Formule di Quadratura

Una prima analisi del problema

Dott. Francesca Incensi: francesca.incensi3@unibo.it

Formule di Quadratura

- **Formule di Newton-Cotes**
  - Trapezi
  - Simpson
  - 3/8
  - Punto medio
  - Composite

Formule tipo interpolatorio

$$I(f;a,b)=\int_a^b f(x)dx \quad \Rightarrow \quad I_n(f;a,b)=\int_a^b f_n(x)dx$$

Approssimazione di *f(x)*

Se $f \in C^0([a,b])$ l'errore di quadratura $E_n(f) = I(f) - I_n(f)$

soddisfa $$|E_n(f)| \le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \le (b-a)\|f - f_n\|_\infty$$

e dunque, se per qualche n, $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$ si avrà

$$|E_n(f)| \le \varepsilon(b-a)$$

3

Formule tipo interpolatorio

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$$

Coefficienti o pesi **Nodi**

$$I_n(f) = \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b L_i(x)dx$$

Polinomio interpolante di Lagrange

4

Formule tipo interpolatorio

Grado di precisione o esattezza

Il massimo intero $r \geq 0$ per il quale si abbia

$$I(f) = I_n(f) \qquad \forall f \in \mathbf{P}_r$$

Ogni formula **interpolatoria** che faccia uso di *n+1* nodi distinti ha ***grado di precisione almeno n.***

5

Formule di quadratura di Newton-Cotes nodi equispaziati

- **Newton-Cotes Chiuse**
  Usano entrambi gli estremi di integrazione
  - formula dei Trapezi: Lineare
  - formula di Simpson 1/3: Quadratica
  - formula di Simpson 3/8: Cubica
  - formula di Boole: 4°-ordine
- **Newton-Cotes aperte**
  Usano solo punti interni
  - formula del punto medio

6

Formula dei Trapezi

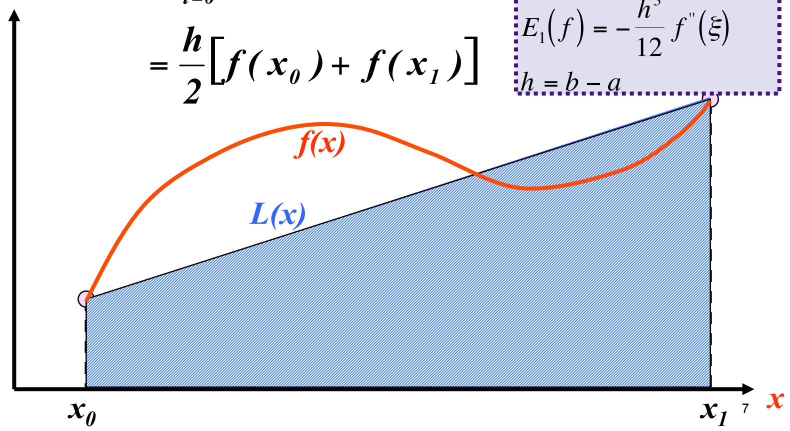
- **Approssimazione lineare**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{1} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right]$$

$$E_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

$$h = b - a$$



7

Formula dei Trapezi

- **Interpolazione di Lagrange**

$$L(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

sia $a = x_0, \; b = x_1, \; \xi = \dfrac{x-a}{b-a}, \; d\xi = \dfrac{dx}{h}; \; h = b - a$

$$\begin{cases} x = a \Rightarrow \xi = 0 \\ x = b \Rightarrow \xi = 1 \end{cases} \Rightarrow L(\xi) = (1-\xi) f(a) + \xi f(b)$$

8

Formula dei Trapezi

- **Integrando**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L(x)dx = h\int_0^1 L(\xi)d\xi =$$

$$= f(a)h\int_0^1 (1-\xi)d\xi + f(b)h\int_0^1 \xi d\xi =$$

$$= f(a)h\left(\xi - \frac{\xi^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + f(b)h\frac{\xi^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

Formula di Cavalieri-Simpson 1/3

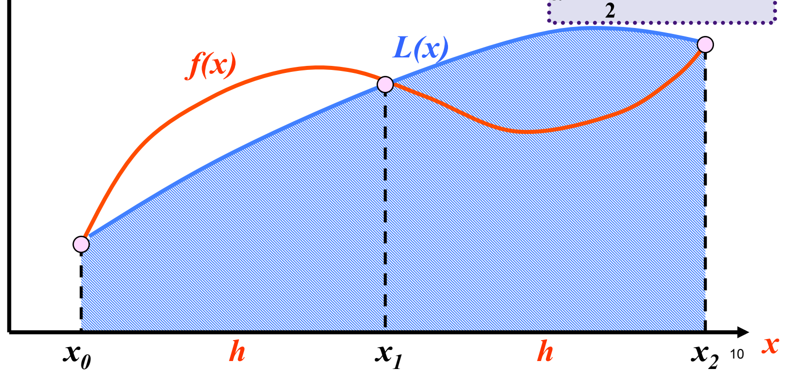
Approssima la funzione con una parabola

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{2} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$



Formula dei 3/8

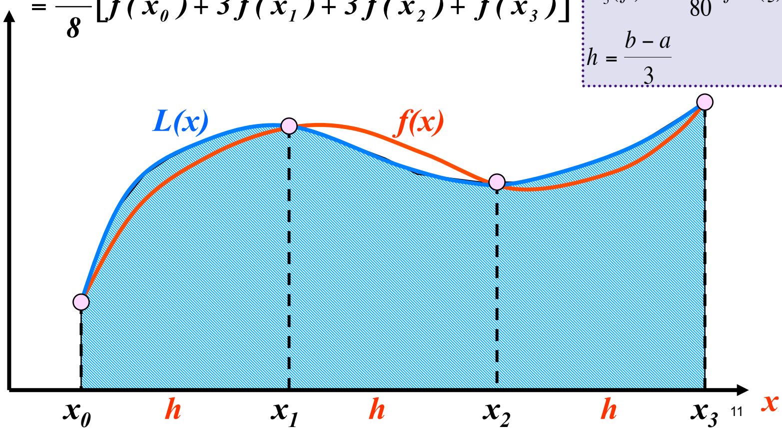
Approssimiamo con un polinomio cubico

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{3} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

$$= \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

$$E_3(f) = -\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$$

$$h = \frac{b-a}{3}$$



11

Formula del punto medio

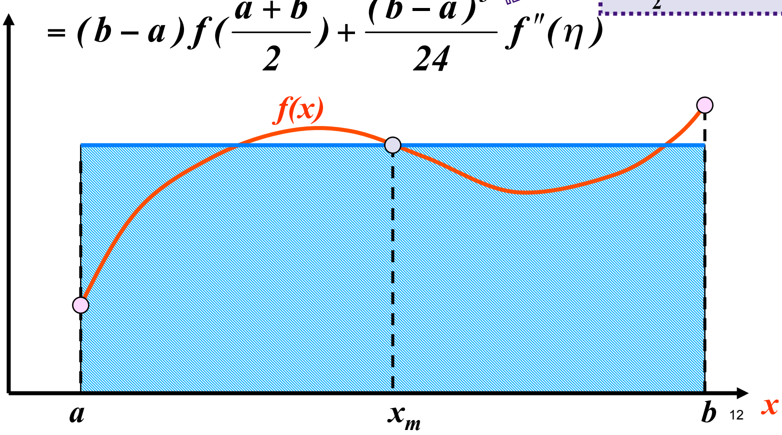
Formula di Newton-Cotes aperta

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(x_m)$$

$$= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$$

$$E_0(f) = \frac{h^3}{3} f''(\xi)$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

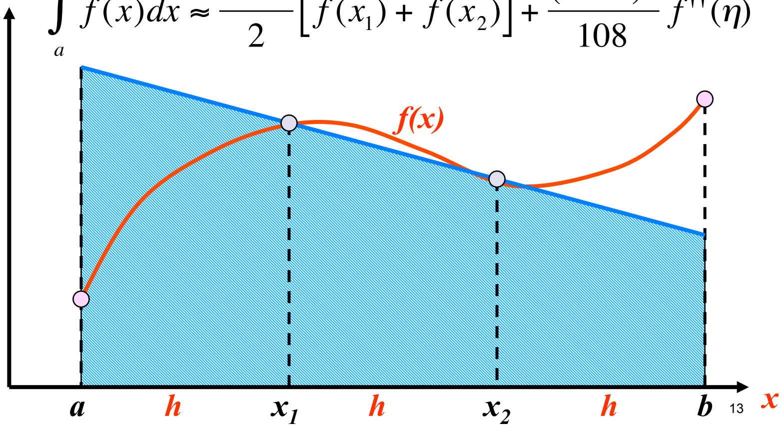


12

Formula di Newton-Cotes aperta con due punti

Approssimazione lineare (nodi equispaziati)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]+\frac{(b-a)^3}{108}f''(\eta)$$

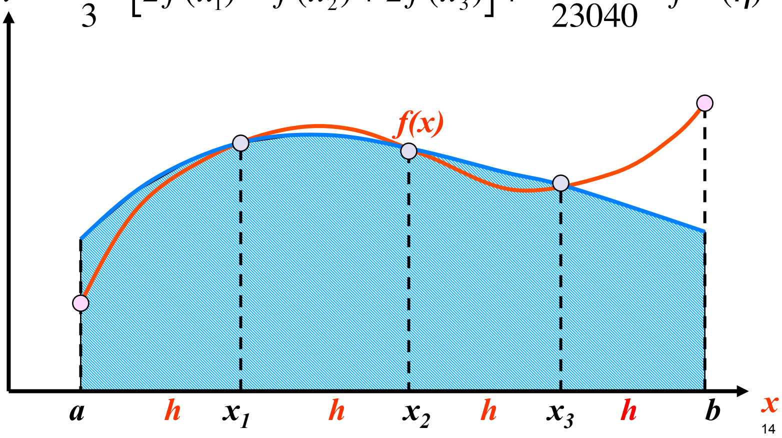


13

Formula di Newton-Cotes aperta con tre punti

Approssima la funzione con una parabola (nodi equispaziati)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3}\left[2f(x_1)-f(x_2)+2f(x_3)\right]+\frac{7(b-a)^5}{23040}f^{(4)}(\eta)$$



14

Formula di Newton-Cotes
nodi equispaziati

Nodi equidistanti in [a,b] $x_k = x_0 + kh \qquad k = 0,1,\dots,n$

Formule chiuse: $x_0 = a \quad x_n = b \quad h = \dfrac{b-a}{n} \quad (n \geq 1)$

Formule aperte: $x_0 = a + h \quad x_n = b - h \quad h = \dfrac{b-a}{n+2} \quad (n \geq 0)$

I pesi dipendono solo da *n* e *h*, ma <u>non</u> dall'intervallo di integrazione [a,b]

15

Formula di Newton-Cotes
nodi equispaziati

I pesi dipendono solo da *n* e *h*, ma <u>non</u> dall'intervallo di integrazione [a,b]

Caso formule chiuse.
Cambio di variabile $x = \psi(t) = x_0 + th$

Notando che $\psi(0) = a \quad \psi(n) = b \quad x_k = a + kh$

$$\frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{a + th - (a + kh)}{a + ih - (a + kh)} = \frac{t - k}{i - k}$$

16

Formula di Newton-Cotes nodi equispaziati

Pertanto, se $n \geq 1$ risulta

$$L_i(x) \rightarrow \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{t-k}{i-k} = \varphi_i(t) \qquad 0 \leq i \leq n$$

Per i pesi si ha allora $\alpha_i = \int_a^b L_i(x)dx = \int_0^n \varphi_i(t)hdt = h\int_0^n \varphi_i(t)dt$

Da cui si ottiene la formula di quadratura:

$$\boxed{I_n(f) = h\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \qquad w_i = \int_0^n \varphi_i(t)dt}$$

Analogamente per le formule aperte:

$$\boxed{I_n(f) = h\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \qquad w_i = \int_{-1}^{n+1} \varphi_i(t)dt \quad x_{-1} = a \quad x_{n+1} = b}$$

17

Formula di Newton-Cotes nodi equispaziati

Formula con *n* pari (numero di punti dispari) aperte o chiuse

$$E_n(f) = \frac{M_n}{(n+2)!} h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi) \qquad \text{purchè} \quad f \in C^{n+2}([a,b]) \quad \text{dove } \xi \in (a,b)$$

$$M_n = \begin{cases} \int_0^n t\pi_{n+1}(t)dt < 0 & \textit{per formule chiuse} \\ \int_{-1}^{n+1} t\pi_{n+1}(t)dt > 0 & \textit{per formule aperte} \end{cases}$$

avendo definito

$$\pi_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^{n} (t-i)$$

Grado di precisione: *n+1*
Ordine di infinitesimo: *n+3*

18

Formula di Newton-Cotes nodi equispaziati

Formula con n dispari (numero di punti pari) aperte o chiuse

$$E_n(f) = \frac{K_n}{(n+1)!} h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta) \qquad \text{purchè} \quad f \in C^{n+1}([a,b]) \quad \text{dove } \eta \in (a,b)$$

$$K_n = \begin{cases} \int_0^n \pi_{n+1}(t)\,dt < 0 & \textit{per formule chiuse} \\ \int_{-1}^{n+1} \pi_{n+1}(t)\,dt > 0 & \textit{per formule aperte} \end{cases}$$

avendo definito

$$\pi_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - i)$$

Grado di precisione: *n*
Ordine di infinitesimo: *n*+2

19

Pesi per Newton-Cotes nodi equispaziati

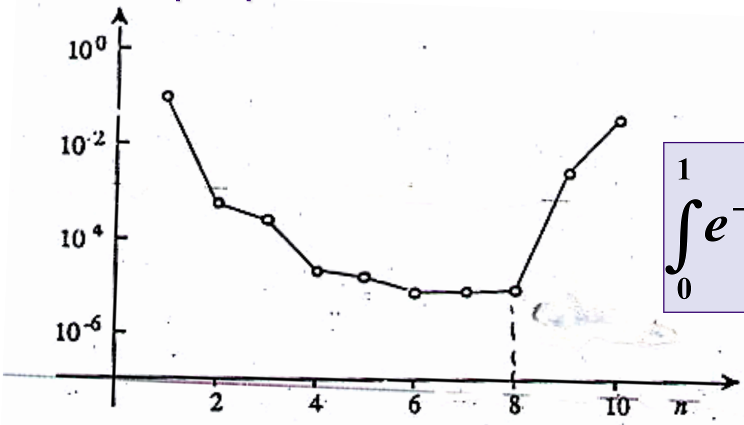
Tabella

I valori sulla riga i vanno divisi per k(i) per ottenere i giusti coefficienti

(n,i)	1	2	3	4	5	6	7	8	**k**
1	1	1							**2**
2	1	4	1						**6**
3	1	3	3	1					**8**
4	7	32	12	32	7				**90**
5	19	75	50	50	75	19			**288**
6	41	216	27	272	27	216	41		**840**
7	5257	25039	9261	20923	20923	9261	25039	5257	**120960**

20

Formula di Newton-Cotes
nodi equispaziati



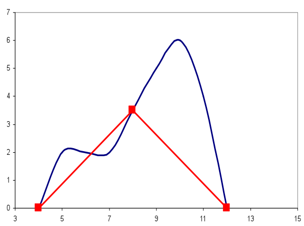
$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

- Errore relativo nel calcolo delle formule di Newton-Cotes per l'approssimazione di $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

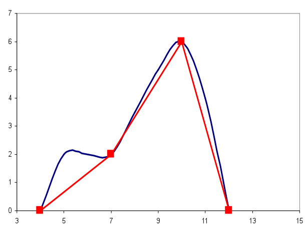
21

Per migliorare: Formule Composite

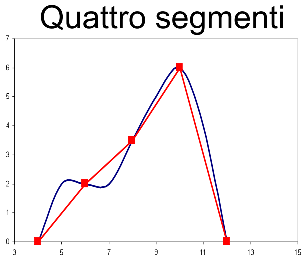
Due segmenti



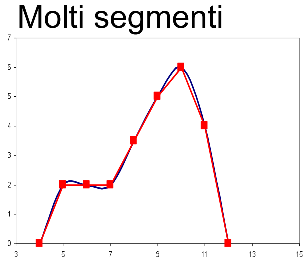
Tre segmenti



Quattro segmenti



Molti segmenti



22

Formula dei Trapezi Composita

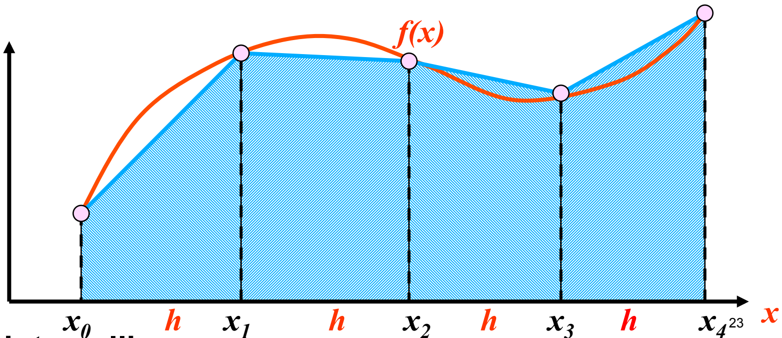
$$E_T^n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots\cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_i) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$



n **sottointervalli**

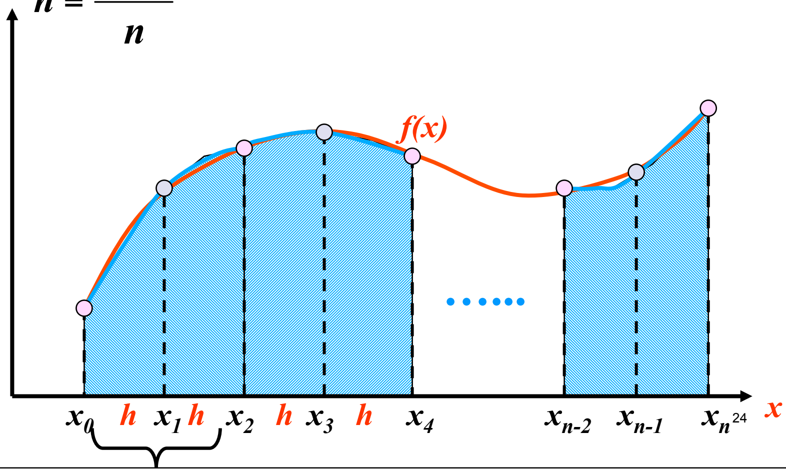
23

Formula di Simpson Composita

Approssimazione quadratica a tratti

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Osservare ***h, n***



24

Formula di Simpson Composita

Applicazione Multipla della formula di Simpson

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] + \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$

$$+ \cdots + \frac{h}{3}\left[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots\right.$$

$$+ 4f(x_{2i-1}) + 2f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + \cdots$$

$$\left. + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$E_T^n = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\xi)$$

25

Formule di quadratura Gaussiane

- **Formule di Newton-Cotes**
  - usano valori delle funzioni su punti equispaziati

- **Formule Gaussiane**
- seleziona i valori della funzione su punti non uniformemente distribuiti per ottenere maggiore precisione
- cambio di variabile per avere come intervallo di integrazione [-1,1]
- Formule di Gauss-Legendre

26