El volumen simplicial: una Introducción

Marco Moraschini,
Departamento de Matemática - Universidad de Pisa

Definición

Definición 1. *Sea M una variedad orientada, cerrada y conexa de dimensión n. El* volumen simplicial *de M, $\|M\|$, es*

$$\|[M]\|_1 = \inf\{|c|_1 \,|c \in C_n(M;\mathbb{R}) \text{ ciclo fundamental de } M\} \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

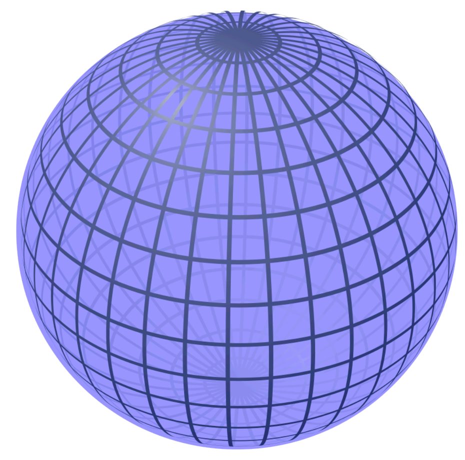
donde $[M] \in H_n(M;\mathbb{R})$ es la clase fundamental de M.

Observación 1. *Si $c = \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot \sigma_j \in C_*(M;\mathbb{R})$, la ℓ^1*-norma *de c es*

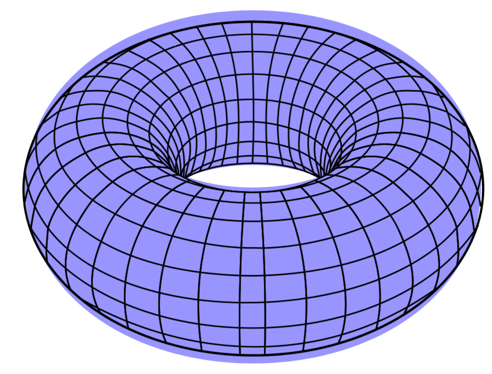
$$|c|_1 := \sum_{j=0}^{k} |a_j|.$$

La ℓ^1-semi-norma *$\|\cdot\|_1$ viene inducida en $H_*(M;\mathbb{R})$ por $|\cdot|_1$.*

Ejemplos



$\|\mathbb{S}^2\| = 0;$



$\|\mathbb{T}^2\| = 0;$

$\|\mathbb{RP}^{2n+1}\| = 0;$

$\|\mathbb{CP}^n\| = 0.$

Propiedades Básicas

Proposición 1. *Si $f\colon M \to N$ es una aplicación entre variedades cerradas, orientables y conexas de la misma dimension, entonces $|deg(f)| \cdot \|N\| \leq \|M\|$.*

Corolario 1. *El volumen simplicial es un invariante homotópico de variedades orientables, cerradas y conexas.*

Consecuencias geométricas

Definición 2. *El* volumen mínimo *de una variedad diferenciable M es*

$$Minvol(M) := \inf_g\{Vol(M,g)\},$$

donde g es una métrica Riemanniana completa con $|sec(g)| \leq 1$.

Teorema 3 (Desigualdad fundamental)**.** *Todas las variedades conexas, orientadas, cerradas y diferenciables son tales que*

$$\|M\| \leq \frac{n! \cdot (n-1)^2}{n^{\frac{n}{2}}} \cdot Minvol(M).$$

Teorema 4. *Sea (M,g) una variedad Riemanniana cerrada, orientada y conexa con $sec(g) \leq \delta < 0$, entonces*

$$\|M\| > C(n,\delta) \cdot Vol(M).$$

Bibliografía

[1] M. Gromov, *Volume and Bounded Cohomology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1982.

[2] W. P. Thurston, *The Geometry and Topology of 3-Manifolds*, Lecture notes, Princeton, 1978.

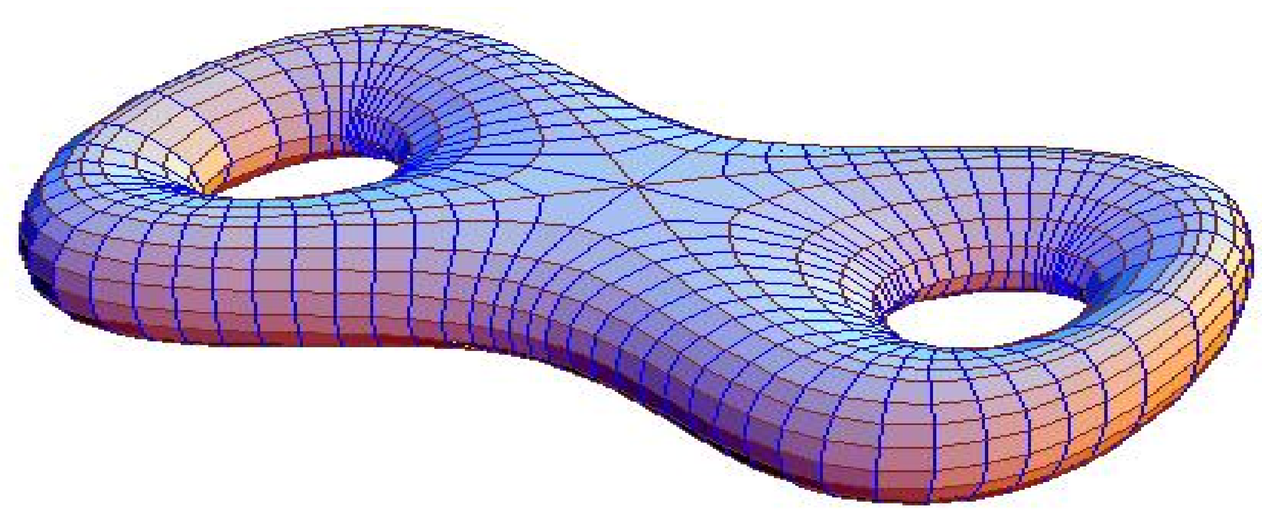
Promediabilidad

Teorema 1. *Si M tiene grupo fundamental promediable, entonces $\|M\| = 0$.*

Teorema 2 (Mapping Theorem)**.** *Si $f\colon M \to N$ es una aplicación de grado 1 con núcleo promediable, entonces*

$$\|M\| = \|N\|.$$

Ejemplo



$\|\Sigma_g\| = 4g - 4 > 0, \; g \geq 2.$

Aplicaciones

Teorema 5 (Mostow Rigidity)**.** *Sean M y N dos 3-variedades hiperbólicas. Entonces cada equivalencia de homotopía $f\colon M \to N$ es homotopa a una isometría entre M y N.*

Teorema 6. *El Dehn filling hiperbólico de una 3-variedad M completa y de volumen finito tiene volumen menor que el de M.*

Conjetura 1 (Gromov)**.** *Si M es asférica, cerrada y orientada, entonces*

$$\|M\| = 0 \Rightarrow \chi(M) = 0.$$