COMPITINO DI GEOMETRIA 2

23 Maggio 2019

Esercizio 1. Siano $p, q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ due punti distinti.

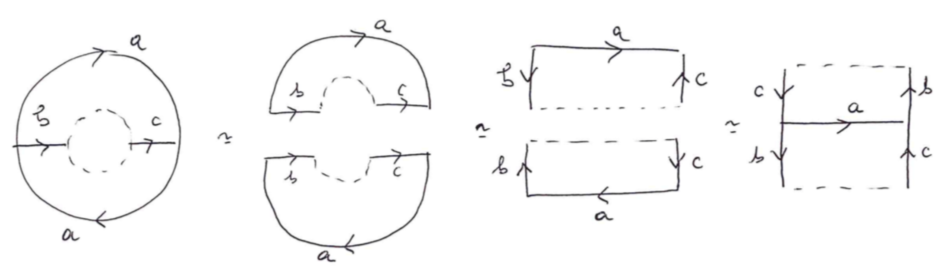
i) Mostrare che esistono un aperto X_1 contenente p, q omeomorfo a un disco aperto di $\mathbb{R}^2$, e un aperto X_2 omeomorfo a un nastro di Möbius senza bordo tali che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = X_1 \cup X_2$.

ii) Sia Y lo spazio topologico ottenuto come quoziente di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ identificando i due punti p, q. Calcolare il gruppo fondamentale di Y.

Soluzione. i) Guardiamo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come quoziente della sfera unitaria S^2 centrata nell'origine e siano r_1, r_2 le due rette in $\mathbb{R}^3$ definite da p_1, p_2. Sia C una circonferenza di raggio massimale in S^2 che non interseca r_1 e r_2 e sia D il disco unitario bordato da C. Allora C sconnette S^2 in due emisfere, che si proiettano omeomorficamente su D. A questo punto possiamo vedere $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come quoziente di D, ottenuto identificando i punti opposti sul bordo $\partial D \simeq S^1$, e i due punti p_1 e p_2 sono rappresentati da punti interni a D.

Sia $D_1 \subset D$ un disco aperto centrato nell'origine e sia $D_2 \subset D$ una corona circolare aperta centrata nell'origine con $D = D_1 \cup D_2$. Indichiamo con X_1 e X_2 le immagini di D_1 e D_2 in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, allora X_1 e X_2 sono aperti in quanto D_1 e D_2 sono aperti saturi di D.

Poiché la restrizione della proiezione $D \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ a $D \smallsetminus \partial D$ è un omeomorfismo sull'immagine, $X_1 \simeq D_1$ è omeomorfo a un disco aperto in $\mathbb{R}^2$. Vediamo che X_2 è omeomorfo a un nastro di Möbius senza bordo: infatti possiamo vedere X_2 come quoziente di una striscia (aperta su due lati paralleli, e chiusa sugli altri due lati) come segue:



ii) Decomponiamo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = X_1 \cup X_2$ come al punto i), A questo punto basta scegliere il disco D' e la corona C in modo tale che $p_1, p_2 \in D' \smallsetminus C$.

Mantenendo la notazione del punto i), siano Y_1 e Y_2 le immagini di X_1 e X_2 in Y, allora Y_1 e Y_2 sono due aperti di Y, il primo omeomorfo al quoziente di un disco in cui sono stati identificati due punti, e il secondo omeomorfo a un nastro di Möbius.

Osserviamo che Y_1 e Y_2 sono connessi per archi, e che la loro intersezione è anche connessa per archi in quanto omeomorfa a una corona circolare. Pertanto possiamo calcolare il gruppo fondamentale di Y applicando il teorema di Van Kampen alla decomposizione $Y = Y_1 \cup Y_2$, e troviamo la descrizione come prodotto amalgamato

$$\pi_1(Y) \simeq \pi_1(Y_1) *_{\pi_1(Y_1 \cap Y_2)} \pi_1(Y_2).$$

Osserviamo che tutti gli spazi Y_1, Y_2 e $Y_1 \cap Y_2$ hanno gruppo fondamentale isomorfo a $\mathbb{Z}$. Siano $\alpha \in \pi_1(Y_1)$, $\beta \in \pi_1(Y_2)$, $\gamma \in \pi_1(Y_1 \cap Y_2)$ rispettivi generatori, e siano

$$(i_1)_* : \pi_1(Y_1 \cap Y_2) \to \pi_1(Y_1), \qquad (i_2)_* : \pi_1(Y_1 \cap Y_2) \to \pi_1(Y_2)$$

le applicazioni indotte dalle inclusioni. Allora $(i_1)_*(\gamma) = 1$, mentre $(i_2)_*(\gamma) = \beta^2$: infatti il cammino definito da γ è contraibile in Y_1, mentre in Y_2 è omotopo al cammino definito da β percorso due volte. Pertanto otteniamo

$$\pi_1(Y) \simeq \langle \alpha, \beta \mid \beta^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z} * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ con coordinate cartesiane x, y, z, per $n \in \mathbb{Z}$, sia X_n la sfera unitaria centrata in $(n, 0, 0)$ e sia $C_n = X_n \cap \{z = 0\}$. Determinare il gruppo fondamentale e il rivestimento universale di

$$X_{-2} \cup C_0 \cup X_2.$$

Soluzione. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ un'infinità numerabile di sfere non tangenti unite da una retta tangente ad ognuna di esse:

$$\widetilde{X} = \{(t, 0, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} X_{4n}$$

Vediamo che $\widetilde{X}$ è il rivestimento universale di X.

Mostriamo prima di tutto per induzione su $m \in \mathbb{N}$ che

$$Y_m = \{(t, 0, 1) \mid t \in [0, 4m]\} \cup \bigcup_{n=0}^{m} X_{4n}$$

è semplicemente connesso. Infatti Y_m è connesso per archi, e $\widetilde{X}_0 \simeq S^2$ è semplicemente connesso. Se $m > 0$ possiamo infine applicare il teorema di Van Kampen alla decomposizione in aperti

$$Y_m = \Big(Y_m \cap \{x < 4m - 1\}\Big) \ \cup \ \Big(Y_m \cap \{x > 4m - 3\}\Big) :$$

i due aperti si retraggono per deformazione rispettivamente su Y_{m-1} e sulla sfera X_{4m}, e poiché la loro intersezione è un segmento segue dal teorema di Van Kampen e dall'ipotesi induttiva che Y_m è semplicemente connesso.

Segue che anche $\widetilde{X}$ è semplicemente connesso: se infatti $\gamma : [0, 1] \to \widetilde{X}$ è una curva chiusa, allora per compattezza esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$\operatorname{Im}(\gamma) \subset \{(t, 0, 1) \mid t \in [-4m, 4m]\} \cup \bigcup_{n=-m}^{m} X_{4m}.$$

D'altra parte tale spazio è omeomorfo a Y_{2m}, che per quanto detto sopra è semplicemente connesso. Pertanto γ è contraibile in $\widetilde{X}$, che è semplicemente connesso.

Consideriamo adesso su $\widetilde{X}$ l'azione per traslazione di $\mathbb{Z}$ definita come segue

$$m.(x, y, z) = (x + 8m, y, z)$$

Si verifica immediatamente che tale azione è propriamente discontinua e che $\widetilde{X}/\mathbb{Z}$ è omeomorfo a X. Pertanto $\widetilde{X}$ è il rivestimento universale di X, e il gruppo fondamentale di X è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Esercizio 3. Determinare il numero di zeri (con molteplicità) della funzione

$$2e^z + 8z^2 + 1$$

nella corona circolare $C = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{8} \leq |z| \leq 1\}$.

Soluzione. Scriviamo

$$2e^z + 8z^2 + 1 = f(z) + g(z)$$

con $f(z) = 8z^2 + 1$ e $g(z) = 2e^z$, e applichiamo due volte ad esse il teorema di Rouché: una sul disco $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ e una sul disco $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \frac{1}{8}\}$.

Se $|z| = 1$, allora abbiamo

$$|g(z)| = 2e^{\mathrm{Re}(z)} \leq 2e < 6, \qquad |f(z)| \geq 8|z^2| - 1 = 7$$

Pertanto f e $f+g$ non hanno zeri sul bordo di D_1, ed il numero di zeri di $f+g$ in D_1 è uguale al numero degli zeri di f in D_1. Poiché gli zeri di f sono le radici quadrate di $\frac{1}{8}$, segue che $f+g$ ha due zeri in D_1.

Se $|z| = \frac{1}{8}$, allora abbiamo

$$|g(z)| = 2e^{\mathrm{Re}(z)} \geq 2, \qquad |f(z)| \leq 8|z^2| + 1 = \tfrac{1}{8} + 1 < 2$$

Pertanto g e $f+g$ non hanno zeri sul bordo di D_2, e il numero di zeri di $f+g$ in D_2 è uguale al numero degli zeri di g in D_2. Poiché g non ha zeri in $\mathbb{C}$, segue che $f+g$ non ha zeri in D_2. Pertanto $f+g$ ha esattamente due zeri in C.