COMPITO DI GEOMETRIA 2

6 Settembre 2019

Esercizio 1. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua, chiusa e suriettiva a fibre compatte. Mostrare che, se X è uno spazio di Hausdorff, allora anche Y lo è.

Soluzione. Osserviamo che in generale dati due compatti disgiunti A e B in X possiamo sempre trovare due aperti disgiunti U e V con $A \subset U$ e $B \subset V$. Questo si può vedere facilmente applicando il Teorema di Wallace alle inclusioni

$$A \times B \subset X \times X \smallsetminus \Delta \subset X \times X,$$

dove $\Delta \subset X \times X$ indica la diagonale di X. Infatti Δ è chiuso in quanto X è uno spazio di Hausdorff, dunque $X \times X \smallsetminus \Delta$ è aperto. Pertanto per il teorema di Wallace esistono aperti $U, V \subset X$ tali che $A \subset U$, $B \subset V$ e

$$U \times V \subset X \times X \smallsetminus \Delta,$$

vale a dire che U e V sono disgiunti. $\square$

Esercizio 2. Dati $a, b \in \mathbb{Z}$, si definisca

$$\phi_{a,b} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \longmapsto \big(x + a, (-1)^a y + b\big)$$

e sia $G = \{\phi_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

i) Mostrare che G è un gruppo di omeomorfismi di $\mathbb{R}^2$ che agisce in modo propriamente discontinuo su di esso, e che tale azione identifica $\mathbb{R}^2$ con il rivestimento universale della bottiglia di Klein.

ii) Mostrare che esiste un rivestimento di grado 2 della bottiglia di Klein il cui spazio totale è omeomorfo al toro.

Soluzione. i) Osserviamo che $\phi_{0,0}$ è l'identità su $\mathbb{R}^2$, e che

$$\phi_{a,b}\Big(\phi_{c,d}(x, y)\Big) = \Big(x + a + c, (-1)^{a+c}\ y + (-1)^c\ b + d\Big) = \phi_{m,n}(x, y)$$

dove abbiamo posto $m = a + c$, $n = (-1)^c\ b + d$. D'altra parte le applicazione $\phi_{a,b}$ sono tutte continue, dunque G è un sottogruppo di $\mathrm{Omeo}(\mathbb{R}^2)$ isomorfo al prodotto semidiretto $\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}$, con operazione

$$(a, b) \bullet (c, d) = (a + c, (-1)^c\ b + d)$$

Osserviamo che l'azione di G su $\mathbb{R}^2$ è libera, e che gli omeomorfismi $\phi_{a,b}$ preservano la distanza euclidea: infatti

$$\phi_{a,b}(x, y) - \phi_{a,b}(x_0, y_0) = \big(x - x_0, (-1)^a (y - y_0)\big).$$

Dunque se $D \subset \mathbb{R}^2$ è un qualsiasi disco di raggio minore di $1/2$ e $g \in G$, vediamo che $gD \cap D \neq \emptyset$ se e solo se $g = \mathrm{id}$. Pertanto l'azione di G su $\mathbb{R}^2$ è propriamente discontinua ed otteniamo un rivestimento

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/G =: K$$

Sia Q_0 il quadrato di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Osserviamo che $\phi_{a,b}(Q_0)$ è il quadrato di vertici (a,b), $(a+1,b)$, $(a,(-1)^a+b)$, $(a+1,(-1)^a+b)$. Dunque Q_0 è un dominio fondamentale per l'azione, e l'azione di G induce su Q_0 le usuali identificazioni che definiscono la bottiglia di Klein. Poiché il ricoprimento $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{g\in G} gQ_0$ è localmente finito, vediamo che l'azione di G su $\mathbb{R}^2$ è propria. Pertanto $\mathbb{R}^2/G$ è uno spazio di Hausdorff e, detta $\sim$ la relazione indotta su D, vediamo che l'applicazione naturale $D/\sim\ \to \mathbb{R}^2/G$ induce un omeomorfismo di $\mathbb{R}^2/G$ con la bottiglia di Klein. Poiché $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, vediamo che la proiezione al quoziente $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/G$ si identifica con il rivestimento universale della bottiglia di Klein.

ii) Sia $H = \{\phi_{2a,b} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$. Allora H è un sottogruppo di G che agisce ancora in modo propriamente discontinuo, e con dominio fondamentale il rettangolo R_0 di vertici $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,0)$, $(1,2)$, vale a dire

$$R_0 = Q_0 \cup \phi_{0,1}(Q_0)$$

Osserviamo che le relazioni sul bordo di R_0 sono quelle che definiscono il toro. Pertanto troviamo un rivestimento del toro

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/H =: T$$

Osserviamo anche che H è un sottogruppo di indice 2 in G, dunque è normale. Pertanto il gruppo quoziente G/H agisce sul toro $\mathbb{R}^2/H$. Consideriamo le proiezioni al quoziente

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{R}^2/H \xrightarrow{q} (\mathbb{R}^2/H)/(G/H).$$

Osserviamo che, dalla definizione della topologia quoziente su $\mathbb{R}^2/H$, il gruppo quoziente G/H agisce su $\mathbb{R}^2/H$ tramite omeomorfismi: se infatti $V \subset \mathbb{R}^2/H$ è aperto, allora $p^{-1}(gH.V) = g.p^{-1}(V)$ è anch'esso aperto.

Osserviamo anche le G/H-orbite in $\mathbb{R}^2/H$ corrispondono in modo canonico con le G-orbite in $\mathbb{R}^2$, dunque dati $x,y \in \mathbb{R}^2$ abbiamo $p(q(x)) = p(q(y))$ se e solo se $Gx = Gy$. D'altra parte un insieme $V \subset (\mathbb{R}^2/H)/(G/H)$ è aperto se e solo se $q^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^2/H$ è aperto, se e solo se $(p\circ q)^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^2$ è aperto. Pertanto abbiamo un omeomorfismo

$$(\mathbb{R}^2/H)/(G/H) \simeq \mathbb{R}^2/G.$$

Osserviamo infine che G/H agisce su $\mathbb{R}^2/H$ in modo propriamente discontinuo. Se infatti $U \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto tale che $gU \cap U = \emptyset$ per ogni $g \neq \mathrm{id}$, allora $p(U) \subset \mathbb{R}^2/H$ è anche aperto, ed ha la proprietà $gH.p(U) \cap p(U) = \emptyset$ per ogni $g \notin H$. Infatti $gH.p(U) \cap p(U) \neq \emptyset$ se e solo se esistono $h_1, h_2 \in H$ tali che $gh_1U \cap h_2U \neq \emptyset$ se e solo se $gh_1 = h_2$, vale a dire $g \in H$.

Pertanto la proiezione $q : \mathbb{R}^2/H \to \mathbb{R}^2/G$ definisce un rivestimento di grado 2 della bottiglia di Klein il cui spazio totale è omeomorfo al toro. □

Esercizio 3. Sia $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ e sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto contenente $\overline{C}$. Sia $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $|f(z)| > 1$ per ogni z con $|z| \geq 1$.

i) Mostrare che f ha al più un punto fisso in C.
ii) Mostrare che f non ha punti fissi in C se e solo se ha una singolarità polare all'infinito.

Soluzione. i) Sia $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ e sia $V = \{z^{-1} \mid z \in U\} \cup \{0\}$. Allora V è un aperto di C contenente D. Consideriamo la funzione

$$F : V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad\qquad w \longmapsto 1/f(1/w)$$

Dunque F è una funzione olomorfa, con una singolarità isolata in 0. Se $|z| \geq 1$, allora $f(z) = z$ se e solo se $F(1/z) = 1/z$, pertanto i punti fissi di F in $D \setminus \{0\}$ sono tutti e soli gli inversi dei punti fissi di f in C.

Vediamo che 0 è una singolarità eliminabile per F: infatti

$$|F(z)| = |f(1/z)|^{-1} < 1$$

per ogni z non nullo con $|z| \leq 1$, pertanto F è limitata in un intorno di 0, che è dunque una singolarità eliminabile.

Applichiamo il teorema di Rouché alla funzioni $g(z) = F(z) - z$ e $h(z) = z$ sul compatto $\overline{D}$. Se $|z| = 1$, allora

$$|g(z) + h(z)| = |F(z)| < 1 = |h(z)|.$$

Dal teorema di Rouché, segue che $g(z)$ e $h(z)$ hanno lo stesso numero di zeri in $\overline{D}$. Poiché $h(z)$ ha un unico zero in $\overline{D}$, segue che $F(z) - z$ anche ha un unico zero in $\overline{D}$. D'altra parte gli zeri di $F(z) - z$ sono esattamente i punti fissi di F, pertanto F ha esattamente un punto fisso in $\overline{D}$. Dunque f ha al più un punto fisso un C. Se inoltre $z_0 \in D$ è il punto fisso di F, allora vediamo che f ha un punto fisso in C se e solo e $z_0 \neq 0$, nel qual caso l'unico punto fisso è $1/z_0$.

ii) Nelle notazioni del punto precedente, segue da quanto mostrato che f ha un punto fisso in C se e solo se F ha un punto fisso in $D \setminus \{0\}$ se e solo se F non ha un punto fisso in 0. D'altra parte, F ha un punto fisso in 0 se e solo se $F(0) = 0$ se e solo se f ha un polo all'infinito. $\square$