
Metodi Numerici per l'ingegneria LS

a.a. 2008-2009

● Sistemi Lineari: Condizionamento

Fabiana Zama

<http://www.dm.unibo.it/~zama>

zama@dm.unibo.it

Sistemi Lineari

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n & = & b_n \end{array}$$

\Downarrow

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Teorema 1 (Rouchè Capelli) *Il sistema lineare ammette soluzione unica se e solo se le matrici \mathbf{A} e $[\mathbf{Ab}]$ hanno lo stesso rango.*

Condizionamento

Sia \mathbf{x}^* tale che $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$ si studia la soluzione del sistema perturbato:

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$$

dove $\Delta\mathbf{A}$ rappresenta la perturbazione sulla matrice del sistema, mentre $\Delta\mathbf{b}$ identifica la perturbazione sul termine noto.

Esempio: Si risolvono i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 1.000x_1^* + 2.000x_2^* &= 3.000 \\ 0.499x_1^* + 1.001x_2^* &= 1.500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 1. \\ x_2^* = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.000\tilde{x}_1 + 2.000\tilde{x}_2 &= 3.000 \\ 0.500\tilde{x}_1 + 1.002\tilde{x}_2 &= 1.500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}_1 = 3. \\ \tilde{x}_2 = 0. \end{cases}$$

Esempio

Si osserva che una piccola perturbazione nella matrice ha prodotto un grande cambiamento nella soluzione.

- Cambiamento nella matrice:

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.001 & 0.001 \end{pmatrix} \quad \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \approx 5.7 \cdot 10^{-4}$$

- Cambiamento nella soluzione:

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}^*\|} \approx 1.58$$

- Problemi con tale comportamento si dicono **MAL CONDIZIONATI**.
- A piccole perturbazioni nei dati corrispondono grandi perturbazioni nei risultati.

Sistema ben Condizionato:

Consideriamo i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 2.000x_1 - 1.000x_2 &= -1.000 \\ -1.000x_1 + 2.000x_2 &= 5.000 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1^* = 1. \\ x_2^* = 3. \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2.000\tilde{x}_1 - 1.000\tilde{x}_2 &= -1.000 \\ -1.001\tilde{x}_1 + 2.001\tilde{x}_2 &= 5.000 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \tilde{x}_1 = 0.99993 \\ \tilde{x}_2 = 2.9987 \end{matrix}$$

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.001 & 0.001 \end{pmatrix} \quad \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \approx 4.7 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}^*\|} \approx 4.7 \cdot 10^{-4}$$

Numero di Condizione

Dati

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \text{e} \quad (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$$

si vuole stimare:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \dots$$

Si introducono le funzioni dipendenti da un parametro:

$$A(t) = A + t\Delta A, \quad b(t) = b + t\delta b, \quad x(t) = x + t\delta x$$

Si studia il sistema $A(t)x(t) = b(t)$ differenziando rispetto a t

$$A'(t)x(t) + A(t)x'(t) = b'(t) \implies \Delta Ax(t) + A(t)\delta x = \delta b$$

Calcolando la relazione in $t = 0$ si ha:

$$\delta x = A^{-1}\delta b - A^{-1}\Delta Ax$$

Numero di Condizione

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta b\| + \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|x\|$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\delta b\|}{\|x\|} + \|A^{-1}\| \|\Delta A\|$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \|A^{-1}\| \|\delta b\|}{\|A\| \|x\|} + \frac{\|A\| \|A^{-1}\| \|\Delta A\|}{\|A\|}$$

\Downarrow

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

NUMERO di CONDIZIONE $K(A)$

Numero di Condizione

- $K(\mathbf{A})$ piccolo $\sim n^p$, $p = 0, 1, 2, 3$ Problema ben condizionato.
- $K(\mathbf{A})$ grande $\sim 10^n$, Problema mal condizionato. **Esempio:** La matrice di hilbert è mal condizionata:

$$h_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

- Il numero di condizione dipende dalla norma utilizzata:
 $K_1(\mathbf{A}) = \|A^{-1}\|_1 \|A\|_1$, $K_\infty(\mathbf{A}) = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty$, $\mu_2(\mathbf{A}) = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2$
- Per tutte le norme ℓ_p $K_p(\mathbf{A}) \geq 1$ infatti

$$1 = \|\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}\|_p \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|_p \|\mathbf{A}\|_p$$

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{Ax}\|_p, \quad \|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Numero di Condizione

- $K(\mathbf{A}) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \alpha \mathbf{Q}$ tale che $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{Q}^t \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ matrice ortogonale.
- Il numero di condizione è invariante per trasformazioni ortogonali:

$$\mu_2(\mathbf{A}) = \mu_2(\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q})$$

- Il reciproco di $K(\mathbf{A})$ può essere usato come indicatore della distanza di \mathbf{A} dall'insieme delle matrici singolari. Infatti si dimostra

$$\frac{1}{K(\mathbf{A})} = \min_{\mathbf{B}} \frac{\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|}{\|\mathbf{A}\|}, \quad \mathbf{B} \text{ matrice singolare}$$

Dunque \mathbf{A} può essere ben approssimata in senso relativo da una matrice singolare soltanto se $K(\mathbf{A})$ è grande.

Matrici a Banda

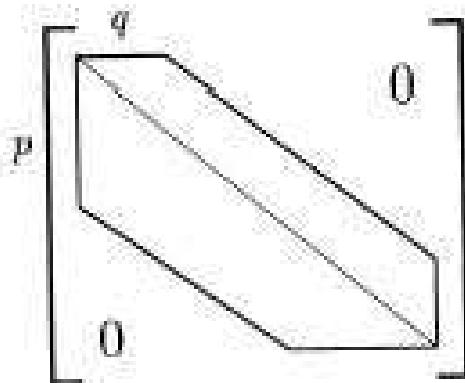
- Una matrice è chiamata a banda quando gli elementi che possono essere diversi da zero sono concentrati vicino alla diagonale.

- Si dice che A ha una banda inferiore q se

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{per } j > i + q$$

- Si dice che A ha una banda superiore p se

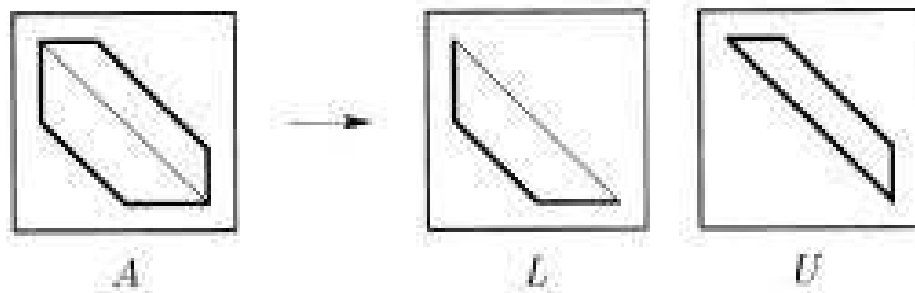
$$a_{i,j} = 0 \quad \text{per } i > j + p$$



Fattorizzazione di Matrici a Banda

Si può dimostrare che i fattori \mathbf{L} e \mathbf{U} della fattorizzazione possono essere calcolati in maniera da conservare la struttura a banda.

Supponiamo che la matrice \mathbf{A} di ordine n abbia fattorizzazione $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ allora se \mathbf{A} ha banda superiore q e banda inferiore p , la matrice \mathbf{U} ha banda superiore q e la matrice \mathbf{L} ha banda inferiore p .



Esempio

Si descrivono i passi per la fattorizzazione di una matrice a banda con $p = 2$ e $q = 1$. Si osserva che ad ogni passo del procedimento di eliminazione si opera su una sottomatrice 3×2 .

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

In generale per una matrice a banda (p, q) si opera su sottomatrici $(p + 1) \times (q + 1)$.

Esempio

Si ha quindi la seguente fattorizzazione:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- L'algoritmo di Gauss senza scambio di righe può essere implementato per matrici di banda (p, q) con complessità computazionale:

$$\begin{cases} npq - \frac{1}{2}pq^2 - \frac{1}{6}p^3 + pn & \text{se } p \leq q \\ npq - \frac{1}{2}p^2q - \frac{1}{6}q^3 + qn & \text{se } p > q \end{cases}$$

Sistemi Tridiagonali

Si considera il sistema tridiagonale: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{z}$ con \mathbf{A} matrice tridiagonale e $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & b_n & c_n \end{bmatrix}$$

- In assenza di pivoting, la fattorizzazione LU può essere calcolata in modo efficiente mantenendo la struttura a banda originaria.
- Se è necessario effettuare scambio di righe, il risultato sarà ancora una matrice a banda ma con ampiezza al più $p + q + 1$.

Fattorizzazione senza Pivot

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Fattorizzazione senza Pivot

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{matrix}$$

Fattorizzazione senza Pivot

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{matrix} \Rightarrow$$

Fattorizzazione senza Pivot

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{matrix} \Rightarrow r_2 = r_2 - 2r_1 \rightarrow \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Fattorizzazione senza Pivot

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} r_2 = r_2 - 2r_1 \rightarrow 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ r_3 = r_3 - 3r_2 \rightarrow 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Fattorizzazione senza Pivot

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} r_2 = r_2 - 2r_1 \rightarrow & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ r_3 = r_3 - 3r_2 \rightarrow & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ r_4 = r_4 - 4r_3 \rightarrow & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Fattorizzazione senza Pivot

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} r_2 = r_2 - 2r_1 \rightarrow 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ r_3 = r_3 - 3r_2 \rightarrow 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ r_4 = r_4 - 4r_3 \rightarrow 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ r_5 = r_5 - 2r_4 \rightarrow 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Fattorizzazione senza Pivot

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} r_2 = r_2 - 2r_1 \rightarrow 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ r_3 = r_3 - 3r_2 \rightarrow 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ r_4 = r_4 - 4r_3 \rightarrow 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ r_5 = r_5 - 2r_4 \rightarrow 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemi Tridiagonali

Si ha la seguente decomposizione:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ \beta_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & & & \beta_n & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & & & 0 \\ 0 & \alpha_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & \alpha_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & & & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Dove α_i, β_i sono determinati come segue:

$$\alpha_1 = a_1$$

$$\beta_k = \frac{b_k}{\alpha_{k-1}}, \quad \alpha_k = a_k - \beta_k c_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

Sistemi Tridiagonali

Il sistema diventa allora:

$$\mathbf{LU}\mathbf{x} = \mathbf{z}, \quad \begin{cases} \mathbf{Ly} = \mathbf{z} \\ \mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

da cui

$$y_1 = z_1, \quad y_i = z_i - \beta_i y_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$x_n = \frac{y_n}{\alpha_n}, \quad x_i = \frac{y_i - c_i x_{i+1}}{\alpha_i}, \quad i = n-1, \dots, 2, 1$$

Complessità dell'algoritmo: $3(n-1)$ moltiplicazioni e $2n-1$ divisioni.

Sistemi Tridiagonali

- Si definisce A matrice a diagonale dominante se:

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$$

- Una matrice tridiagonale è diagonale dominante se:

$$|a_i| > |b_i| + |c_i|, \quad i = 1, \dots, n$$

l'algoritmo di eliminazione mantiene la proprietà di diagonale dominante.

- Se A è a diagonale dominante non occorre pivoting nella fattorizzazione.