

COMPITINO DI GEOMETRIA 2

23 MAGGIO 2019

Esercizio 1. Siano $p, q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ due punti distinti.

- i) Mostrare che esistono un aperto X_1 contenente p, q omeomorfo a un disco aperto di $\mathbb{R}^2$, e un aperto X_2 omeomorfo a un nastro di Möbius senza bordo tali che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = X_1 \cup X_2$.
- ii) Sia Y lo spazio topologico ottenuto come quoziente di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ identificando i due punti p, q . Calcolare il gruppo fondamentale di Y .

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ con coordinate cartesiane x, y, z , per $n \in \mathbb{Z}$, sia X_n la sfera unitaria centrata in $(n, 0, 0)$ e sia $C_n = X_n \cap \{z = 0\}$. Determinare il gruppo fondamentale e il rivestimento universale di

$$X_{-2} \cup C_0 \cup X_2.$$

Esercizio 3. Determinare il numero di zeri (con molteplicità) della funzione

$$2e^z + 8z^2 + 1$$

nella corona circolare $C = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{8} \leq |z| \leq 1\}$.