COMPITO DI GEOMETRIA 2

6 Settembre 2019

Esercizio 1. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua, chiusa e suriettiva a fibre compatte. Mostrare che, se X è uno spazio di Hausdorff, allora anche Y lo è.

Esercizio 2. Dati $a, b \in \mathbb{Z}$, si definisca

$$\phi_{a,b} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \longmapsto \big(x + a, (-1)^a y + b\big)$$

e sia $G = \{\phi_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

i) Mostrare che G è un gruppo di omeomorfismi di $\mathbb{R}^2$ che agisce in modo propriamente discontinuo su di esso, e che tale azione identifica $\mathbb{R}^2$ con il rivestimento universale della bottiglia di Klein.

ii) Mostrare che esiste un rivestimento di grado 2 della bottiglia di Klein il cui spazio totale è omeomorfo al toro.

Esercizio 3. Sia $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ e sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto contenente $\overline{C}$. Sia $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $|f(z)| > 1$ per ogni z con $|z| \geq 1$.

i) Mostrare che f ha al più un punto fisso in C.

ii) Mostrare che f non ha punti fissi in C se e solo se ha una singolarità polare all'infinito.