COMPITO DI GEOMETRIA 2

12 Luglio 2019

Esercizio 1. Sia $f : X \to Y$ continua con Y Hausdorff e localmente compatto. Supponiamo che f abbia la seguente proprietà:

Per ogni compatto $K \subset Y$ esiste un compatto $H \subset X$ tale che $f(H) = K \cap f(X)$.

i) Mostrare che $f(X)$ è chiuso in Y.
ii) L'applicazione f è chiusa?

Soluzione. i) Supponiamo che f non sia suriettiva e sia $y \in Y \setminus f(X)$. Mostriamo che $Y \setminus f(X)$ contiene un intorno di y. Sia $U \subset Y$ un intorno compatto di y, e supponiamo che U non sia contenuto in $Y \setminus f(X)$. Allora, applicando la proprietà dell'enunciato al compatto $U \subset Y$, troviamo un compatto $H \subset X$ tale che $f(H) = U \cap f(X)$. Osserviamo che $f(H)$ è compatto, dunque chiuso in quanto Y è di Hausdorff. Sia U° la parte interna di U, allora $U^\circ \setminus f(H)$ è intorno aperto di y in Y, e per costruzione è contenuto in $Y \setminus f(X)$.

i) Diamo adesso un'altra soluzione del punto i), usando la nozione di spazio compattamente generato. Ricordiamo che ogni spazio localmente compatto è anche compattamente generato, vale a dire la famiglia dei sottospazi compatti è un ricoprimento fondamentale.

Pertanto $f(X)$ è chiuso in Y se e solo se $f(X) \cap K$ è chiuso in K per ogni compatto $K \subset Y$. Sia $K \subset Y$ compatto, allora per ipotesi esiste $H \subset X$ compatto tale che $f(H) = K \cap f(X)$. Pertanto $K \cap f(X)$ è compatto in quanto immagine di un compatto, dunque è chiuso in Y in quanto quest'ultimo è uno spazio di Hausdorff. In particolare $f(X) \cap K$ è chiuso in K per ogni compatto $K \subset Y$, e poiché Y è compattamente generato otteniamo che $f(X)$ è chiuso.

ii) In generale f non è chiusa. Per esempio, la proiezione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x$ verifica le ipotesi, ma non è chiusa. Se infatti $K \subset \mathbb{R}$ è compatto, allora $H = K \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ è compatto e verifica $f(H) = K$. D'altra parte f non è chiusa, infatti

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

è chiuso in $\mathbb{R}^2$ (in quanto preimmagine di un chiuso tramite l'applicazione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $(x, y) \mapsto xy$), ma $f(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è chiuso in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Sia $Z = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 - z_2 = 0\}$. Mostrare che $\mathbb{C}^2 \setminus Z$ è connesso per archi, e calcolarne il gruppo fondamentale.

Soluzione. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{C}^2 \setminus Z & \longrightarrow & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \\ & (z_1, z_2) & \longmapsto & (z_1, z_2 - z_1) \end{array}$$

Osserviamo che f è un omeomorfismo, con inversa $(w_1, w_2) \mapsto (w_1, w_1 + w_2)$. Pertanto l'esercizio si riduce a mostrare che $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ è connesso per archi, e a calcolarne il gruppo fondamentale.

Ricordiamo che il prodotto di spazi connessi per archi è connesso per archi, e gruppo fondamentale del prodotto di due spazi topologici è il prodotto diretto dei gruppi fondamentali. D'altra parte $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$ sono connessi per archi, $\mathbb{C}$ è semplicemente connesso, e vale $\pi_1(\mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{Z}$. Pertanto $\mathbb{C}^2 \smallsetminus Z$ è connesso per archi, e vale $\pi_1(\mathbb{C}^2 \smallsetminus Z) \simeq \mathbb{Z}$.

Altra soluzione. Mostriamo prima di tutto che $\mathbb{C}^2 \smallsetminus Z$ è connesso per archi. Sia $F \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ il polinomio $F(z_1, z_2) = z_1 - z_2$. Siano $p_1, p_2 \in \mathbb{C}^2 \smallsetminus Z$ e sia $\gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ definito da

$$g(z) = zp_1 + (1 - z)p_2.$$

Allora $F \circ g$ definisce un polinomio in $\mathbb{C}[z]$, che ha solamente un numero finito di radici in $\mathbb{C}$. Sia $S \subset \mathbb{C}$ l'insieme degli zeri di $F \circ g$, allora per costruzione $0, 1 \in \mathbb{C} \smallsetminus S$. Sia $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ una curva con $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = 1$ con $\gamma(t) \notin S$ per ogni $t \in [0, 1]$. Allora l'applicazione $t \mapsto F(g(\gamma(t)))$ definisce un arco in $\mathbb{C}^2 \smallsetminus Z$ che congiunge p_1 a p_2.

Calcoliamo adesso il gruppo fondamentale di $\mathbb{C}^2 \smallsetminus Z$. Sia

$$Y = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \mid z_1 + z_2 = 0\}$$

e sia $R : \mathbb{C}^2 \times [0, 1] \to \mathbb{C}^2$ l'applicazione definita da

$$R(z_1, z_2, t) = t(z_1, z_2) + \tfrac{1-t}{2}(z_1 - z_2, z_2 - z_1).$$

Allora R retrae per deformazione $\mathbb{C}^2$ su $Y \simeq \mathbb{C}$, e per restrizione induce una retrazione per deformazione di $\mathbb{C}^2 \smallsetminus Z$ su

$$Y \smallsetminus Z = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 + z_2 = 0, z_1 - z_2 \neq 0\}.$$

D'altra parte $Y \smallsetminus Z \simeq \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, pertanto otteniamo $\pi_1(\mathbb{C}^2 \smallsetminus Z) \simeq \mathbb{Z}$.

Esercizio 3. Sia $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ la curva definita da $\gamma(t) = 8e^{2\pi i t}$. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{z^4 + 1}{z^4 + 2z^2 + 1} \mathrm{d}z$$

Soluzione. Poniamo

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{z^4 + 2z^2 + 1} = \frac{z^4 + 1}{(z^2 + 1)^2}.$$

Osserviamo che f è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ tranne che in $\pm i$, dove ha poli di ordine 2. Inoltre γ ha indice 1 in tali poli, pertanto dal teorema dei residui otteniamo

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}_i(f) + 2\pi i \operatorname{Res}_{-i}(f).$$

Per calcolare il residuo di f in i, poniamo $h_1(z) = \frac{z^4+1}{(z+i)^2}$ e osserviamo che h_1 è olomorfa in i. D'altra parte

$$f(z) = \frac{1}{(z - i)^2} \cdot h_1(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{h_1^{(k)}(i)}{k!}(z - i)^{k-2},$$

pertanto $\operatorname{Res}_i(f) = h_1'(i) = \frac{i}{2}$.

Similmente, per calcolare il residuo di f in $-i$, poniamo $h_2(z) = \frac{z^4+1}{(z-i)^2}$ e osserviamo che h_2 è olomorfa in $-i$. D'altra parte

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^2} \cdot h_2(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{h_2^{(k)}(-i)}{k!}(z+i)^{k-2},$$

pertanto $\mathrm{Res}_{-i}(f) = h_2'(-i) = -\frac{i}{2}$.

Dunque l'integrale richiesto ha valore nullo.