Questi problemi riguardano due popolazioni che interagiscono tra di loro: nel primo caso avremo due specie che competono per un certo cibo disponibile, mentre nel secondo problema vedremo il caso in cui in un ambiente chiuso vi siano due specie, predatore e preda. Ovviamente le equazioni qui discusse sono estremamente semplici rispetto ai rapporti molto più complessi che esistono in natura, ma questi modelli saranno comunque utili per comprendere poi al meglio i problemi più complicati.

### 2.1 Specie competitive

Supponiamo che in qualche ambiente chiuso vi siano due specie simili in competizione per una quantità alimentare limitata, ad esempio, due specie di pesci in uno stagno che competono per il cibo disponibile. Siano  $x$  e  $y$  le

popolazioni delle due specie al tempo  $t$ , supponiamo che la popolazione di ciascuna specie, in assenza degli altri, sia governata da un'equazione logistica

$$dx/dt = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x),$$

$$dy/dt = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y),$$

rispettivamente, dove  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  sono i tassi di crescita delle popolazioni e che  $\epsilon_1/\sigma_1$  e  $\epsilon_2/\sigma_2$  siano il livello di saturazione. Tuttavia, quando entrambe le specie sono presenti, ciascuna di esse pregiudica l'offerta di cibo per gli altri. In effetti, si riducono i tassi di crescita e di saturazione della popolazione dell'altra specie. L'espressione più semplice per ridurre il tasso di crescita della specie  $x$  per la presenza della specie  $y$  è di sostituire il fattore di crescita  $\epsilon_1 - \sigma_1 x$ , della prima equazione, con  $\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y$ , dove  $\alpha_1$  è un valore che rappresenta il grado in cui la specie  $y$  interferisce con la specie  $x$ . Stessa cosa nella seconda equazione dove sostituiamo  $\epsilon_2 - \sigma_2 y$  con  $\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x$ . Quindi avremo un sistema di equazioni del tipo

$$dx/dt = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y),$$

$$dy/dt = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x).$$

I valori delle costanti positive  $\epsilon_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\sigma_2$  e  $\alpha_2$  dipendono dalle specie in esame e, in generale, devono essere determinate da osservazioni.

In alcuni casi la competizione tra due specie porta ad uno stato di equilibrio di convivenza, mentre in altri casi i risultati della concorrenza portano all'eventuale estinzione di una delle due specie.

Ci sono quattro casi da considerare, a seconda dell'orientamento delle seguenti equazioni algebriche

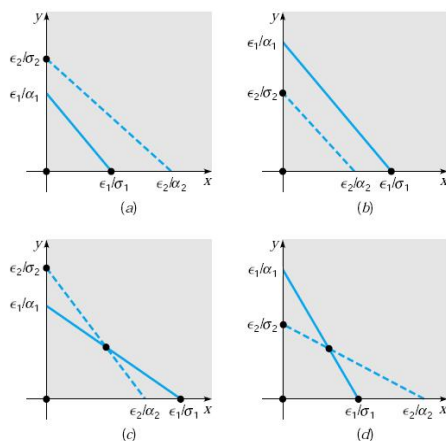
$$\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y = 0 \text{ e } \epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x = 0,$$

queste equazioni sono chiamate rette nulle di  $x$  e  $y$ , rispettivamente. Sia  $(X, Y)$  ad indicare un eventuale punto critico in uno qualsiasi dei quattro casi. Possiamo dire che il sistema delle equazioni logistiche è quasi lineare nella zona del punto critico, poiché il lato destro di ogni equazione differenziale è un polinomio quadratico. Per studiare il sistema nella zona del punto critico si può guardare il corrispondente sistema lineare

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 - 2\sigma_1 x - \alpha_1 y & -\alpha_1 x \\ -\alpha_2 y & \epsilon_2 - 2\sigma_2 y - \alpha_2 x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Useremo questa equazione per determinare le condizioni in cui il modello descritto dal sistema iniziale permette la coesistenza delle due specie. Dei seguenti quattro casi la coesistenza sarà possibile solo nei casi (c) e (d).

Figura 2.1: I diversi casi per le specie competitive.



Nei casi (c) e (d) i valori nulli  $x$  e  $y$  sono facilmente ottenuti risolvendo le equazioni algebriche  $\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y = 0$  e  $\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x = 0$ , il risultato sarà:

$$X = \frac{\epsilon_1 \sigma_2 - \epsilon_2 \alpha_1}{\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2}, \quad Y = \frac{\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \alpha_2}{\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2}.$$

Inoltre, poiché  $\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y = 0$  e  $\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x = 0$ , il sistema lineare si riduce in:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 x & -\alpha_1 x \\ -\alpha_2 y & -\sigma_2 y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori del sistema si trovano dall'equazione

$$r^2 + (\sigma_1 x + \sigma_2 y)r + (\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2)xy = 0,$$

ovvero

$$r_{1,2} = \frac{-(\sigma_1 x + \sigma_2 y) \pm \sqrt{(\sigma_1 x + \sigma_2 y)^2 - 4(\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2)xy}}{2}.$$

Se  $\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2 < 0$ , allora il radicando dell'equazione sopra descritta sarà positivo e superiore a  $(\sigma_1 x + \sigma_2 y)^2$ , quindi gli autovalori saranno reali e di segno opposto. Conseguentemente, il punto critico  $(X, Y)$  sarà un (instabile) punto di sella e la coesistenza non sarà possibile. Dall'altra parte, se  $\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2 > 0$ , allora il radicando dell'equazione è inferiore a  $(\sigma_1 x + \sigma_2 y)^2$ , quindi gli autovalori saranno reali, negativi e non uguali oppure saranno complessi con parte reale negativa; ma con una semplice analisi del radicando dell'equazione sopra descritta dimostra che gli autovalori non possano essere complessi, quindi il punto critico sarà un nodo asintoticamente stabile e quindi la convivenza sarà possibile.

Nella figura (c) abbiamo che:

$$\epsilon_1 \alpha_2 > \epsilon_2 \sigma_1 \text{ e } \epsilon_2 \alpha_1 > \epsilon_2 \sigma_1.$$

Queste disequaglianze, con la condizione che  $X$  e  $Y$  siano positivi, danno la disequaglianza  $\sigma_1 \sigma_2 < \alpha_1 \alpha_2$ . Quindi in questo caso il punto critico è un punto di sella. D'altra parte nella figura (d) abbiamo che:

$$\epsilon_1 \alpha_2 < \epsilon_2 \sigma_1 \text{ e } \epsilon_2 \alpha_1 < \epsilon_2 \sigma_1.$$



Ora sempre con la condizione di  $X$  e  $Y$  positivi avremo la disuguaglianza  $\sigma_1\sigma_2 > \alpha_1\alpha_2$  e quindi il punto critico è asintoticamente stabile. Così per tutti i valori iniziali positivi di  $X$  e  $Y$  le due popolazioni si avvicinano all'equilibrio di stato di coesistenza.

Le equazioni  $dx/dt = x(\epsilon_1 - \sigma_1x - \alpha_1y)$ ,  $dy/dt = y(\epsilon_2 - \sigma_2y - \alpha_2x)$  forniscono l'interpretazione biologica del risultato che la convivenza si verifica o meno a seconda se  $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2$  è positivo o negativo. Le  $\sigma$  sono un valore di effetto inibitorio alla crescita di ogni popolazione su di se, mentre le  $\alpha$  sono un valore sull'effetto di inibire la crescita di ogni altra popolazione. Così quando  $\sigma_1\sigma_2 > \alpha_1\alpha_2$  la concorrenza è "debole" e le specie possono coesistere, quando invece  $\sigma_1\sigma_2 < \alpha_1\alpha_2$ , la coesistenza è "forte" e le specie non possono coesistere e porta all'estinzione di una delle due.

Vediamo un esempio:

Discutiamo il comportamento qualitativo delle soluzioni del seguente sistema

$$dx/dt = x(1 - x - y)$$

$$dy/dt = y(0.75 - y - 0.5x)$$

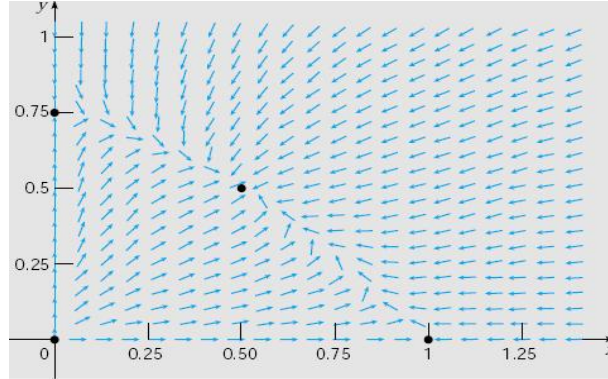
Troviamo i punti critici risolvendo il sistema di equazioni algebriche

$$x(1 - x - y) = 0$$

$$y(0.75 - y - 0.5x) = 0$$

Vediamo che ci sono quattro punti critici che soddisfano le equazioni qui sopra, ovvero,  $(0, 0)$ ,  $(0, 0.75)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0.5, 0.5)$  che corrispondono alle soluzioni di equilibrio del sistema. I primi tre punti comportano l'estinzione di una o entrambe le specie, ma solo l'ultimo corrisponde alla sopravvivenza a lungo termine delle specie. Un campo di direzione per il sistema nel quadrante positivo è illustrato in questa figura, i punti segnati sono i punti critici.

Figura 2.2: Punti critici e campo di direzione esempio.



In base al campo di direzione sembra che il punto  $(0.5, 0.5)$  attrae le altre soluzioni ed è quindi asintoticamente stabile, mentre gli altri tre punti critici sono instabili. Per confermare queste conclusioni si possono guardare le approssimazioni lineari vicino ad ogni punto critico. Andiamo a ricercare il sistema lineare in prossimità dei punti critici utilizzando il metodo introdotto nella sezione riguardante i sistemi quasi lineari, ovvero utilizzando la seguente equazione:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

dove, per il nostro sistema abbiamo che

$$F(x, y) = x(1 - x - y); \quad G(x, y) = y(0.75 - y - 0.5x),$$

quindi diventerà

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -0.5y & 0.75 - 2y - 0.5x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Il punto  $x = 0$   $y = 0$  corrisponde a uno stato in cui entrambe le specie muoiono a causa della loro concorrenza. Andando a sostituire il punto  $(0, 0)$  al punto  $(x_0, y_0)$  nel sistema riportato sopra avremo il sistema lineare corrispondente vicino all'origine:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Gli autovalori e gli autovettori corrispondenti del sistema sono:

$$r_1 = 1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$r_2 = 0.75, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

quindi la soluzione generale del sistema è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0.75t}.$$

In questo modo si può notare che l'origine è un nodo instabile, sia per il sistema non lineare sia per il sistema lineare associato. Vicino all'origine tutte le traiettorie sono tangenti all'asse  $y$ , tranne una che si trova sull'asse  $x$ .

Passiamo ora al punto  $x = 1$   $y = 0$  che corrisponde al caso in cui la specie  $x$  sopravvive mentre la specie  $y$  muore. Il sistema lineare corrispondente vicino al punto critico  $(1, 0)$  è:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori e gli autovettori corrispondenti del sistema sono:

$$r_1 = -1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$r_2 = 0.25, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix},$$

quindi la soluzione generale del sistema è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} e^{0.25t}.$$

Dal momento che gli autovalori hanno segno opposto, il punto  $(1, 0)$  è un punto di sella, e quindi è un punto di equilibrio instabile del sistema lineare e del sistema non lineare. Il comportamento delle traiettorie vicino  $(1, 0)$  può essere visto dalla soluzione generale. Se  $C_2 = 0$ , allora c'è una coppia di traiettorie che si avvicina al punto critico attraverso l'asse  $x$ . Tutte le altre traiettorie si allontanano dal punto  $(1, 0)$ .

Osserviamo il punto  $x = 0, y = 0.75$ , anche se è molto simile al precedente, infatti in questo caso è la specie  $y$  che sopravvive mentre la specie  $x$  muore. Come per gli altri punti troviamo il sistema lineare vicino al punto critico  $(0, 0.75)$ :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ -0.375 & -0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori e gli autovettori corrispondenti del sistema sono:

$$r_1 = 0.25, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$r_2 = -0.75, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

quindi la soluzione generale del sistema è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} e^{0.25t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.75t}.$$

Abbiamo sempre un punto di sella e anche in questo caso le traiettorie si allontanano dal punto critico  $(0, 0.75)$ , tranne che per una coppia di traiettorie che si avvicina al punto attraverso l'asse  $y$ .

Per il punto  $x = 0.5$   $y = 0.5$  corrisponde uno stato misto di equilibrio, o coesistenza, nella competizione tra le due specie. Anche in questo caso abbiamo trovato il sistema lineare corrispondente vicino al punto critico  $(0.5, 0.5)$ :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.25 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori e gli autovettori corrispondenti del sistema sono:

$$r_1 = (-2 + \sqrt{2})/4 \cong -0.146, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$r_2 = (-2 - \sqrt{2})/4 \cong -0.854, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

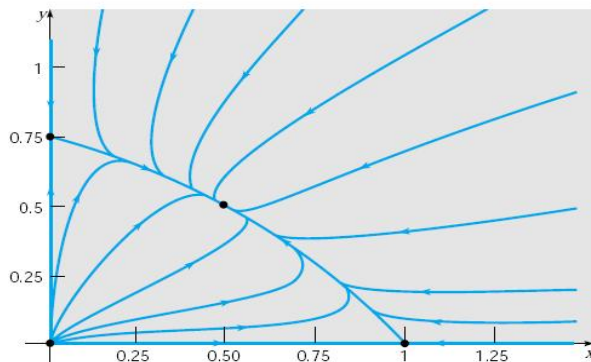
quindi la soluzione generale del sistema è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} e^{-0.146t} + C_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.854t}.$$

Poiché entrambi gli autovalori sono di segno negativo il punto critico  $(0.5, 0.5)$  è un nodo asintoticamente stabile sia per il sistema lineare che per il sistema non lineare. Tutte le traiettorie si avvicinano al punto critico quando  $t \rightarrow \infty$ . Una coppia di traiettorie si avvicina al punto lungo la retta con pendenza  $\sqrt{2}/2$  determinata dall'autovettore  $\xi^{(2)}$ , tutte le altre traiettorie si avvicinano al punto tramite la retta con pendenza  $-\sqrt{2}/2$  determinata dall'autovettore  $\xi^{(1)}$ .

Di seguito possiamo vedere il ritratto delle fasi del sistema:

Figura 2.3: Ritratto delle fasi esempio.



## 2.2 Predatore-preda

In questa sezione analizzeremo la situazione in cui una specie (il predatore) si nutra dell'altra specie (la preda), mentre quest'ultima viva con differenti fonti di cibo, considerando sempre un ambiente chiuso. Per esempio possiamo considerare le volpi e i conigli in una foresta chiusa: la volpe caccia i conigli, mentre i conigli si nutrono della vegetazione dell'ambiente.

Indichiamo con  $x$  e  $y$  le popolazioni della preda e del predatore rispettivamente, al tempo  $t$ .

Prima di iniziare l'analisi faremo alcune ipotesi:

1. In assenza del predatore, la preda cresce a un tasso proporzionale alla popolazione attuale, quindi  $dx/dt = ax$ , con  $a > 0$  quando  $y = 0$ ;
2. In assenza della preda, il predatore muore, quindi  $dy/dt = -cy$ , con  $c > 0$  se  $x = 0$ ;
3. Il numero di incontri tra predatore e preda è proporzionale al prodotto delle loro popolazioni. Ogni incontro promuove la crescita del predatore ma inibisce la crescita della preda. Così, il tasso di crescita del predatore è incrementato da un termine del tipo  $\gamma xy$ , mentre il tasso

di crescita della preda è diminuito da un termine definito  $-\alpha xy$ , dove  $\gamma$  e  $\alpha$  sono costanti positive.

Come conseguenza di queste ipotesi, le equazioni saranno:

$$dx/dt = ax - \alpha xy = x(a - \alpha y);$$

$$dy/dt = -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x).$$

Le costanti  $a$ ,  $c$ ,  $\alpha$  e  $\gamma$  sono tutte positive;  $a$  e  $c$  sono, rispettivamente, il tasso di crescita della preda e il tasso di morte del predatore, mentre  $\alpha$  e  $\gamma$  sono la misura dell'effetto dell'interazione delle due specie.

Il nostro obiettivo è quello di determinare il comportamento qualitativo delle traiettorie del sistema per i valori arbitrari positivi iniziali di  $x$  e  $y$ . I punti critici del sistema sono le soluzioni di

$$x(a - \alpha y) = 0, \quad y(-c + \gamma x) = 0,$$

che sono, il punto  $(0, 0)$  e il punto  $(c/\gamma, a/\alpha)$ .

Per prima cosa esaminiamo le soluzioni del corrispondente sistema lineare vicino ai punti critici.

Nelle vicinanze dell'origine il sistema lineare corrispondente diventa:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori e autovettori di questo sistema sono:

$$r_1 = a, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r_2 = -c, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

quindi la soluzione generale è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{at} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ct}.$$

Dunque, possiamo dire che l'origine è un punto di sella e di conseguenza è instabile. L'ingresso al punto di sella si trova sull'asse delle  $y$ ; tutte le altre traiettorie si allontanano dal punto critico.

Successivamente, consideriamo il punto critico  $(c/\gamma, a/\alpha)$ .

Se  $x = (c/\gamma) + u$  e  $y = (a/\alpha) + v$ , il corrispondente sistema lineare è:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha c/\gamma \\ \gamma a/\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori del sistema lineare sono  $r = \pm i\sqrt{ac}$ , quindi il punto critico è un centro (stabile) del sistema lineare. Per trovare le traiettorie del sistema basta dividere la seconda equazione per la prima, ottenendo:

$$\frac{d}{dt} = \frac{dv/dt}{du/dt} = -\frac{(\gamma a/\alpha)u}{(\alpha c/\gamma)v},$$

oppure

$$\gamma^2 a u du + \alpha^2 c v dv = 0.$$

conseguentemente,

$$\gamma^2 a u^2 + \alpha^2 c v^2 = k$$

dove  $k$  è una costante non negativa dell'integrazione. In questo modo si può intuire che le traiettorie del sistema lineare sono ellissi.

Ritornando al sistema non lineare, si osservi che esso può essere ridotto alla sola seguente equazione:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{y(-c+\gamma x)}{x(a-\alpha y)}.$$



Questa equazione è separabile e la sua soluzione sarà:

$$a \ln y - \alpha y + c \ln x - \gamma x = C,$$

dove  $C$  è una costante di integrazione.

Anche in questo caso è possibile dimostrare che il grafico dell'equazione qui sopra, per  $C$  fissata, è una curva chiusa che circonda il punto critico  $(c/\gamma, a/\alpha)$ . Così, questo punto critico è un centro anche per il sistema non lineare.

La soluzione del sistema lineare può essere scritta in questa forma:

$$u = \frac{c}{\gamma} K \cos(\sqrt{act} + \phi), \quad v = \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{c}{a}} K \sin(\sqrt{act} + \phi),$$

dove  $K$  e  $\phi$  sono costanti determinate dalle condizioni iniziali. Così abbiamo:

$$x = \frac{c}{\gamma} + \frac{c}{\gamma} K \cos(\sqrt{act} + \phi),$$
$$y = \frac{a}{\alpha} + \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{c}{a}} K \sin(\sqrt{act} + \phi).$$

Queste equazioni sono buone approssimazioni per le traiettorie quasi ellittiche vicino al punto critico  $(c/\gamma, a/\alpha)$ .

Vediamo un esempio:

Discutiamo le soluzioni del sistema:

$$dx/dt = x(1 - 0.5y) = x - 0.5xy,$$

$$dy/dt = y(-0.75 + 0.25x) = -0.75y + 0.25xy$$

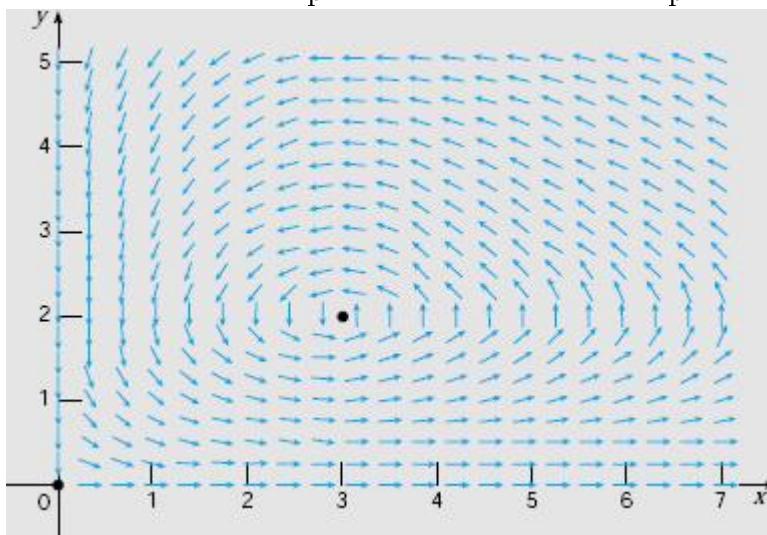
per  $x$  e  $y$  positive.

I punti critici di questo sistema sono la soluzione delle seguenti equazioni algebriche:

$$x(1 - 0.5y) = 0, \quad y(-0.75 + 0.25x) = 0,$$

ovvero, il punto  $(0,0)$  e il punto  $(3,2)$ . Nella figura sottostante vengono mostrati i punti critici e un campo direzionale per il sistema qui sopra descritto.

Figura 2.4: Punti critici e campo direzionale del sistema predatore-preda.



Da questa figura si può concludere provvisoriamente che le traiettorie saranno curve chiuse che circondano il punto critico  $(3,2)$ .

Ora esaminiamo il comportamento delle soluzioni vicino ad ogni punto critico.

Prendendo il punto  $(0,0)$ , trascurando i termini non lineari del sistema otteniamo il seguente sistema lineare:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori e gli autovettori di questo sistema sono:

$$r_1 = 1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r_2 = -0.75, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

quindi, la soluzione generale sarà:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.75t}.$$

Possiamo dire che l'origine è un punto di sella sia per il sistema lineare che per il sistema non lineare, ed è quindi instabile. Una coppia di traiettorie si avvicina all'origine attraverso l'asse delle  $y$ ; tutte le altre traiettorie partono dall'origine.

Ora esaminiamo il punto critico  $(3, 2)$ , applicando il metodo visto nella sezione dei sistemi non lineari otteniamo il seguente sistema lineare:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo gli autovalori con i relativi autovettori:

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}i}{2}, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$r_2 = -\frac{\sqrt{3}i}{2}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Dal momento che gli autovalori sono immaginari, il punto critico  $(3, 2)$  è un centro per il sistema lineare ed è quindi un punto critico stabile. Ricordiamo però che questo è uno dei casi in cui il comportamento del sistema lineare può o non può essere considerato adatto per il sistema non lineare, così come per la natura del punto critico  $(3, 2)$ . Il modo più semplice per trovare le traiettorie del sistema lineare è quello di dividere la seconda equazione per la prima al fine di ottenere l'equazione differenziale seguente:

$$\frac{d}{dt} = \frac{dv/dt}{du/dt} = \frac{0.5u}{-1.5v} = -\frac{u}{3v},$$

oppure

$$udu + 3vdv = 0.$$

Conseguentemente,

$$u^2 + 3v^2 = k,$$

dove  $k$  è una costante arbitraria non negativa dell'integrazione. In tal modo le traiettorie del sistema lineare sono ellissi con centro nel punto critico e allungate un po' in direzione orizzontale.

Torniamo ora al sistema non lineare, dividiamo la seconda equazione per la prima e otteniamo:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(-0.75+0.25x)}{x(1-0.5y)}.$$

Quest'equazione è separabile e possiamo riscriverla in questa forma:

$$\frac{1-0.5y}{y} dy = \frac{-0.75+0.25x}{x} dx,$$

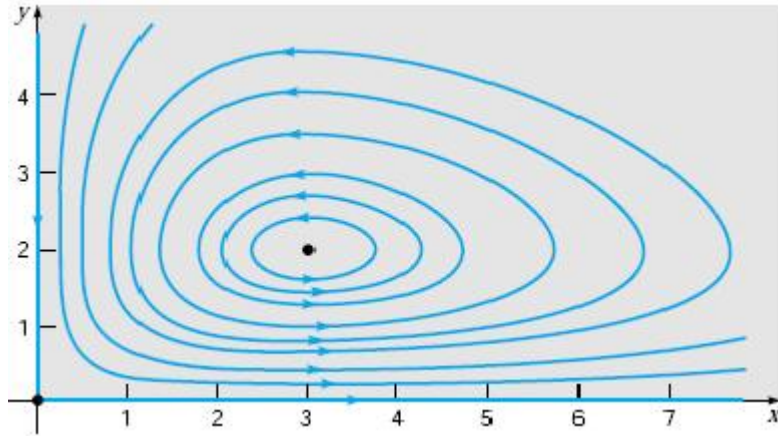
da cui ne consegue che

$$0.75 \ln x + \ln y - 0.75y - 0.25x = C,$$

dove  $C$  è una costante di integrazione. Anche se si utilizzano le funzioni elementari non è possibile risolvere questa equazione in modo esplicito per entrambe le variabili, ma è possibile dimostrare che il grafico di questa equazione, per un valore fisso di  $C$ , sarà una curva chiusa che circonda il punto critico  $(3, 2)$ . Quindi, il punto critico, è un centro anche per il sistema non lineare.

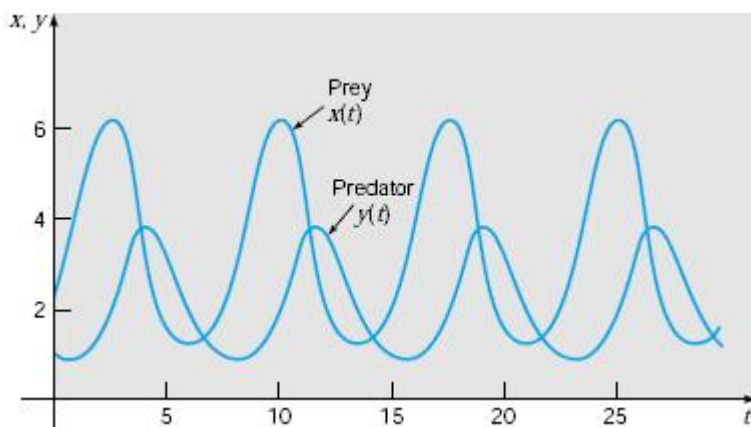
La seguente figura mostra un ritratto di fase del sistema non lineare:

Figura 2.5: Un ritratto di fase del sistema non lineare.



Per alcune condizioni iniziali la traiettoria rappresenta piccole variazioni in  $x$  e  $y$  per il punto critico, ed è di forma pressoché ellittica, come suggerisce l'analisi lineare. Per le altre condizioni iniziali le oscillazioni in  $x$  e  $y$  sono più pronunciate, e la forma della traiettoria è significativamente diversa da un'ellisse. Osserviamo anche che le traiettorie sono percorse in senso antiorario. La dipendenza di  $x$  e  $y$  su  $t$  per un insieme di condizioni iniziale la possiamo vedere nella seguente figura:

Figura 2.6: Variazioni della popolazione di preda e predatore nel tempo.



Si noti che  $x$  e  $y$  sono funzioni periodiche di  $t$ , in quando devono essere curve poiché le traiettorie sono curve chiuse, si noti anche che l'oscillazione della popolazione del predatore è in ritardo rispetto alla preda.

A partire da uno stato in cui entrambe le due popolazioni sono relativamente piccole, la popolazione della preda è in aumento poiché c'è poca predazione. Data la crescita della popolazione della preda, si verifica quindi un aumento di cibo per il predatore, e quindi vi sarà una crescita della popolazione del predatore. Questo provocherà pesanti predazioni e quindi la popolazione della preda tenderà a diminuire. Infine, con una diminuzione delle prede, e quindi con una diminuzione dell'approvvigionamento alimentare per il predatore, diminuirà anche la popolazione del predatore, e il sistema tornerà allo stato originale.

## Capitolo 3

# La teoria intra-organizzativa di adattamento

In questo terzo capitolo introduciamo la teoria che è alla base del nostro modello economico, costruiremo il sistema dinamico associato tramite la composizione delle varie equazioni che lo formano, che verrà, nel capitolo successivo, analizzato in dettaglio.

### 3.1 Il modello di ecologia intra-organizzativa

La teoria ecologica intra-organizzativa di adattamento (modello IOE) proposta da Robert Burgelman (1991,1994) è una sintesi del dibattito sull'adattamento versus selezione del cambiamento organizzativo; viene quindi proposta la visione di un'azienda come un'ecologia di due tipi di iniziative strategiche:

- le iniziative indotte, le quali cadono all'interno del raggio della strategia aziendale e sono indotte da quest'ultima,
- le iniziative autonome, che cadono al di fuori del raggio della strategia aziendale.

Viene attuato un rinnovo strategico che si fonda sulla competizione interna di queste iniziative strategiche, dove le seconde ottengono risorse aziendali che porteranno l'azienda all'interno di nuovi mercati.

In questo cambiamento organizzativo, secondo il modello IOE, l'azienda, ma soprattutto alcuni settori interni, vengono caratterizzati da forze adattive e inerziali le quali pongono una resistenza al cambiamento. Questo, insieme alle pressioni "bottom-up", determina la buona riuscita o meno del processo di rinnovo.

Se da un lato il modello IOE descrive la struttura di processi strategici indotti e autonomi, dall'altro lato non precisa l'interazione longitudinale tra l'intervento del top management e le caratteristiche strutturali organizzative proprie dell'azienda.

La difficoltà di adattamento è dovuta all'apprendimento acquisito, in particolar modo dalle tecnologie e dalle conoscenze dei clienti e del mercato della sua attività centrale, che spesso bloccano la sperimentazione di nuove soluzioni operative e gestionali. Secondo questa nuova visione, il cambiamento organizzativo deve essere considerato come il cambiamento di un'intera popolazione di imprese, con forma strutturale uguale, che verrà sostituita da una nuova popolazione, sempre di imprese, che si adattano meglio al nuovo ambiente.

Questo punto di vista è in forte contrasto con quello della prospettiva tradizionale strategica, ma queste due teorie non sono del tutto contrastanti, infatti, entrambe, definiscono un tipo di forza che influenza il cambiamento organizzativo, ovvero una forza di adattamento di un'azienda e una forza di inerzia contrastante il cambiamento.

L'obiettivo della teoria IOE è di descrivere come grandi aziende affermate affrontano queste forze, per fare questo viene messo in pratica un approccio che si basa su varie teorie ecologiche. Il punto centrale dell'analisi dell'IOE è l'ecologia delle iniziative strategiche (indotte e autonome) interne all'orga-



nizzazione di un'azienda individuale e la loro interazione. Basandosi su ciò, la teoria dell'IOE indica che il cambiamento viene visto come l'interazione tra il processo strategico indotto e il processo strategico autonomo.

Il primo è formato da tutte quelle iniziative che cadono entro lo scopo dell'attuale strategia aziendale ed è causa dello sviluppo dell'inerzia organizzativa che elimina la capacità dell'azienda di sperimentare, mentre, il secondo è contraddistinto, invece, da quelle iniziative che cadono fuori dallo scopo della strategia aziendale e contribuisce ad aumentare la variazione a livello aziendale.

Quest'ultime iniziative, in opposizione alle prime, spingono l'azienda verso un processo di rinnovamento e allo sviluppo di nuove competenze, contribuendo a mantenerla adattabile a livello aziendale in caso di pressione selettiva esterna.

La particolarità di questa teoria è di rappresentare il rinnovamento strategico delle imprese come un processo che unisce forze di diversa natura: il determinismo ambientale, le pressioni ascendenti e il volontarismo dei dirigenti. Una parte essenziale è affidata ai dirigenti, che possono permettere o proibire le acquisizioni regolando il tasso di accumulazione delle operazioni nella nuova attività. Non è chiaro come gli alti dirigenti riescano a mantenere questo equilibrio, ma è chiaro, nel modello, come il processo indotto serva da catalizzatore per sfruttare opportunità conseguenti alla nuova direzione strategica, mentre il processo autonomo approfondisce nuove strade di crescita.

## **3.2 Costruzione del modello**

Per costruire un modello generale di simulazione verranno presentate le fasi necessarie, portati avanti dal professor Mollona, che sono basate sugli studi di Burgelman, questo sarà essenziale per esaminare i meccanismi che permettono alle aziende di poter realizzare, con una buona riuscita, un processo di

rinnovamento strategico. Questo modello esamina una grande azienda che investe grandi porzioni di risorse nel suo processo strategico indotto, e solo una piccola porzione di queste per la sperimentazione di una nuova attività. Incentrando l'attenzione sull'approvvigionamento e sul flusso di risorse deboli, per ottenere il modello, sono stati seguiti tre passi:

- il primo passo è stato esaminare lo studio di Burgelman per individuare i costrutti e le relazioni che vengono utilizzati, con l'aggiunta di ulteriori costrutti mancanti ma considerati importanti per lo studio;
- il secondo passo è stato realizzare un sistema di equazioni differenziali che ha formalizzato il modello teorico e sono state esaminate le relazioni tra la struttura di questo e i risultati ottenuti dagli esperimenti;
- il terzo ed ultimo passo si concentra sul controllo e il modellamento delle caratteristiche dell'azienda che ci aiutano a comprendere il risultato del successo del rinnovamento strategico.

Stabilite, così, le variabili del modello, sono stati calcolati i valori di equilibrio da assegnare alle riserve di risorse inutilizzate, scoprendo che il rinnovamento non è dato dalla scarsità di queste ma da una cattiva gestione dei flussi di risorse da parte degli alti dirigenti. Opponendo la separazione tra variabili di flusso e variabili di riserva, si sono dimostrati efficaci, per i processi di tempo continuo, i modelli di Dinamica dei Sistemi.

### 3.3 Equazioni del modello

Il modello prende equazioni che regolano il comportamento di un numero di variabili di stato rappresentate da equazioni differenziali. Queste equazioni, che vedremo tra poco in dettaglio, si dividono in dinamiche di accumulazione ed esaurimento di attività nelle operazioni centrali, nelle nuove produzioni e nelle risorse statiche.

### 3.3.1 Attività centrali

Durante il processo strategico indotto si forma lo schema di allocazione delle risorse di un'azienda nell'attività principale. In questo modello i meccanismi di allocazione sono guidati da regole finanziarie secondo cui tutte le risorse disponibili vengono investite in iniziative strategiche che portano i profitti più alti sugli investimenti. La quantità di fondi allocati con criteri finanziari viene indicata con la variabile  $a_f$  e può assumere un insieme di valori compresi tra 1 e 0, dove il valore 1 indica un impegno completo delle risorse nell'attività centrale dell'azienda, mentre il valore 0 indica un impegno completo di queste nella nuova attività.

$$a_f \begin{cases} 1 & \text{se } \pi_c > \pi_n \\ 0 & \text{se } \pi_c < \pi_n \\ 0.5 & \text{se } \pi_c = \pi_n \end{cases}$$

dove  $\pi_c$  e  $\pi_n$  sono rispettivamente il profitto di attività nella produzione principale e il profitto di attività in quella nuova.

La variazione dello schema di allocazione delle risorse (che viene indicato con  $A$ ) causata dall'influenza graduale della pressione sull'allocazione delle risorse ( $a_f$ ) viene descritta come una media ponderata tra  $A$  e  $a_f$ , dove avremo un fattore ponderante  $\tau_a$  che indica a quale livello lo schema di allocazione delle risorse viene impostato dalle informazioni in entrata.

$$dA/dt = \frac{a_f - A}{\tau_a}$$

Per costruire l'equazione riguardante le attività del processo centrale, indicato da  $C$ , sono stati utilizzati il tasso di investimento,  $c_i$ , e il tasso di deprezzamento,  $c_d$ :

$$dC/dt = c_i - c_d$$

a loro volta, il tasso di deprezzamento delle attività nel processo principale cattura l'obsolescenza delle attività intellettuali e materiali, ed è data da

$$c_d = C\eta$$

dove  $\eta$  è una costante fissa; il tasso di investimento è dato dal livello di fondi disponibili per gli investimenti  $e_{corp}$  (chiamati anche utili aziendali), risultanti dopo l'investimento di una certa percentuale,  $\psi$ , nell'accumulo delle riserve inutilizzate, e dal modello di allocazione delle risorse; quindi possiamo dire che:

$$c_i = Ae_{corp}(1 - \psi)$$

Dunque, gli utili aziendali sono costituiti da

$$e_{corp} = (e_c + e_n)(1 - \varsigma)$$

dove  $e_n$  indica gli utili della nuova attività,  $\varsigma$  indica i costi delle spese generali e i dividendi, e  $e_c$  indica gli utili dell'attività principale, quest'ultimi sono dati a loro volta da

$$e_c = C\pi_c - \rho_c$$

dove  $\rho_c$  sono i costi operativi fissi dell'attività e  $\pi_c$  rappresenta la media della redditività dell'industria nell'attività principale.

Quindi ora possiamo ridefinire l'equazione che caratterizza la variazione delle attività del processo centrale con

$$dC/dt = A\{[(C\pi_c - \rho_c) + (N\pi_n - \rho_n)](1 - \varsigma)\}(1 - \psi) - (C\eta)$$

dove vedremo che  $N$  e  $\rho_n$  sono rispettivamente tasso di accumulazione delle attività nella nuova iniziativa e i costi operativi fissi di questa.

### 3.3.2 Attività non centrali

Per realizzare questa equazione in realtà si segue lo stesso procedimento utilizzato per la precedente, considerando che l'accumulo di risorse della nuova iniziativa avviene durante il processo strategico autonomo. Si parte con il calcolo del tasso netto dell'accumulazione delle attività, che viene indicato con  $N$  ed è dato da:

$$dN/dt = n_i - n_d$$

dove  $n_i$  e  $n_d$  indicano rispettivamente il tasso d'investimento e il tasso di deprezzamento nella nuova attività.

Il tasso d'investimento,  $n_i$ , è stato considerato secondo l'equazione:

$$n_i = (1 - A)e_{corp}(1 - \psi) + S\epsilon$$

La quantità  $(1 - A)$  indica la quota delle risorse finanziarie dell'azienda che il sistema ufficiale di allocazione delle risorse distribuisce alle nuove iniziative strategiche e, basandosi sulla teoria IOE, ci si aspetta che sia una quantità irrilevante finché non verranno prodotti risultati operativi apprezzabili dalla nuova attività.

I fattori  $\epsilon$  e  $S$  indicano la proporzione ( $\epsilon$ ) di risorse inutilizzate accumulate, ( $S$ ), dedicate in generale alla sperimentazione che vengono messe a disposizione delle nuove attività e fanno da motore per il cambiamento e l'adattamento organizzativo.

Il tasso di deprezzamento,  $n_d$ , è dato da:

$$n_d = N\eta$$

Abbiamo che gli utili sono stati ottenuti così:

$$e_n = N\pi_n - \rho_n$$

Si presume, però, che i costi della nuova attività diminuiscono con la realizzazione di nuove iniziative, quindi è più opportuno riscrivere l'equazione in questo modo:

$$e_n = N\pi_n - \rho_n f_\lambda$$

dove  $f_\lambda = \left(\frac{N}{N_0}\right)^\lambda$  che descrive la diminuzione dei costi come un rapporto tra attività cumulate ( $N$ ) e attività iniziali ( $N_0$ ); questo fa sì che l'equazione sopra descritta non abbia mai valore negativo in quanto se le attività iniziali sono zero, l'effetto di apprendimento sarà zero.

Riscriviamo quindi l'equazione del tasso netto di accumulazione delle attività in questo modo:

$$\frac{dN}{dt} = \left\{ (1-A) \left\{ \left[ (C\pi_c - \rho_c) + \left( N\pi_n - \rho_n \left( \frac{N}{N_0} \right)^\lambda \right) \right] (1-\varsigma) \right\} (1-\psi) + (S\epsilon) \right\} - (N\eta)$$

### 3.3.3 Risorse inutilizzate

Nel modello vengono considerate inutilizzate le riserve di risorse liquide,  $S$ , visibili e utilizzabili dai dirigenti per investimenti nelle attività emergenti e che sono accumulate in diverse aree di un'organizzazione. E' stato presunto un rapporto proporzionale positivo tra l'accumulo delle risorse inutilizzate e i rendimenti aziendali. Dunque il tasso netto di accumulazione delle risorse inutilizzate è descritto attraverso due componenti nel seguente modo:

$$dS/dt = s_i - s_d$$

dove abbiamo che il tasso di accumulazione  $s_i$  è una proporzione di utili aziendali dati da questa equazione:

$$s_i = \psi e_{corp}$$

con  $\psi$  che rappresenta il tasso di proporzione, mentre il tasso di diminuzione è dato dalla seguente equazione:

$$s_d = \begin{cases} (S\epsilon) & se \quad e_{corp} > 0 \\ (S\epsilon - e_{corp}) & se \quad e_{corp} < 0 \end{cases}$$

Le risorse inutilizzate vengono considerate il punto di partenza per la sperimentazione nella nuova attività e riserva in caso di perdite interne o avversità in generale. Quindi l'equazione che descrive il tasso netto di accumulazione delle risorse inutilizzate è:

$$dS/dt = \{\psi \{[(C\pi_c - \rho_c) + (N\pi_n - \rho_n)](1 - \varsigma)\}\} - (S\epsilon)$$

### 3.4 Conclusione del modello finale

In questo capitolo, con l'ausilio di opportuni esperimenti, è stato spiegato come, per una strategia di rinnovamento di successo, è necessario che la disponibilità di risorse inutilizzate, i sistemi ufficiali di allocazione delle risorse orientati finanziariamente e l'intervento dell'alta dirigenza, interagiscano.

La disponibilità di risorse inutilizzate si è rivelata una condizione necessaria per il successo, dato che assorbono le perdite derivanti dalla sperimentazione nelle nuove attività. In particolare, si è evidenziata fondamentale una politica che metta in correlazione un modello longitudinale di flusso di risorse con il tasso di deterioramento delle prestazioni dell'attività centrale, impedendo così sia ritardi che accelerazioni nel tasso d'investimento.

Si osservi che, una spinta troppo prematura di accumulazione di attività nella nuova iniziativa risulta una dispersione di risorse aziendali, ma d'altra parte, un eccessivo ritardo nell'allocazione delle risorse porta a un consumo rapido di queste necessario per coprire le perdite. Questo ritardo risulta

ancora più pericoloso quando la nuova attività viene caratterizzata dal vantaggio di chi si muove per primo, perché le attività non si possono accumulare istantaneamente, o perché la nuova attività non può condividere attività con la vecchia strategia centrale.

Per questo è essenziale l'intervento dell'alta dirigenza, dotata di sufficiente potere, incentivi adeguati e informazioni adatte nel cogliere le interconnessioni tra i processi di accumulazione di risorse e condurre l'evoluzione e lo sviluppo della nuova attività.

E' stato dimostrato, attraverso uno degli esperimenti, come questo intervento possa non essere una condizione sufficiente per il successo della nuova attività, ma diventa, quindi, fondamentale il ruolo intrapreso dai meccanismi ufficiali di allocazione di risorse orientati dai criteri finanziari, che velocizzano la trasferibilità delle risorse dalla vecchia alla nuova attività, e adeguando le pressioni selettive interne e quelle esterne, per permettere alla nuova impresa di avviarsi.



# Capitolo 4

## Descrizione e significato del modello economico

In questo capitolo analizzeremo in dettaglio il nostro modello economico attraverso il sistema dinamico associato presentato nel capitolo precedente, ricercando i punti critici del sistema; stabiliremo quindi il tipo di punto critico e la sua stabilità nei diversi casi, applicando la regola dei segni di Cartesio, e daremo un significato economico ai risultati.

### 4.1 La ricerca dei punti critici del modello

Ricordiamo che il nostro modello è composto dalle equazioni che abbiamo costruito nel capitolo precedente, quindi sarà un sistema di questo tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dt} = \frac{a_f - A}{\tau_a} \\ \frac{dC}{dt} = A \{ [(C\pi_c - \rho_c) + (N\pi_n - \rho_n)] (1 - \varsigma) \} (1 - \psi) - (C\eta) \\ \frac{dN}{dt} = \left\{ (1 - A) \left\{ \left[ (C\pi_c - \rho_c) + \left( N\pi_n - \rho_n \left( \frac{N}{N_0} \right)^\lambda \right) \right] (1 - \varsigma) \right\} (1 - \psi) + (S\epsilon) \right\} - (N\eta) \right. \\ \left. \frac{dS}{dt} = \{ \psi \{ [(C\pi_c - \rho_c) + (N\pi_n - \rho_n)] (1 - \varsigma) \} \} - (S\epsilon) \right. \end{array} \right.$$

ponendo le equazioni del sistema uguale a zero, risolveremo il sistema, quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dt} = 0 \\ \frac{dC}{dt} = 0 \\ \frac{dN}{dt} = 0 \\ \frac{dS}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

dove:

- $C$  = attivo nelle attività principali
- $S$  = riserva di risorse inutilizzate
- $N$  = tasso di accumulazione di attività nella nuova iniziativa
- $A$  = schema di allocazione di risorse di un'azienda
- $\pi_c$  = profitto attività nell'attività principale
- $\pi_n$  = profitto attività in una nuova attività
- $c_i$  = tasso di investimento
- $c_d$  = tasso di deprezzamento
- $e_{corp}$  = utili dell'azienda
- $e_{corp}$  = utili dell'azienda
- $\psi$  = percentuale di risorse tolta per accumulare riserve inutilizzate
- $\rho_c$  = costi operativi fissi dell'attività centrale
- $\rho_n$  = costi operativi fissi della nuova attività
- $n_i$  = tasso di investimento nella nuova attività

- $n_d$  = tasso di deprezzamento della nuova attività
- $(1 - A)$  = quota delle risorse finanziare a nuove iniziative strategiche
- $e_c$  = utili dell'attività centrale
- $e_n$  = utili della nuova attività
- $s_i$  = tasso di accumulazione di utili aziendali
- $s_d$  = tasso di diminuzione di utili aziendali
- $\varsigma$  = costi delle spese generali e dividendi
- $\eta$  = velocità di erosione nelle attività centrali e non centrali
- $\epsilon$  = tasso di accumulazione di risorse lente
- $\tau_a$  = ritardo di adattamento del modello di allocazione

Prima però di andare ad analizzare i punti critici, dobbiamo fare alcune ipotesi:

- Abbiamo presunto che al momento iniziale la capacità di generare profitti della nuova attività non fosse evidente. Quindi, la regola di allocazione delle risorse non distribuisce capitali a questa attività che viene finanziata unicamente dalle risorse inutilizzate. Viene, quindi, dato ad  $A$  il valore 1;
- In caso di equilibrio avremo che  $\pi_c > \pi_n$  e che quindi  $a_f = 1$ ;
- Dai primi due punti ricaviamo che  $\frac{dA}{dt} = 0$  e che quindi non verrà considerata;
- Siamo in una situazione di equilibrio dove  $N = N_0$ , di conseguenza  $f_\lambda = 1$ ;

- Essendo  $e_{corp} > 0$  avremo che  $s_d = S\epsilon$ ;
- Infine possiamo dire che al tempo  $t_0$  abbiamo che  $\rho_c = \rho_n = \rho$ .

Da queste ipotesi il nostro sistema si ridurrà in:

$$\begin{cases} \{[C\pi_c + N\pi_n - \rho](1 - \varsigma)\}(1 - \psi) - (C\eta) = 0 \\ (S\epsilon) - (N\eta) = 0 \\ \{\psi\{[C\pi_c + N\pi_n - \rho](1 - \varsigma)\}\} - (S\epsilon) = 0 \end{cases}$$

facendo gli opportuni raccoglimenti avremo:

$$\begin{cases} -C\eta + (1 - \varsigma)(1 - \psi)(-\rho + C\pi_c + N\pi_n) = 0 \\ (S\epsilon) - (N\eta) = 0 \\ -(S\epsilon) + (1 - \varsigma)\psi(-\rho + C\pi_c + N\pi_n) = 0 \end{cases} .$$

Risolvendo vedremo che il sistema ammette solo il seguente punto di equilibrio:

$$P(S, C, N) = \left( \frac{\eta(-\rho\psi + \varsigma\rho\psi)}{\epsilon(\eta - \pi_c + \varsigma\pi_c + \psi\pi_c - \varsigma\psi\pi_c - \psi\pi_n + \varsigma\psi\pi_n)}, \right. \\ \left. - \frac{-\rho + \varsigma\rho + \rho\psi - \varsigma\rho\psi}{-\eta + \pi_c - \varsigma\pi_c - \psi\pi_c + \varsigma\psi\pi_c + \psi\pi_n - \varsigma\psi\pi_n}, \right. \\ \left. - \frac{-\rho\psi + \varsigma\rho\psi}{-\eta + \pi_c - \varsigma\pi_c - \psi\pi_c + \varsigma\psi\pi_c + \psi\pi_n - \varsigma\psi\pi_n} \right)$$

Per capire cosa succede vicino a questo punto critico, dobbiamo linearizzare il sistema costruendo la matrice di Jacobi, che come sappiamo già dallo studio dei precedenti capitoli, è formata dalle derivate parziali delle tre funzioni rispetto a  $C$ ,  $N$ ,  $S$ , quindi la matrice che otteniamo è la seguente:

$$J = \begin{pmatrix} -\eta + (1 - \varsigma)(1 - \psi)\pi_c & (1 - \varsigma)(1 - \psi)\pi_n & 0 \\ 0 & -\eta & \epsilon \\ (1 - \varsigma)\psi\pi_c & (1 - \varsigma)\psi\pi_n & -\epsilon \end{pmatrix}$$

Come possiamo vedere la matrice è una matrice costante. Per studiare la stabilità di questo punto, bisogna calcolare gli autovalori della matrice Jacobiana nel punto critico trovato, perché, come abbiamo detto nei precedenti capitoli, il segno degli autovalori determina le caratteristiche e la stabilità dei punti critici.

Abbiamo ottenuto quindi i seguenti autovalori:

$$r_1 = -\eta$$

$$r_2 = \frac{1}{2}(-\epsilon - \eta + \pi_c - \varsigma\pi_c - \psi\pi_c + \varsigma\psi\pi_c + \\ -\sqrt{((\epsilon + \eta - \pi_c + \varsigma\pi_c + \psi\pi_c - \varsigma\psi\pi_c)^2 - 4(\epsilon\eta - \epsilon\pi_c + \epsilon\varsigma\pi_c + \epsilon\psi\pi_c - \epsilon\varsigma\psi\pi_c - \epsilon\psi\pi_n + \epsilon\varsigma\psi\pi_n))})$$

$$r_3 = \frac{1}{2}(-\epsilon - \eta + \pi_c - \varsigma\pi_c - \psi\pi_c + \varsigma\psi\pi_c + \\ +\sqrt{((\epsilon + \eta - \pi_c + \varsigma\pi_c + \psi\pi_c - \varsigma\psi\pi_c)^2 - 4(\epsilon\eta - \epsilon\pi_c + \epsilon\varsigma\pi_c + \epsilon\psi\pi_c - \epsilon\varsigma\psi\pi_c - \epsilon\psi\pi_n + \epsilon\varsigma\psi\pi_n))})$$

Ora calcoliamo i corrispondenti autovettori:

- rispetto a  $r_1$  abbiamo trovato l'autovettore:

$$\xi^{(1)} = \left(\frac{-\pi_n}{\pi_c}, 1, 0\right)$$

- rispetto a  $r_2$  l'autovettore è:

$$\xi^{(2)} = \left(-\frac{1}{(1-\varsigma)\psi\pi_c}(-\epsilon - \frac{1}{2}(-\epsilon - \eta + \pi_c - \varsigma\pi_c - \psi\pi_c + \varsigma\psi\pi_c + \\ -\sqrt{((\epsilon + \eta - \pi_c + \varsigma\pi_c + \psi\pi_c - \varsigma\psi\pi_c)^2 - 4(\epsilon\eta - \epsilon\pi_c + \epsilon\varsigma\pi_c + \epsilon\psi\pi_c - \epsilon\varsigma\psi\pi_c - \epsilon\psi\pi_n + \epsilon\varsigma\psi\pi_n))}) + \right. \\ \left. + (\epsilon\pi_n)/(\pi_c(-\eta - \frac{1}{2}(-\epsilon - \eta + \pi_c - \varsigma\pi_c - \psi\pi_c + \varsigma\psi\pi_c + \right. \\ \left. -\sqrt{((\epsilon + \eta - \pi_c + \varsigma\pi_c + \psi\pi_c - \varsigma\psi\pi_c)^2 - 4(\epsilon\eta - \epsilon\pi_c + \epsilon\varsigma\pi_c + \epsilon\psi\pi_c - \epsilon\varsigma\psi\pi_c - \epsilon\psi\pi_n + \epsilon\varsigma\psi\pi_n))})), \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\epsilon / \left( -\eta - \frac{1}{2} \left( -\epsilon - \eta + \pi_c - \varsigma \pi_c - \psi \pi_c + \varsigma \psi \pi_c + \right. \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{((\epsilon + \eta - \pi_c + \varsigma \pi_c + \psi \pi_c - \varsigma \psi \pi_c)^2 - 4(\epsilon \eta - \epsilon \pi_c + \epsilon \varsigma \pi_c + \epsilon \psi \pi_c - \epsilon \varsigma \psi \pi_c - \epsilon \psi \pi_n + \epsilon \varsigma \psi \pi_n))} \right) \right),
\end{aligned}$$

1)

- rispetto a  $r_3$  avremo il seguente autovettore:

$$\begin{aligned}
\xi^{(3)} = & \left( -\frac{1}{(1 - \varsigma) \psi \pi_c} \left( -\epsilon - \frac{1}{2} \left( -\epsilon - \eta + \pi_c - \varsigma \pi_c - \psi \pi_c + \varsigma \psi \pi_c + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{((\epsilon + \eta - \pi_c + \varsigma \pi_c + \psi \pi_c - \varsigma \psi \pi_c)^2 - 4(\epsilon \eta - \epsilon \pi_c + \epsilon \varsigma \pi_c + \epsilon \psi \pi_c - \epsilon \varsigma \psi \pi_c - \epsilon \psi \pi_n + \epsilon \varsigma \psi \pi_n))} \right) \right) + \\
& \left. + (\epsilon \pi_n) / \left( \pi_c \left( -\eta - \frac{1}{2} \left( -\epsilon - \eta + \pi_c - \varsigma \pi_c - \psi \pi_c + \varsigma \psi \pi_c + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{((\epsilon + \eta - \pi_c + \varsigma \pi_c + \psi \pi_c - \varsigma \psi \pi_c)^2 - 4(\epsilon \eta - \epsilon \pi_c + \epsilon \varsigma \pi_c + \epsilon \psi \pi_c - \epsilon \varsigma \psi \pi_c - \epsilon \psi \pi_n + \epsilon \varsigma \psi \pi_n))} \right) \right), \\
& \left. -\epsilon / \left( -\eta - \frac{1}{2} \left( -\epsilon - \eta + \pi_c - \varsigma \pi_c - \psi \pi_c + \varsigma \psi \pi_c + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{((\epsilon + \eta - \pi_c + \varsigma \pi_c + \psi \pi_c - \varsigma \psi \pi_c)^2 - 4(\epsilon \eta - \epsilon \pi_c + \epsilon \varsigma \pi_c + \epsilon \psi \pi_c - \epsilon \varsigma \psi \pi_c - \epsilon \psi \pi_n + \epsilon \varsigma \psi \pi_n))} \right) \right),
\end{aligned}$$

1)

Dove:

1.  $\pi_c, \pi_n \in [-1, 1]$ ,
2.  $\rho > 0$ ,
3.  $\psi, \eta, \varsigma, \epsilon \in [0, 1]$ .

Possiamo subito dire che, essendo  $\eta$  sempre maggiore di zero, il primo autovalore sarà sempre negativo, e quindi darà sempre *stabilità* nella direzione del primo autovettore. Quindi ora analizzeremo in dettaglio gli altri due.

E' facile notare che, con degli opportuni raggruppamenti, ci troveremo di fronte ad un'espressione di questo tipo:

$$r_2 = \frac{1}{2}(-A - \sqrt{A^2 - 4B})$$

$$r_3 = \frac{1}{2}(-A + \sqrt{A^2 - 4B})$$

dove avremo che:

$$A = \epsilon + \eta - \pi_c + \varsigma\pi_c + \psi\pi_c - \varsigma\psi\pi_c = (\epsilon + \eta) - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi)$$

e

$$B = \epsilon\eta - \epsilon\pi_c + \epsilon\varsigma\pi_c + \epsilon\psi\pi_c - \epsilon\varsigma\psi\pi_c - \epsilon\psi\pi_n + \epsilon\varsigma\psi\pi_n = \\ \epsilon(\eta - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) - \psi\pi_n(1 - \varsigma))$$

ricordando che:

- $(\epsilon + \eta) > 0$ , dato che è una somma di due quantità positive;

- $(1 - \varsigma) > 0$ ,  $(1 - \psi) > 0$ , sapendo che  $\varsigma$  e  $\psi$  sono due quantità sempre minori di 1.

A questo punto possiamo già dire che se  $r_3 < 0$  allora anche  $r_2 < 0$  e se  $r_2 > 0$  allora anche  $r_3 > 0$ .

Procediamo ora con l'analisi dei segni degli autovalori:  $r_1$  sappiamo, come precedentemente detto, che è sempre negativo, quindi invece che studiare l'equazione di terzo grado del polinomio caratteristico, andremo ad analizzare l'equazione di secondo grado, calcolata nel seguente modo:

$$(r - r_2)(r - r_3)$$

da cui risulterà:

$$r^2 - r(-\epsilon - \eta + \pi_c - \varsigma\pi_c - \psi\pi_c + \varsigma\psi\pi_c) + \epsilon(\eta - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) - \psi\pi_n(1 - \varsigma)) = 0$$

o più semplicemente:

$$r^2 - r(-A) + B = 0.$$

Abbiamo così ottenuto un'equazione di secondo grado, del tipo  $ar^2 + br + c = 0$ , dove nel nostro caso avremo che:

- $a = 1$ ,
- $b = A$ ,
- $c = B$ .

Ricordiamo che, attraverso il calcolo del discriminante che viene generalmente indicato con la lettera greca  $\Delta$  (delta), possiamo determinare il tipo di soluzione nei diversi tre casi:

1. se  $\Delta > 0$ , quindi con i nostri valori avremo che  $A^2 - 4B > 0$ , otteniamo due soluzioni distinte:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$$



2. se  $\Delta = 0$ , quindi per noi sarà che  $A^2 - 4B = 0$ , si avranno due soluzioni coincidenti:

$$r_{1,2} = \frac{-b}{2a} = \frac{-A}{2}$$

3. se  $\Delta < 0$ , si ha che  $A^2 - 4B < 0$ , e le soluzioni non saranno reali, ma saranno due soluzioni complesse coniugate:

$$r_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm i \left( \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \right) = \frac{-A}{2} \pm i \left( \frac{\sqrt{4B - A^2}}{2} \right)$$

dove  $i$  è la parte immaginaria.

Enunciamo ora la *regola dei segni di Cartesio*:

*Sia dato un polinomio  $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ , con coefficienti  $a_n, \dots, a_0$  reali e tutti non nulli, avente  $n$  radici, la regola di Cartesio stabilisce che il numero di radici positive (contato con molteplicità) è dato dal numero di cambi di segno fra due coefficienti consecutivi; segue che il numero di radici negative sarà dato dal numero di permanenze di segno di due coefficienti consecutivi.*

Con l'aiuto quindi di questa regola andiamo a studiare il segno delle soluzioni della nostra equazione quadratica  $r^2 - r(-A) + B = 0$ .

Abbiamo detto che  $a = 1$  pertanto sarà sempre maggiore di zero, quindi in questo caso abbiamo 4 possibili combinazioni di soluzioni:

1.  $a, b, c > 0$ , quindi dobbiamo considerare nel nostro caso  $A, B > 0$ ; avremo dunque due permanenze alle quali corrispondono due soluzioni negative;
2.  $a, b > 0$  e  $c < 0$ , nel nostro caso avremo  $A > 0$  mentre  $B < 0$ ; otteniamo così una permanenza e una variazione, quindi due soluzioni discordi;
3.  $a > 0$  e  $b, c < 0$ , dunque per noi sarà  $A, B < 0$ ; in questo caso abbiamo una variazione e una permanenza, quindi ancora due soluzioni discordi;

4.  $a, c > 0$  e  $b < 0$ , quindi ora avremo che  $A < 0$  e  $B > 0$ ; di conseguenza avremo due variazioni e quindi due soluzioni negative.

Quindi ora abbiamo le conoscenze per andare a studiare la stabilità o instabilità nei vari casi.

Sapendo che  $r_1$  è sempre negativo e che quindi darà sempre stabilità nella direzione del primo autovettore, esamineremo il segno soltanto per  $r_2$  e  $r_3$ , ricordando che per noi  $a = 1$ .

Quando  $\Delta > 0$ , quindi  $A^2 - 4B > 0$ , abbiamo dunque due soluzioni reali distinte.

- se

$$A = (\epsilon + \eta) - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) > 0$$

e

$$B = \epsilon(\eta - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) - \psi\pi_n(1 - \varsigma)) > 0$$

i due autovalori sono negativi, quindi avremo *stabilità* nella direzione del secondo e terzo autovettore, ed essendo  $r_1, r_2, r_3 < 0$  possiamo dire che il sistema sarà *asintoticamente stabile* e che il punto critico  $P$  sarà un *nodo*.

- se

$$A = (\epsilon + \eta) - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) > 0$$

e

$$B = \epsilon(\eta - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) - \psi\pi_n(1 - \varsigma)) < 0$$

oppure

$$A = (\epsilon + \eta) - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) < 0$$

e

$$B = \epsilon(\eta - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) - \psi\pi_n(1 - \varsigma)) < 0$$

i due autovalori saranno di segno opposto, quindi avremo *stabilità* nella direzione dell'autovettore corrispondente all'autovalore di segno negativo e *instabilità* nella direzione dell'autovalore corrispondente all'autovalore di segno positivo. Possiamo dire inoltre che se soltanto uno degli autovalori della matrice è positivo il sistema sarà *instabile*.

- se

$$A = (\epsilon + \eta) - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) < 0$$

e

$$B = \epsilon(\eta - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) - \psi\pi_n(1 - \varsigma)) > 0$$

avremo che i due autovalori sono entrambi positivi e quindi avremo *instabilità* nella direzione del secondo e del terzo autovettore, quindi sempre per il fatto che basta un solo autovalore positivo (in questo caso ne abbiamo due) il sistema sarà di conseguenza *instabile*.

Quando  $\Delta = 0$ , e quindi  $A^2 - 4B = 0$ , ci sono due soluzioni reali coincidenti che corrispondono ad un solo autovettore indipendente.

- se

$$A = (\epsilon + \eta) - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) > 0$$

i due autovalori sono negativi, quindi abbiamo *stabilità* nella direzione dell'autovettore indipendente e nella direzione dell'autovettore associato a quello ripetuto. È dato che  $r_1, r_2, r_3 < 0$  possiamo dire che il sistema sarà *asintoticamente stabile*, e che il punto critico  $P$  sarà un *nodo improprio* o *nodo degenero*.

- se

$$A = (\epsilon + \eta) - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) < 0$$

i due autovalori sono positivi, quindi abbiamo *instabilità* in direzione

dell'autovettore indipendente e nella direzione dell'autovettore associato, e possiamo quindi dire anche che il sistema sarà *instabile*.

Se  $\Delta < 0$ , quindi  $A^2 - 4B < 0$ , abbiamo due soluzioni complesse coniugate della forma  $\lambda \pm i\mu$ . In riferimento ai capitoli precedenti ricordiamo che la stabilità o instabilità in questo caso è determinata dal segno di  $\lambda$ , nel nostro caso  $\lambda = \frac{-A}{2}$ .

- se

$$A = (\epsilon + \eta) - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) > 0$$

allora avremo che  $\lambda < 0$ ; avremo quindi che il sistema è *asintoticamente stabile* e possiamo dire che il punto  $P$  è un punto *spirale*.

- se

$$A = (\epsilon + \eta) - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) < 0$$

abbiamo che  $\lambda > 0$  e quindi il sistema sarà *instabile*.

## 4.2 Significato economico

Partendo dalle equazioni del punto critico  $P$ , andremo ad analizzare per prima cosa le condizioni in cui il sistema, che rappresenta il modello economico è in equilibrio, e successivamente studieremo le condizioni in cui questo sistema è stabile.

### 4.2.1 Condizioni di equilibrio

Prendendo le equazioni che rappresentano il punto  $P$ , ovvero:

$S \rightarrow \frac{\eta(\rho(\psi(\varsigma-1)))}{\epsilon(\eta-\pi_c(1-\varsigma)(1-\psi)-\psi\pi_n(1-\varsigma))}$  che rappresenta la riserva di risorse inutilizzate,

$C \rightarrow \frac{\rho(1-\varsigma)(1-\psi)}{-\eta+\pi_c(1-\varsigma)(1-\psi)+\psi\pi_n(1-\varsigma)}$  che indica l'attività nelle strategie principali,

$N \rightarrow \frac{\rho\psi(1-\zeta)}{-\eta+\pi_c(1-\zeta)(1-\psi)+\psi\pi_n(1-\zeta)}$  che definisce il tasso di accumulazione di attività nella nuova iniziativa,

possiamo dire che:

- All'aumentare di  $\eta$  aumentano anche i valori di equilibrio  $C$ ,  $N$  e  $S$ . Dato che  $\eta$  indica la velocità di erosione delle attività, per far sì che si mantenga l'equilibrio, l'impresa deve tenere controllata la quantità di risorse inutilizzate, cioè  $S$ , per poter gestire il flusso di risorse da investire in nuove attività al momento più opportuno. Inoltre ci viene confermato, tramite questo risultato, che nei mercati con forte competizione si trovano imprese con asset ampi che necessitano di una ricostruzione più veloce in quanto sono settori che sono predisposti a un livello molto alto di obsolescenza.
- All'aumentare di  $\psi$ , che definisce la percentuale di risorse tolta per accumulare riserve inutilizzate, e considerando che inizialmente  $\pi_c$  è positivo e  $\pi_n$  è negativo, si può dedurre che  $N$  e  $C$  diminuiranno. Questo è dato perché aumentando  $N$ , aumenteranno anche le perdite iniziali che però dovrebbero essere coperte da un maggiore  $C$ . Questo risulta essere impossibile perché diminuendo il flusso di risorse investite in attività centrali avremo che i profitti generati da questi andranno diminuendo.
- All'aumentare di  $\epsilon$ , che si riferisce alla tendenza all'interno di un'impresa ad usare le risorse libere per investimenti in mercati emergenti, avremo che il valore di  $S$  diminuisce, cioè se aumenta il deflusso da  $S$ , abbiamo necessità di meno  $S$  per rimanere in equilibrio. Questo è dato dal fatto che aumentando  $\epsilon$ , aumenta anche il flusso in entrata in  $N$ , ma per mantenere l'equilibrio questo flusso deve essere costante, ma per far ciò è necessario che  $S$  diminuisca. Se un'azienda sostiene di avere tante risorse libere al proprio interno, deve poter controllare  $\epsilon$ , dato che se questo parametro cresce l'azienda andrà fuori equilibrio facen-

do sì che inizi l'accumulazione di  $N$ . Si può manifestare un problema quando quest'ultimo non è ancora maturo e quindi l'accumulazione di investimenti potrebbe avere risultati deleteri per l'azienda.

Queste ipotesi ci confermano che l'unico caso in cui la strategia di rinnovo abbia successo e che si mantenga la condizione di adattamento è quando viene assegnato un controllo, sia sul tasso di flusso di risorse inutilizzate e sia sull'uscita dell'azienda dal mercato della vecchia attività, all'alta dirigenza.

## 4.2.2 Condizioni di equilibrio stabile

Basandoci sui risultati ottenuti dalla precedente sezione dove sono stati analizzati gli autovalori possiamo dedurre che l'equilibrio sarà stabile quando:

1.  $A^2 - 4B > 0$ , e quindi quando  $A = (\epsilon + \eta) - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) > 0$  e  $B = \epsilon(\eta - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) - \psi\pi_n(1 - \varsigma)) > 0$ ,
  2.  $A^2 - 4B = 0$ , e quindi quando  $A = (\epsilon + \eta) - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) > 0$ ,
  3.  $A^2 - 4B < 0$ , e quindi quando  $A = (\epsilon + \eta) - \pi_c(1 - \varsigma)(1 - \psi) > 0$ .
- Ora ricordando che se  $\pi_c, \pi_n < 0$ , ed essendo  $\epsilon, \eta > 0$  e  $(1 - \varsigma), (1 - \psi) > 0$ , possiamo subito dire che ci ritroviamo nel primo caso poiché a questo punto abbiamo che  $A > 0$  e  $B > 0$ ; inoltre viene da se che anche  $A^2 - 4B > 0$ , poiché stiamo sottraendo un qualcosa ad  $A$ . Dunque i tre autovalori sono negativi e ci ritroviamo nel primo caso. A questo punto ci possiamo chiedere come mai la stabilità aumenta se diminuiscono i profitti sia nell'attività centrale che nell'attività emergente.
  - Se invece poniamo  $\pi_c, \pi_n > 0$ , possiamo dire che se  $\eta > \varsigma, \psi$  o che  $\epsilon > \varsigma, \psi$  ci troviamo sempre nel primo caso poiché  $A > 0$  e  $B > 0$ , di conseguenza abbiamo sempre che  $A^2 - 4B > 0$ ; abbiamo quindi

sempre un equilibrio stabile descritto dal primo caso. In questo caso ci possiamo chiedere come mai è necessario che, in caso in cui abbiamo che i profitti delle due attività (centrali e nuove) sono positivi, il tasso di erosione degli investimenti ( $\eta$ ) o la tendenza all'interno di un'azienda ad usare risorse libere per gli investimenti in mercati emergenti ( $\epsilon$ ) sia maggiore della percentuale di risorse tolta per accumulare riserve inutilizzate ( $\psi$ ) e dei costi delle spese generali dei dividendi ( $\varsigma$ ).

- Nel momento in cui ci troviamo nel secondo caso, ovvero che  $A^2 - 4B = 0$ , dobbiamo avere che  $A > 0$ , e questo è possibile quando  $\pi_c < 0$ ; nel caso in cui i profitti dell'attività centrale ( $\pi_c$ ) siano positivi dobbiamo avere che  $\eta > \varsigma, \psi$  o che  $\epsilon > \varsigma, \psi$ .
- Se abbiamo  $A^2 - 4B < 0$ , abbiamo che  $A > 0$ , e quindi ci troviamo ancora una volta con le stesse condizioni del punto precedente.





# Conclusioni

Dopo aver introdotto il metodo per lo studio dei sistemi lineari di equazioni differenziali, si è passati alla caratterizzazione dei vari tipi di soluzioni e alla costruzione dei relativi piani delle fasi, studiandone la stabilità e il tipo di punto critico. Successivamente si è presentato il metodo per la risoluzione di sistemi quasi lineari, proseguendo con una comparazione ai sistemi lineari, basandoci sul tipo e sulla stabilità dei punti critici nei vari casi. Alla fine di questi studi si è potuto constatare che il tipo e la stabilità di un punto critico dipendono dal segno degli autovalori. Si è inoltre introdotto brevemente il secondo metodo di Lyapunov che descrive la possibilità di utilizzare un metodo diverso per studiare la stabilità di un punto critico senza passare per la risoluzione di un sistema, ma ricercando una funzione particolare; questo metodo ci permette inoltre di trovare un bacino di attrazione per il punto critico. Si è anche descritto come questi studi si possono applicare ai problemi di dinamica di popolazioni.

Successivamente è stata presentata la teoria dell'ecologia intra-organizzativa alla base del modello che verrà preso in esame; si è passati, con l'aiuto degli studi già portati avanti dal professor Mollona, ad una costruzione del sistema di equazioni differenziali associato al modello stesso. Dopo aver fatto alcune ipotesi, si è analizzato la stabilità o instabilità del sistema a seconda dei diversi valori, infine si è dato un significato economico ai risultati ottenuti.



# Appendice A

## Autovettori e autovalori

L'idea alla base del calcolo degli autovalori e autovettori è quello di trovare una base (se esiste) nella quale un'applicazione lineare data abbia forma diagonale, che è la forma più semplice esistente.

Per definizione un'applicazione lineare  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice *diagonalizzabile* se esiste una base  $B$  per  $\mathbb{R}^n$  (dominio e codominio) nella quale una matrice  $A_T$  associata a  $T$  in tale base è una matrice diagonale.

Diamo ora la definizione di matrice diagonalizzabile, ovvero, una matrice  $A$  si dice *diagonalizzabile* se esiste una matrice  $P$  invertibile tale che  $P^{-1}AP$ ; in realtà, si tratta della matrice associata all'applicazione lineare diagonalizzabile.

Se  $T$  e  $A$  sono diagonalizzabili la base  $B$  che diagonalizza  $T$  corrisponde alle colonne di  $P$  per cui  $P^{-1}AP$  è diagonale.

Quando la matrice  $A$  è diagonalizzabile, i vettori, la cui direzione non viene cambiata dall'applicazione lineare  $T$ , ma vengono trasformati in multipli di se stessi, sono gli *autovettori* di  $A$ , cioè quei vettori che formano la base che diagonalizza l'applicazione lineare.

In dettaglio la definizione ci dice che, data un'applicazione lineare  $T : V \rightarrow V$  si dice che un vettore non nullo  $v \in V$  è un *autovettore* di  $T$  se

$Tv = \lambda v$  per uno scalare  $\lambda$  che si dice *autovalore* di  $T$ .

Vediamo ora come si calcolano gli autovalori e gli autovettori di un'applicazione lineare o di una matrice date.

Per prima cosa definiamo il *Polinomio Caratteristico* di  $A$ , che è il seguente polinomio in  $x$ :

$$\det(A - xI)$$

dove  $\det$  è il determinante e  $I$  la matrice identità.

Gli *autovalori*,  $\lambda$ , di una matrice  $A$ , sono gli zeri del suo *Polinomio Caratteristico*, cioè:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Se  $\lambda$  è autovalore di  $A$  allora esiste  $v \neq 0$  tale che  $Av = \lambda v$ , cioè  $v \in \ker(A - \lambda I)$ . Quindi la matrice  $A - \lambda I$  è singolare e il suo determinante è uguale a zero. Il vettore  $v$  viene detto autovettore associato all'autovalore  $\lambda$ .

Riassumendo, si calcolano le radici del polinomio caratteristico, se sono tutte distinte, allora si avranno  $n$  autovalori distinti corrispondenti a  $n$  autovettori linearmente indipendenti e quindi la matrice  $A$  sarà diagonalizzabile. Dopo di che per ciascun autovalore  $\lambda$  si calcola il  $\ker(A - \lambda I)$ . Se la somma delle dimensioni di  $\ker(A - \lambda_1 I) \dots \ker(A - \lambda_t I)$  è proprio  $n$  ci permetterà di trovare  $n$  autovettori linearmente indipendenti e quindi una base di  $V$ .

Vediamo un esempio:

Troviamo gli autovalori e autovettori della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di  $A$  è:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -4 \\ 3 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

quindi le radici del polinomio o le soluzioni dell'equazione associata sono  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 2$ .

Quindi calcolando il  $\ker(A - I)$  e il  $\ker(A - 2I)$  avremo:

$$V_1 = \ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \text{Span} \{(1, 1)\}$$

$$V_2 = \ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \text{Span} \{(4/3, 1)\}$$

avendo due autovalori distinti, i due autovettori sono linearmente indipendenti e possiamo dire che  $A$  è diagonalizzabile, ed è simile alla matrice diagonale con gli autovalori sulla diagonale.



# Bibliografia

[1]





# Ringraziamenti