AZIONI PROPRIE E PROPRIAMENTE DISCONTINUE

Sia G un gruppo che agisce su uno spazio topologico X tramite omeomorfismi.

Definizione 1. L'azione di G su X è detta *propria* se vale la seguente proprietà:

- **P1.** L'applicazione $\Phi : G \times X \to X \times X$ definita da $\Phi(g, x) = (x, gx)$ è propria, dove G è dotato della topologia discreta. [1]

Vogliamo considerare le seguenti proprietà per l'azione, e mostrarne alcune relazioni. In particolare, sotto opportune ipotesi sullo spazio X esse saranno tutte equivalenti.

Proposizione 1. *Sia G un gruppo che agisce tramite omeomorfismi su uno spazio di Hausdorff X. Allora l'azione è propria se e solo se vale la seguente proprietà:*

- **P2.** *Per ogni sottospazio compatto $K \subset X$, vale $gK \cap K \neq \emptyset$ per un numero finito di $g \in G$.*

Dimostrazione. (P1 $\Rightarrow$ P2). Sia $K \subset X$ compatto, allora

$$\Phi^{-1}(K \times K) = \{(g, x) \mid x \in K, gx \in K\}$$

è un sottospazio compatto di $G \times X$. Segue che l'immagine di $\Phi^{-1}(K \times K)$ in G è un sottospazio compatto, dunque finito in quanto G ha la topologia discreta. D'altra parte tale sottospazio coincide con l'insieme dei $g \in G$ tali che $gK \cap K \neq \emptyset$.

(P2 $\Rightarrow$ P1). Sia $L \subset X \times X$ compatto, e sia K l'unione delle due proiezioni di L su X. Dunque $K \subset X$ è compatto, e $L \subset K \times K$. Osserviamo che $\Phi^{-1}(K \times K) = \{(g, x) \mid x \in K \cap g^{-1}K\}$, dunque detto $G_K = \{g \in G \mid K \cap g^{-1}K \neq \emptyset\}$ abbiamo le inclusioni

$$\Phi^{-1}(L) \subset \Phi^{-1}(K \times K) \subset G_K \times K.$$

D'altra parte per ipotesi G_K è un insieme finito, e $L \subset X \times X$ è chiuso, in quanto compatto in un Hausdorff. Dunque $G_K \times K$ è compatto, e $\Phi^{-1}(L)$ è compatto in quanto chiuso in un compatto. $\square$

Proposizione 2. *Sia G un gruppo che agisce tramite omeomorfismi su uno spazio di Hausdorff localmente compatto X. Allora l'azione è propria se e solo se vale la seguente proprietà:*

- **P3.** *Per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esistono intorni $U \ni x$ e $V \ni y$ tali che $gU \cap V \neq \emptyset$ per al più un numero finito di $g \in G$.*

Dimostrazione. (P2 $\Rightarrow$ P3). Supponiamo che, per ogni sottospazio compatto $K \subset X$, valga $gK \cap K \neq \emptyset$ per al più un numero finito di $g \in G$. Siano $x, y \in X$ e siano K_x, K_y intorni compatti di x, y. Allora $K_x \cup K_y$ è compatto, dunque $g(K_x \cup K_y) \cap (K_x \cup K_y) \neq \emptyset$ per al più un numero finito di $g \in G$, ed in particolare, otteniamo che $gK_x \cap K_y \neq \emptyset$ per al più un numero finito di $g \in G$.

Date: December 4, 2018.

[1] Ricordiamo che un'applicazione continua tra due spazi topologici è detta *propria* se le preimmagini di compatti sono compatte.

(P3 ⇒ P1). Sia $L \subset X \times X$ compatto. Dato $(x,y) \in X \times X$, siano $U_{x,y}$ e $V_{x,y}$ intorni rispettivamente di x e y tali che $gU_{x,y} \cap V_{x,y} = \emptyset$ tranne che per al più un numero finito di $g \in G$. Otteniamo dunque un ricoprimento aperto

$$L \subset \bigcup_{(x,y)\in L} U_{x,y} \times V_{x,y},$$

e dalla compattezza di L possiamo estrarre un sottoricoprimento finito $U_1 \times V_1$, …, $U_n \times V_n$. Dato $i \leq n$, denotiamo $G_i = \{g \in G \mid gU_i \cap V_i \neq \emptyset\}$ e poniamo $G_0 = G_1 \cup \ldots \cup G_n$. Allora per ipotesi G_0 è un sottoinsieme finito di G. Detta K l'immagine di L in X sotto la prima proiezione, abbiamo

$$\Phi^{-1}(L) = \{(g,x) \mid (x,gx) \in L\} \subset G_0 \times K.$$

D'altra parte $G_0 \times K$ è compatto, e L è chiuso in $X \times X$ in quanto compatto in un Hausdorff. Dunque $\Phi^{-1}(L)$ è chiuso in un compatto, ed è a sua volta compatto. □

Consideriamo adesso altre due proprietà per l'azione di un gruppo G su uno spazio topologico X.

Definizione 2. L'azione di G su X è detta *vagante* (in inglese: *wandering*) se ogni $x \in X$ ammette un intorno $U \subset X$ tale che $gU \cap U \neq \emptyset$ per un numero finito di $g \in G$. L'azione è invece detta *propriamente discontinua* se $gU \cap U = \emptyset$ per ogni $g \in G$ diverso dall'identità.

Purtroppo la terminologia appena introdotta di "azione propriamente discontinua" non ha un significato univoco in letteratura. Spesso in tale modo si intende che l'azione sia propria, per lo più nel senso che vale la proprietà (P2). Ma tali nozioni sono ben diverse, come chiarito dalla seguente Proposizione 5.

Proposizione 3. *Sia G un gruppo che agisce tramite omeomorfismi su uno spazio di Hausdorff X. Allora l'azione è propriamente discontinua se e solo se è libera* [2] *e vagante.*

Dimostrazione. (⇒). Supponiamo che l'azione sia propriamente discontinua, allora chiaramente è anche vagante. Vediamo che deve essere anche libera. Sia infatti $x \in X$ e sia $g \in G$ tale che $gx = x$. Sia $U \ni x$ un intorno tale che $gU \cap U \neq \emptyset$ per ogni g diverso dall'identità: allora $gx = x \in U$, dunque $x \in g^{-1}U \cap U$, da cui $g = e$.

(⇐). Supponiamo che l'azione sia libera e vagante. Sia $x \in X$ e sia $U \subset X$ intorno di x tale che $gU \cap U \neq \emptyset$ per un numero finito di $g \in G$. Siano $g_1, \ldots, g_n$ tali elementi. Poiché l'azione è libera e X è di Hausdorff, per $i \leq n$ siano W_i, W_i' intorni disgiunti di x e di $g_i x$. Poniamo

$$V = U \cap \bigcap_{i=1}^{n} \Big(W_i \cap g_i^{-1}(W_i')\Big),$$

e vediamo che V è un intorno di x con la proprietà richiesta. Se infatti $gU \cap U = \emptyset$, allora $gV \cap V \subset gU \cap U = \emptyset$. Se invece $gU \cap U \neq \emptyset$ e g è diverso dall'identità, allora $g = g_i$ per qualche $i \leq n$ e $gV \cap V \subset W_i \cap W_i' = \emptyset$. □

Esempio 4. Un'azione vagante non è necessariamente propria. Consideriamo infatti l'azione (libera) di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definita da $n * (x,y) = (2^n x, 2^{-n} y)$.

[2] Ricordiamo che un'azione $G \times X \to X$ è detta *libera* se, per ogni $x \in X$ e per ogni $g \in G$ diverso dall'identità, vale $gx \neq x$.

Vediamo che l'azione è vagante. Sia $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e supponiamo $x \neq 0$. Sia U il disco di raggio $|x|/4$ centrato in (x,y), vediamo che $n * U \cap U = \emptyset$ per ogni $n \neq 0$. Se infatti $(x',y') \in U$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, allora $n*(x'y') - (x,y)$ ha prima coordinata in modulo

$$|2^n x' - x| > |2^n x - x| - 2^n|x|/4 = (|2^n - 1| - 2^{n-2})|x| \geq \frac{3}{8}|x| > \frac{|x|}{4},$$

pertanto $n * (x'y') \notin U$ per ogni $n \neq 0$. Similmente, se $x = 0$ possiamo prendere come U il disco centrato in (x,y) di raggio $|y|/4$ e verificare similmente che $n * U \cap U = \emptyset$ per ogni $n \neq 0$.

Vediamo adesso che l'azione non è propria, nel senso che non soddifsfa (P3). Infatti per ogni coppia di intorni $U \ni (0,1)$ e $V \ni (1,0)$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $(2^{-n},1) \in U$ e $(1,2^{-n}) \in V$ per ogni $n \geq n_0$. D'altra parte $n*(2^{-n},1) = (1,2^{-n})$, dunque $n * U \cap V \neq \emptyset$ per ogni $n \geq n_0$. $\triangle$

Osserviamo che un'azione che soddisfa la proprietà (P3) è sempre vagante. Dato $x \in X$ esistono infatti intorni $U,V \subset X$ tali che $gU \cap V \neq \emptyset$ solamente per un numero finito di $g \in G$. Ma allora $U \cap V$ è un intorno di x con la proprietà richiesta: infatti $g(U \cap V) \cap (U \cap V) \subset gU \cap V$, dunque $g(U \cap V) \cap (U \cap V) \neq \emptyset$ solamente per finiti $g \in G$.

Proposizione 5. *Sia $G \times X \to X$ un'azione vagante di un gruppo G su uno spazio di Hausdorff X. Allora X/G è di Hausdorff se e solo se l'azione soddisfa la proprietà (P3).*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo che X/G sia di Hausdorff, e mostriamo che vale (P3). Siano $x,y \in X$. Supponiamo dapprima che $Gx \neq Gy$. Poiché X/G è di Hausdorff, esistono aperti G-stabili disgiunti $U,V \subset X$ con $x \in U$ e $y \in V$. Ma allora $gU \cap V = U \cap V = \emptyset$. Supponiamo adesso che $y = hx$ per qualche $h \in G$, e sia $U \ni x$ un tale che $gU \cap U = \emptyset$ tranne che per al più un numero finito di $g \in G$. Allora hU è un intorno di y, e $gU \cap hV = h(h^{-1}gU \cap V) = \emptyset$ tranne che per al più un numero finito di $g \in G$.

($\Leftarrow$) Supponiamo adesso che valga (P3), e vediamo che X/G è di Hausdorff. Siano $x,y \in X$ elementi appartenenti a G-orbite distinte, mostriamo che esistono aperti saturi disgiunti $A,B \subset X$ tali che $x \in A$ e $y \in B$. Per ipotesi, esistono intorni $U,V \subset X$ rispettivamente di x e di y tali che $gU \cap V \neq \emptyset$ per al più un numero finito di elementi di G.

Siano $g_1,\ldots,g_n \in G$ gli elementi tali che $g_iU \cap V \neq \emptyset$. Dato $i \leq n$, siano $U_i, V_i \subset X$ aperti disgiunti con $g_ix \in U_i$ e $y \in V_i$. Poniamo $U' = U \cap \bigcap_i g_i^{-1}U_i$ e $V' = V \cap \bigcap_i V_i$. Allora $x \in U'$ e $y \in V'$, vediamo che $gU' \cap V' = \emptyset$ per ogni $g \in G$. Se infatti $gU \cap V = \emptyset$, allora $gU' \cap V' = \emptyset$ in quanto $gU' \cap V' \subset gU \cap V$. Altrimenti $g = g_i$ per qualche $i \leq n$, pertanto $gU' \subset U_i$ e $gU' \cap V' \subset U_i \cap V_i = \emptyset$.

Poniamo adesso $A = \bigcup_{g \in G} gU'$ e $B = \bigcup_{g \in G} gV'$. Per costruzione A e B sono aperti saturi di X rispettivamente contenenti x e y. Vediamo che $A \cap B = \emptyset$: infatti

$$A \cap B = \bigcup_{g,h \in G} gU' \cap hV',$$

e per ogni $g,h \in G$ abbiamo $gU' \cap hV' \subset h(h^{-1}gU' \cap V') = \emptyset$. $\square$

Esempio 6. Riprendiamo l'esempio precedente dell'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definita da $n*(x,y) = (2^nx, 2^{-n}y)$. Poiché l'azione è vagante ma non propria, dalla proposizione precedente segue che il quoziente $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$ non è di Hausdorff; vediamo esplicitamente questo fatto. Per quanto visto, i punti $(0,1)$ e $(1,0)$ non ammettono intorni aperti G-stabili disgiunti. D'altra parte $(0,1)$ e $(1,0)$ hanno immagini distinte in X/G, dunque non è possibile separare $[0,1]$ e di $[1,0]$ con aperti disgiunti di X/G. $\triangle$

Proposizione 7. *Sia $G \times X \to X$ un'azione vagante di un gruppo G su uno spazio di Hausdorff X. Allora le orbite di G su X sono sottospazi chiusi e discreti.*

Proof. Vediamo che le orbite sono discrete. Sia $x \in X$, dobbiamo trovare un aperto U tale che $Gx \cap U = \{x\}$. Dalla definizione di azione vagante, esiste un intorno U_0 tale che $gU_0 \cap U_0 = \emptyset$ tranne che per al più un numero finito $g \in G$. In particolare, U_0 interseca Gx in un numero finito di punti: infatti $gx \in U_0$ se e solo se $x \in g^{-1}U_0$. Siano $g_1, \ldots, g_n \in G$ gli elementi per cui $g_i x \in U_0 \setminus \{x\}$ e siano $U_i, V_i \subset X$ intorni disgiunti che separano x e $g_i x$. Sia

$$U = U_0 \cap \ldots \cap U_n \cap g_1^{-1}V_1 \cap \ldots \cap g_n^{-1}V_n :$$

allora U è un intorno aperto di x. D'altra parte, se $gx \in U$ per qualche $g \in G$, allora $g = g_i$ per qualche i, da cui $gx \in U_i \cap V_i$, assurdo.

Vediamo ora che le orbite sono chiuse, mostrando che $X \setminus Gx$ è intorno di ogni suo punto. Sia $y \in X \setminus Gx$. Sia $U \ni y$ aperto tale che $gU \cap U = \emptyset$ tranne che per al più un numero finito $g \in G$. Come sopra, vediamo che U interseca Gx in al pù un numero finito di punti. Poiché X è spazio di Hausdorff, segue che $U \setminus Gx$ è aperto. $\square$

Esempio 8. Se l'azione $G \times X \to X$ è vagante ma lo spazio X non è di Hausdorff, allora le orbite non sono necessariamente chiuse. Sia infatti$G$ un qualsiasi gruppo e sia $X := G \times \{0,1\}$, con la topologia che ha per base i sottoinsiemi della forma $\{(g,0),(g,1)\}$. Consideriamo l'azione di G su X definita da $g(h,i) = (gh,i)$: questa è un'azione libera e vagante. D'altra parte G ha due orbite in X, e nessuna delle due è chiusa. $\triangle$

Vogliamo adesso capire se sia possibile "restringere" l'operazione di quoziente per un gruppo G ad opportuni sottospazi di uno spazio X su cui G agisce tramite omeomorfismi. Supponiamo che $D \subset X$ sia un sottospazio chiuso che interseca tutte le orbite di G, vale a dire tale che $X = \bigcup_{g \in G} gD$. Osserviamo che G non agisce su D, tuttavia possiamo restringere la relazione di equivalenza associata all'azione di G su X a una relazione di equivalenza su D: dati $x, x' \in D$, allora

$$x \sim x' \text{ se e solo se } Gx = Gx'.$$

Dalla proprietà universale delle identificazioni otteniamo un diagramma commutativo di applicazioni continue

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "p"] \\ D/\sim \arrow[r, "f"'] & X/G \end{tikzcd}$$

Per ipotesi i è un immersione chiusa, p è un'identificazione aperta, q è un'identificazione e f è biiettiva. Dunque f è un omeomorfismo se e solo se è aperta oppure chiusa.

Supponiamo per esempio che p sia chiusa (e.g. se G è un gruppo finito), o che X/G sia uno spazio di Hausdorff e D sia compatto (come per esempio nel caso di

$\mathbb{Z}^n$ che agisce su $\mathbb{R}^n$ per traslazioni). Allora anche f è chiusa, dunque in questi casi possiamo conlcudere che f è un omeomorfismo tra i quozienti $D/\sim$ e X/G. Come visto a lezione, ciò è in generale falso senza ipotesi aggiuntive.

Definizione 3. Sia G un gruppo che agisce tramite omeomorfismi su uno spazio topologico X. Un *dominio fondamentale* per l'azione di G su X è un sottospazio chiuso $D \subset X$ che soddisfa le seguenti proprietà:

a) D coincide con la chiusura della propria parte interna D°;
b) Se $g \in G$ è diverso dall'identità, allora $gD^\circ \cap D^\circ = \emptyset$;
c) La collezione $\{gD\}_{g\in G}$ è un ricoprimento localmente finito di X. [3]

Proposizione 9. *Sia G un gruppo che agisce tramite omeomorfismi su uno spazio topologico X, e supponiamo che esista un dominio fondamentale $D \subset X$. Allora l'azione di G soddisfa la proprietà (P2), e i quozienti $D/\sim$ e X/G sono omeomorfi.*

Proof. i) Vediamo che l'azione di G soddisfa la proprietà (P2). Supponiamo che $D \subset X$ sia un dominio fondamentale per l'azione di G, e sia $K \subset X$ compatto. Poiché il ricoprimento $\{gD\}_{g\in G}$ è localmente finito, vediamo che K interseca solamente un numero finito di traslati di D. Dato $x \in X$, sia infatti $U_x \subset X$ un intorno aperto di x che interseca solo un numero finito di traslati di D. Allora $K \subset \bigcup_{x\in X} U_x$, dunque per compattezza esistono $x_1, \ldots, x_n \in K$ tali che $K \subset U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$. D'altra parte ogni U_{x_i} è contenuto nell'unione di n numero finito di traslati di D, dunque lo stesso è vero per K.

Segue che $gK \cap K \neq \emptyset$ solamente per un numero finito di $g \in G$. Supponiamo infatti $K \subset g_1 D \cup \ldots \cup g_m D$, e siano $x \in K$ e $g \in G$ tali che $gx \in K$. Assumiamo $x \in g_j D$: allora $gx \in gg_j D \cap K$, dunque $gg_j D = g_i D$ per qualche i. In particolare otteniamo $gg_j D^\circ = g_i D^\circ$, da cui $g = g_i g_j^{-1}$.

ii) Vediamo adesso che $D/\sim$ e X/G sono spazi topologici omeomorfi. Dalla discussione che precede la Definizione 3, è sufficiente mostrare che l'applicazione naturale $f : D/\sim \to X/G$, che è continua e biiettiva, è anche aperta.

Sia $A \subset D/G$ aperto. Allora $q^{-1}(A) = D \cap B$ con $B \subset X$ aperto. Poniamo

$$V = \bigcup_{g\in G} g(D \cap B).$$

Per costruzione $V = p^{-1}(f(A))$, dunque $f(A)$ è aperto se e solo se V è aperto. Sia $x \in V$, possiamo assumere che $x \in D \cap B$. Per ipotesi, esiste un intorno $U \ni x$ tale che $U \cap gD = \emptyset$ tranne che per un numero finito di $g \in G$. Poiché D è chiuso e poiché U interseca solo un numero finito di traslati di D, a patto di sostituire U con $U \setminus \bigcup_{x\in gD} gD$ possiamo assumere che $x \in gD$ per ogni g con $U \cap gD \neq \emptyset$. Dunque $g^{-1}x \in D$ per ogni tale g, e poiché $q(g^{-1}x) = q(x)$ otteniamo che $x \in g(A \cap B)$.

Siano ora $g_1, \ldots, g_n$ gli elementi tali che $x \in g_i D$. Allora abbiamo $U \subset \bigcup g_i D$ e $x \in \bigcap g_i B$. Poniamo

$$U' = U \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_i B,$$

e vediamo che U' è un intorno aperto di x contenuto in V. Chiaramente U' è un intorno aperto di x. D'altra parte, se $y \in U'$, allora per costruzione $y \in g_i D$ per qualche i, dunque $y \in g_i(D \cap B) \subset V$ e la dimostrazione è conclusa. □

[3] Ricordiamo che un ricoprimento $\mathcal{C}$ di uno spazio topologico X si dice *localmente finito* se, per ogni $x \in X$, esiste un intorno $U \ni x$ che interseca solamente un numero finito di $C \in \mathcal{C}$.

Esempio 10. Sia $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Associamo ad ogni matrice $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ un'applicazione $\Psi_g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ come segue:

$$\text{se } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ allora } \Psi_g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Osserviamo che $|cz+d| > 0$ per ogni $z \in \mathbb{H}$ e per ogni $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, e che $\mathrm{Im}(\Psi_g(z)) = \mathrm{Im}(z)/|cz+d|^2$. Dunque effettivamente abbiamo $\Psi_g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ per ogni $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Scrivendo $\Psi_g(z)$ in coordinate reali, si vede immediatamente che Ψ_g è continua per ogni g. D'altra parte abbiamo $\Psi_g(\Psi_h(z)) = \Psi_{gh}(z)$, dunque abbiamo un omomorfismo di gruppi

$$\Psi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Homeo}(\mathbb{H}).$$

Vediamo che tale azione è propria. Poiché $\mathbb{H}$ è uno spazio localmente compatto di Hausdorff, basta verificare che, per ogni compatto $K \subset \mathbb{H}$, esistono solamente finiti $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ tali che $gK \cap K \neq \emptyset$. Sia $K \subset \mathbb{H}$ compatto. Allora è chiuso e limitato in $\mathbb{C}$, dunque esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{Im}(z) > \varepsilon$ per ogni $z \in K$.

Osserviamo che esiste una funzione continua $R : \mathbb{H} \to \mathbb{R}_{>0}$ con la seguente proprietà:

$$\text{Se } \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} > \varepsilon, \text{ allora } |c| < R(z) \text{ e } |d| < R(z).$$

Infatti, detto $z = x+iy$, se $|cz+d|^2 < y/\varepsilon$ allora abbiamo anche $(cx+d)^2 < y/\varepsilon$ e $c^2y^2 < y/\varepsilon$, da cui troviamo

$$|c| < \sqrt{1/\varepsilon y}, \qquad |d| < \sqrt{y/\varepsilon} + |x|\sqrt{1/\varepsilon y}.$$

Pertanto possiamo prendere

$$R(z) = \max\{\sqrt{1/\varepsilon y},\ \sqrt{y/\varepsilon} + |x|\sqrt{1/\varepsilon y}\}.$$

Siccome K è compatto e R è continua, è allora ben definito il suo massimo $R_K := \max_K R(z)$.

Siano ora $z \in K$ e $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ tali che $gz \in K$. Detta (c,d) la seconda riga di g, allora $\mathrm{Im}(gz) = \mathrm{Im}(z)/|cz+d|^2 > \varepsilon$, dunque devono valere le disuguaglianze $|c| < R_K$ e $|d| < R_K$. Ciò mostra che esistono solo un numero finito di possibilità per la seconda riga di un elemento $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ tale che $gK \cap K \neq \emptyset$.

Supponiamo adesso che $g_1, g_2 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ siano due elementi con la stessa seconda riga (c,d) tali che $g_iK \cap K \neq \emptyset$, e poniamo $g_0 = g_2g_1^{-1}$. Osserviamo che g_0 è della forma $\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, infatti

$$g_2g_1^{-1} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b_1 \\ -c & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'altra parte $g_0z = z+n$ e per ipotesi abbiamo $g_0(g_1K) \cap K \neq \emptyset$. Ma poiché K è compatto, dato $z \in g_1K$ esistono solo finiti $n \in \mathbb{Z}$ tali che $z+n \in K$.

Per determinare il quoziente $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ si mostra che l'azione ammette il dominio fondamentale

$$D = \{z \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\ ,\ |z| \geq 1\}$$

(vedi [1, Proposizione 1.2.2]), e che se $\sim$ è la relazione di equivalenza su D indotta dall'azione di $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ si esprime come segue: se $z, z' \in D$, allora

$$z \sim z' \iff z' = z+1 \text{ oppure } z' = -\frac{1}{z}.$$

Pertanto dalla Proposizione 9 deduciamo che $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \simeq D/\sim$ è omeomorfo a $\mathbb{C}$. $\triangle$

References

[1] D. Bump, *Automorphic forms and representations*, Cambridge University Press, 1998

[2] M. Kapovich, *A note on properly discontinous actions*, 2017

[3] https://mathoverflow.net/questions/55726/properly-discontinuous-action?rq=1

[4] J.M. Lee, *Introduction to topological manifolds*, Springer-Verlag, 2011