COMPITO DI GEOMETRIA 2

4 Giugno 2019

Esercizio 1. Sia Y uno spazio di Hausdorff compatto e sia $f : X \to Y$. Mostrare che f è continua se e solo se il suo grafico è chiuso in $X \times Y$.

Soluzione. Sia $\Gamma_f \subset X \times Y$ il grafico di f. Poiché Y è di Hausdorff, sappiamo già che se f è continua allora Γ_f è chiuso in $X \times Y$. Vediamo il viceversa.

Poiché Y è compatto, la proiezione $\pi_X : X \times Y \to X$ è chiusa. Sia $C \subset Y$ chiuso, allora poiché Γ_f è chiuso anche

$$\Gamma_f \cap (X \times C) = \{(x, f(x)) \mid f(x) \in C\}$$

è chiuso in $X \times Y$. Dunque anche $f^{-1}(C) = \pi_X(\Gamma_f \cap (X \times C))$ è chiuso in X.

Esercizio 2. Sia $Z \subset \mathbb{R}^3$ una famiglia di rette per l'origine e sia $X = \mathbb{R}^3 \smallsetminus Z$.

i) Assumendo che la famiglia Z sia numerabile, mostrare che X è connesso.

ii) Assumendo che la famiglia Z sia finita, calcolare il gruppo fondamentale di X.

Soluzione. i) Mostriamo che X è connesso per archi. Chiaramente ogni punto di X può essere connesso mediante un arco a un punto di $S^2 \smallsetminus Z$: infatti dato $x \in X$ possiamo muoverci lungo la retta associata mediante l'arco $\gamma_x(t) = tx + (1-t)\frac{x}{||x||}$.

Pertanto è sufficiente mostrare che $S^2 \smallsetminus Z$ è connesso per archi. Fissiamo $p_0 \in S^2 \cap Z$, allora applicando la proiezione stereografica da p_0 vediamo che $S^2 \smallsetminus Z$ è omeomorfo al complementare in $\mathbb{R}^2$ di un insieme numerabile.

Quindi siamo ridotti a mostrare che $\mathbb{R}^2$ meno un insieme numerabile Y è sempre connesso per archi. Dati $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus Y$, sia R l'asse per il segmento che li congiunge. Una famiglia di curve che congiunge p_1 a p_2 è dunque parametrizzata dai punti q in R, considerando per ogni q la curva $\gamma^q_{p_1,p_2}$ ottenuta come giunzione del segmento che congiunge p_1 a q con il segmento che congiunge q a p_2.

Supponiamo per assurdo che per ogni q in R la curva $\gamma^q_{p_1,p_2}$ interseca Y. Allora possiamo costruire un'applicazione $\phi : R \to Y$ che associa a $q \in R$ un qualsiasi punto scelto in cui $\gamma^q_{p_1,p_2}$ interseca Y. Osserviamo che l'applicazione così definita deve essere iniettiva: infatti al variare di $q \in R$ le curve $\gamma^q_{p_1,p_2}$ si intersecano solamente ni loro estremi p_1 e p_2, che per ipotesi non appartengono a Y. Ma questo è assurdo, perché avremmo allora un'applicazione iniettiva da R a Y, ed il primo ha la cardinalità del continuo.

Pertanto esiste $q \in R$ tale che $\gamma^q_{p_1,p_2}$ non contiene alcun punto di Y, ed abbiamo dunque trovato un arco che congiunge p_1 e p_2 in $\mathbb{R}^2 \smallsetminus Y$.

ii) Per quanto mostrato nel punto i), lo spazio X è connesso per archi. Pertanto il suo gruppo fondamentale, a meno di isomorfismo, è indipendente dal punto base scelto. Ricordiamo che $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ si retrae per deformazione su S^2, mediante la mappa

$$R : [0,1] \times (\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}, \qquad x \longmapsto (1-t)x + t\frac{x}{||x||}$$

Osserviamo che le fibre di R sono rette, e che la restrizione di R induce una retrazione per deformazione

$$R' : [0,1] \times X \longrightarrow X \cap S^n.$$

D'altra parte $X \cap S^n$ è una sfera privata di $2n$ punti, e tramite la proiezione stereografica è omeomorfa al piano privato di $2n-1$ punti. Pertanto otteniamo isomorfismi

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1(X \cap S^n) \simeq F_{2n-1},$$

dove F_{2n-1} è il gruppo libero su $2n-1$ elementi.

Esercizio 3. Detta $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ la curva definita da $\gamma(t) = 9e^{8\pi i t}$, calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{\sin(z)}$$

Soluzione. Sia $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$. I punti in cui f non è definita sono gli zeri di $\sin(z)$, vale a dire i multipli interi di π. Pertanto f è definita sull'immagine di γ, e dal teorema dei residui abbiamo

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{\sin(z)} = 2\pi i \sum_{z \in \mathbb{C}} n_z(\gamma)\, \mathrm{Res}_z(f)$$

dove $n_z(\gamma)$ è l'indice di γ in z e dove $\mathrm{Res}_z(f)$ indica il residuo di f in z.

Osserviamo prima di tutto che $n_z(\gamma) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ di modulo maggiore di 9, mentre $n_z(\gamma) = 4$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ di modulo minore di 9. Pertanto, detto

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 9\},$$

abbiamo

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{\sin(z)} = 8\pi i \sum_{z \in D} \mathrm{Res}_z(f)$$

I punti in cui il residuo di f è non nullo sono tutti punti in cui la funzione non è olomorfa, dunque sono zeri di $\sin(z)$. Tra questi, quelli di modulo minore di 9 sono esattamente quelli della forma $k\pi$ con $k < 3$.

Osserviamo che $\sin(z)$ ha uno zero semplice in $k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, dunque tali punti sono poli semplici di $f(z)$, e dalla formula per il calcolo del residuo in un polo semplice troviamo

$$\mathrm{Res}_{k\pi}(f) = \frac{1}{\cos(k\pi)} = (-1)^k.$$

Pertanto

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{\sin(z)} = 8\pi i \sum_{k=-2}^{2} \mathrm{Res}_{k\pi}(f) = 8\pi i \sum_{k=-2}^{2} (-1)^k = 8\pi i$$