COMPITINO DI GEOMETRIA 2

17 Dicembre 2018

Esercizio 1. Siano $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$ polinomi omogenei a coefficienti reali nelle variabili $x_0, \dots, x_n$ e sia $Z \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ il relativo luogo degli zeri, dotato della topologia di sottospazio. Mostrare che Z è compatto.

Esercizio 2. Sia X uno spazio di Hausdorff compatto e sia $f : X \to X$ un'applicazione continua di X in sé stesso. Mostrare che esiste un chiuso non vuoto $C \subset X$ tale che $f(C) = C$.

Suggerimento. Considerare la famiglia di sottospazi definita ponendo $X_0 = X$ e $X_n = f(X_{n-1})$ $(n > 0)$, e applicare la caratterizzazione della compattezza in termini di famiglie di chiusi.

Esercizio 3. Consideriamo l'azione $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ definita ponendo

$$n * (z_1, \dots, z_m) = 3^n (z_1, \dots, z_m).$$

i) Mostrare che il quoziente $\mathbb{C}^m/\mathbb{Z}$ è uno spazio compatto non di Hausdorff.

ii) Mostrare che l'azione si restringe a un'azione propria

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{C}^m \setminus \{0\}) \to (\mathbb{C}^m \setminus \{0\}).$$

iii) Determinare un dominio fondamentale per l'azione ristretta, e determinare il quoziente $(\mathbb{C}^m \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$.