
Metodi Numerici per l'Ingegneria LS

a.a. 2008-2009

Fabiana Zama

<http://www.dm.unibo.it/~zama>

zama@dm.unibo.it

Problemi Differenziali con condizioni al contorno

- Problema del secondo ordine non lineare:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b$$

con condizioni al bordo:

- Dirichlet: $y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$
- Neumann: $y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta$
- Robin (Miste):

$$a_0 y(a) - a_1 y'(a) = \alpha, \quad |a_0| + |a_1| \neq 0$$

$$b_0 y(b) + b_1 y'(b) = \beta, \quad |b_0| + |b_1| \neq 0$$

Problemi Lineari

Il problema del secondo ordine lineare:

$$Ly \equiv -y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad a < x < b$$

$$a_0y(a) - a_1y'(a) = \alpha, \quad b_0y(b) + b_1y'(b) = \beta$$

ammette un'unica soluzione $\forall \alpha, \beta$ se:

- $p(x), q(x), r(x)$ sono continue in $[a, b]$;
- $a_0a_1 \geq 0, \quad b_0b_1 \geq 0, \quad |a_0| + |b_0| \neq 0$
- $|a_0| + |a_1| \neq 0, \quad |b_0| + |b_1| \neq 0$

Metodi per la soluzione numerica

- Metodi alle differenze
- Metodi di proiezione

Metodo alle differenze (Esempio)

Si considera il problema:

$$Ly \equiv -y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad a < x < b$$

con condizioni di Dirichlet:

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

Si definisce una partizione uniforme dell'intervallo $[a, b]$:

$$x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, \dots, J+1, \quad h = \frac{b-a}{J+1}$$

Si approssima la soluzione mediante:

$$L_h[u_j] \equiv -\left(\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}\right) + p(x_j)\left(\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}\right) + q(x_j)u_j = r(x_j)$$

$$j = 1, \dots, J \quad u_0 = \alpha, \quad u_{J+1} = \beta$$

••

da cui:

$$\frac{h^2}{2} L_h[u_j] \equiv a_j u_{j-1} + b_j u_j + c_j u_{j+1} = \frac{h^2}{2} r(x_j), \quad 1 \leq j \leq J$$

con

$$a_j \equiv -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{h}{2} p(x_j) \right], \quad b_j \equiv \left[1 + \frac{h^2}{2} q(x_j) \right], \quad c_j \equiv -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{h}{2} p(x_j) \right],$$

Metodi alle differenze

- Si ottiene il sistema lineare: $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{r}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_J & b_J \end{pmatrix}, \mathbf{r} = \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} r(x_1) \\ r(x_2) \\ \vdots \\ r(x_J) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ c_J \beta \end{pmatrix}$$

- Se $\exists P^*, Q_*, Q^*$ costanti positive:

$$|p(x)| \leq P^*, \quad 0 < Q_* \leq q(x) \leq Q^* \quad \forall x \in [a, b]$$

e vale che $h \leq 2/P^*$ allora il sistema tridiagonale ammette un'unica soluzione che può essere ottenuta con fattorizzazione LU senza pivot.

Metodi di Proiezione

- Metodo agli elementi Finiti, Metodo di Galerkin, Metodo di Rayleigh-Ritz;
- Si determina la soluzione dell'equazione differenziale mediante una **combinazione lineare** finita di **funzioni di base** (trial functions);
- Principali funzioni di base:
 - polinomi
 - funzioni Bspline
 - funzioni trigonometriche
- Si considera la soluzione in uno spazio funzionale di dimensioni infinita e si cerca di ottenere un'approssimazione della soluzione nel sottospazio di dimensione finita generato dalle funzioni di base (proiezione).

Introduzione

Si considera il seguente problema:

$$(p(x)v')' + q(x)v = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad v(0) = v(1) = 0$$

Si determina una soluzione approssimata della forma:

$$u(x) = \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(x)$$

dove ϕ_1, \dots, ϕ_n è un insieme di funzioni di base tali che:

$\phi_j(0) = \phi_j(1) = 0, \quad j = 1, \dots, n$ Per determinare i coefficienti c_j si hanno i seguenti metodi:

- Metodo di Collocazione
- Metodo di Galerkin

Metodo di Collocazione

Siano x_1, x_2, \dots, x_n punti non necessariamente equidistribuiti nell'intervallo $[0, 1]$. Si richiede che la soluzione approssimata soddisfi l'equazione differenziale in questi n punti:

$$\left. \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \left(\sum_{j=1}^n c_j \phi_j(x) \right) \right] \right|_{x_i} + q(x_i) \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(x_i) = f(x_i)$$

$i = 1, \dots, n$ Si suppone che le funzioni di base siano differenziabili fino al secondo ordine.

$$\sum_{j=1}^n c_j [p(x_i) \phi_j''(x_i) + p'(x_i) \phi_j'(x_i) + q(x_i) \phi_j(x_i)] = f(x_i),$$

$$i = 1, \dots, n$$

Metodo di Collocazione

Si ottiene un sistema lineare di n equazioni in n incognite. Problemi computazionali:

- Valutazione dei coefficienti della matrice:

$$a_{i,j} = p(x_i)\phi_j''(x_i) + p'(x_i)\phi_j'(x_i) + q(x_i)\phi_j(x_i)$$

- Soluzione del sistema lineare:

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^t, \mathbf{f} = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))^t$$

Metodo di Galerkin

Si definisce la **funzione residuo** associata alla funzione $u(x)$:

$$r(x) = (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) - f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Se u fosse la soluzione esatta del problema

$$(p(x)v')' + q(x)v = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad v(0) = v(1) = 0$$

allora $r(x) = 0$. Inoltre la funzione residuo sarebbe ortogonale ad ogni funzione ed in particolare all'insieme delle funzioni di base ϕ_0, ϕ_1, \dots :

$$0 = (r, \phi_j) = \int_0^1 r(x)\phi_j(x)dx, \quad j = 0, \dots$$

Metodo di Galerkin

In generale $u(x)$ sarà soltanto un'approssimazione della soluzione v in quanto combinazione lineare con un numero finito di funzioni di base.

Il metodo di Galerkin definisce la funzione $u(x)$ il cui *residuo* è *ortogonale all'insieme delle funzioni di base*:

$$\int_0^1 r(x) \phi_j(x) dx = 0, \quad j = 0, \dots, n$$

\Downarrow

$$\int_0^1 ((p(x)u'(x))' + q(x)u(x) - f(x)) \phi_j(x) dx = 0, \quad j = 0, \dots, n$$

•

Sostituendo: $u(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$ si ha:

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_0^1 ((p(x)\phi_i'(x))' + q(x)\phi_i(x)) \phi_j(x) dx = \int_0^1 f(x)\phi_j(x) dx$$

Integrando per parti il primo termine si ha:

$$\int_0^1 (p(x)u'(x))' \phi_j(x) dx = p(x)\phi_j'(x)\phi_j(x)\big|_0^1 - \int_0^1 p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) dx$$

Poichè $\phi_j(x) = 0$ per $x = 0, 1$ e $\forall j$

•

Si ottiene quindi il sistema lineare $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{f}$ dove:

$$\mathbf{f} = \{f_i\}_{i=1}^n \quad f_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx, \quad i = 1, \dots, n$$

$$a_{i,j} = - \int_0^1 p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x)dx + \int_0^1 q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx$$

Osservazioni

- Nei metodi di collocazione e Galerkin la soluzione in un punto \bar{x} può essere calcolata mediante l'espressione:

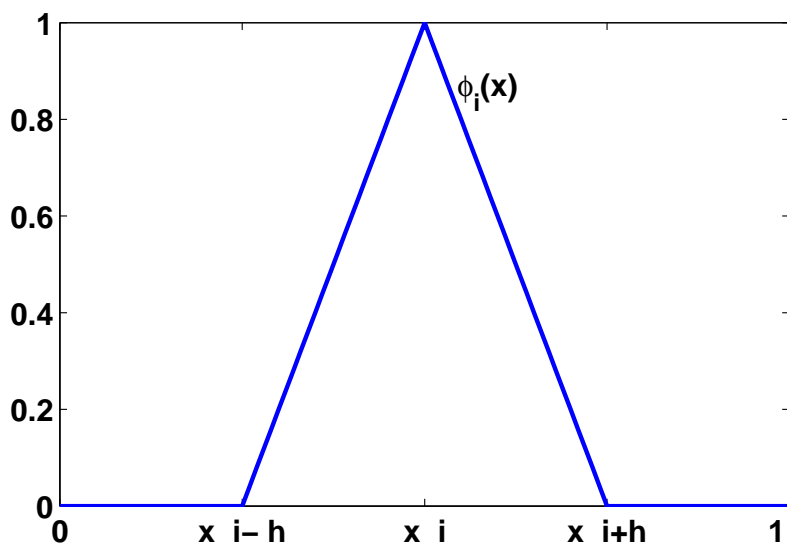
$$u(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n c_j \phi_j(\bar{x})$$

- Le matrici dei sistemi lineari sono in generale piene a meno che non si facciano particolari scelte delle funzioni di base: per esempio funzioni spline
- Il calcolo degli elementi della matrice richiede la valutazione numerica di integrali mediante formule di quadrature.
- Il metodo di Galerkin porta sempre ad una matrice simmetrica.

Esempi di funzioni di base: Bspline Lineare

Funzioni lineari a tratti $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$ definite in una partizione dell'intervallo $[a, b]$: $x_0 \equiv a < x_1 < \dots < x_n < b \equiv x_{n+1}$:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{per } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{per } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Caso uniforme:

$$[a, b] = [0, 1]$$

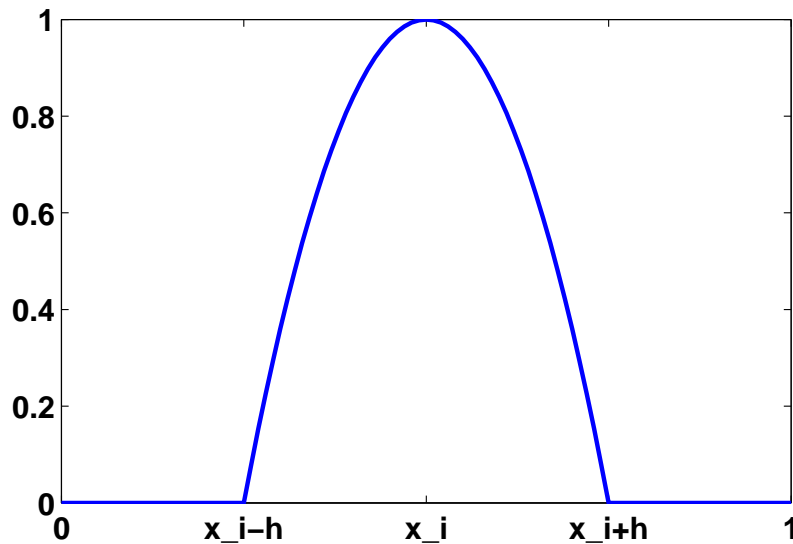
$$x_i = a + ih,$$

$$i = 1, \dots, n$$

Funzioni di base di secondo grado (I)

Funzioni di secondo grado a tratti definite in una partizione uniforme dell'intervallo $[a, b]$: $x_0 \equiv a < x_1 < \dots < x_{2n-1} < b \equiv x_{2n}$: Se i è dispari la funzione ϕ_i è detta **funzione a bolla**:

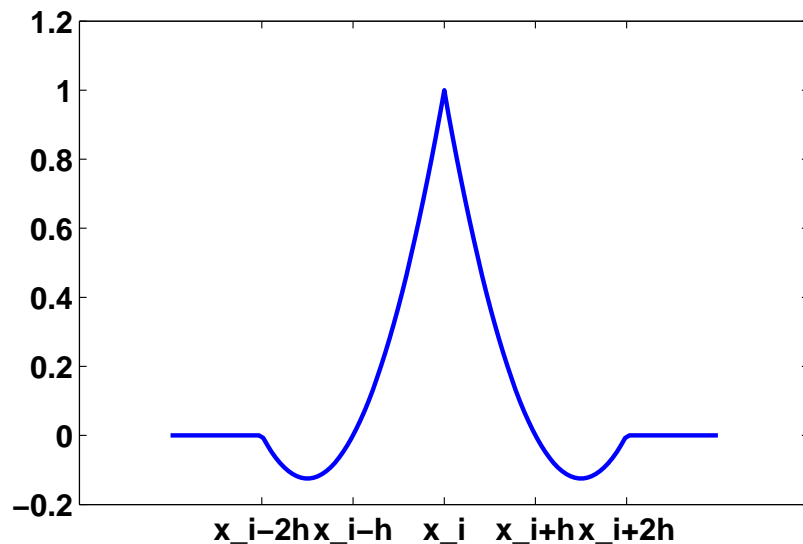
$$\phi_i(x) = \begin{cases} -4 \frac{x-x_{i-1}}{2h} \left(\frac{x-x_{i-1}}{2h} - 1 \right) & \text{per } x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Funzioni di base di secondo grado (II)

Se i è pari la funzione ϕ_i è detta funzione a tenda:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-2}}{2h} \left(2 \frac{x-x_{i-2}}{2h} - 1 \right) & \text{per } x_{i-2} \leq x \leq x_i \\ \left(\frac{x-x_i}{2h} - 1 \right) \left(2 \frac{x-x_i}{2h} - 1 \right) & \text{per } x_i \leq x \leq x_{i+2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Esempio

Si calcolano gli elementi della matrice ed del termine noto del sistema lineare $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{f}$ dove:

$$\mathbf{f} = \{f_i\}_{i=1}^n \quad f_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx, \quad i = 1, \dots, n$$

$$a_{i,j} = - \int_0^1 p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x)dx + \int_0^1 q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx$$

utilizzando come base le funzioni Bspline lineari.

- La matrice \mathbf{A} è detta matrice di rigidezza o *stiffness matrix*.
- il termine noto è detto vettore dei carichi *load vector*.

Proprietà delle funzioni di base lineari

- ϕ'_i non è definita nei punti x_{i-1}, x_i, x_{i+1}
- ϕ'_i è la funzione costante a tratti:

$$\phi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ -\frac{1}{h} & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Le discontinuità non influiscono sul calcolo degli integrali:

$$a_{i,j} = \sum_{k=0}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} [-p(x)\phi'_i(x)\phi'_j(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)] dx$$

Proprietà della matrice

- Per la definizione delle funzioni ϕ_j si ha:

$$\phi_i \phi_j \neq 0, \iff i - 1 \leq j \leq i + 1$$

$$\phi'_i \phi'_j \neq 0, \iff i - 1 \leq j \leq i + 1$$

\Downarrow

$$a_{i,j} = 0, \quad \text{se } |i - j| > 1$$

A è tridiagonale

Calcolo dei coefficienti

Per calcolare i coefficienti $a_{i,j}$ introduciamo i termini:

$$P_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx, \quad Q_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x - x_{i-1})^2 dx$$

$$R_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(x - x_{i+1})^2 dx, \quad S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(x - x_{i-1})(x - x_i) dx$$

Si osserva che:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) \phi'_i(x) \phi'_i(x) dx = \frac{1}{h^2} P_{i+1}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) \phi'_i(x) \phi'_i(x) dx = \frac{1}{h^2} P_i$$

Calcolo dei coefficienti

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) \phi_i'(x) \phi_{i+1}'(x) dx = -\frac{1}{h^2} P_{i+1},$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) \phi_i(x) \phi_i(x) dx = \frac{1}{h^2} R_i$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) \phi_i(x) \phi_i(x) dx = \frac{1}{h^2} Q_i$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) \phi_{i-1}(x) \phi_i(x) dx = -\frac{1}{h^2} S_i$$

Calcolo dei coefficienti

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \sum_{k=0}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} [-p(x)\phi_i'(x)\phi_i'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_i(x)] dx = \\ &= \sum_{k=i-1}^i \int_{x_k}^{x_{k+1}} [-p(x)\phi_i'(x)\phi_i'(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_i(x)] dx = \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} -p(x)\phi_i'(x)\phi_i'(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)\phi_i(x)\phi_i(x)dx + \\ &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} -p(x)\phi_i'(x)\phi_i'(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)\phi_i(x)\phi_i(x)dx = \\ &= -\frac{1}{h^2} (P_i + P_{i+1} - Q_i - R_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (1) \end{aligned}$$

Calcolo dei coefficienti

$$a_{i,i+1} = \frac{1}{h^2} (P_{i+1} - S_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$a_{i,i-1} = \frac{1}{h^2} (P_i - S_i), \quad i = 2, \dots, n$$

Le componenti relative al termine noto sono date da:

$$f_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x - x_{i-1})dx + \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(x_{i+1} - x)dx$$

$$i = 1, \dots, n$$

Esempio

Nel caso particolare $p(x) = 1$, $q(x) = 0$ si ha $Q_i = R_i = S_i = 0$ e $P_i = h$ quindi:

$$a_{i,i} = \frac{-2}{h}, \quad a_{i,i+1} = \frac{1}{h}, \quad a_{i-1,i} = \frac{1}{h}$$

$$A = \frac{-1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se la soluzione è regolare si può mostrare che la procedura di galerkin ha un errore di discretizzazione $O(h^2)$.

Esempio

Dato il problema relativo all'equilibrio di un filo elastico vincolato agli estremi e sottoposto a carico uniforme unitario:

$$u'' = 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

● La matrice di rigidezza (stiffness) A_h è tridiagonale:

$$A_h = -\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

● Il vettore dei carichi è dato da:

$$f_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x - x_{i-1})dx + \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(x_{i+1} - x)dx$$

$$f(x) = 1, \Rightarrow f_i = \frac{1}{h} \left\{ 2 \frac{h^2}{2} \right\} = h$$

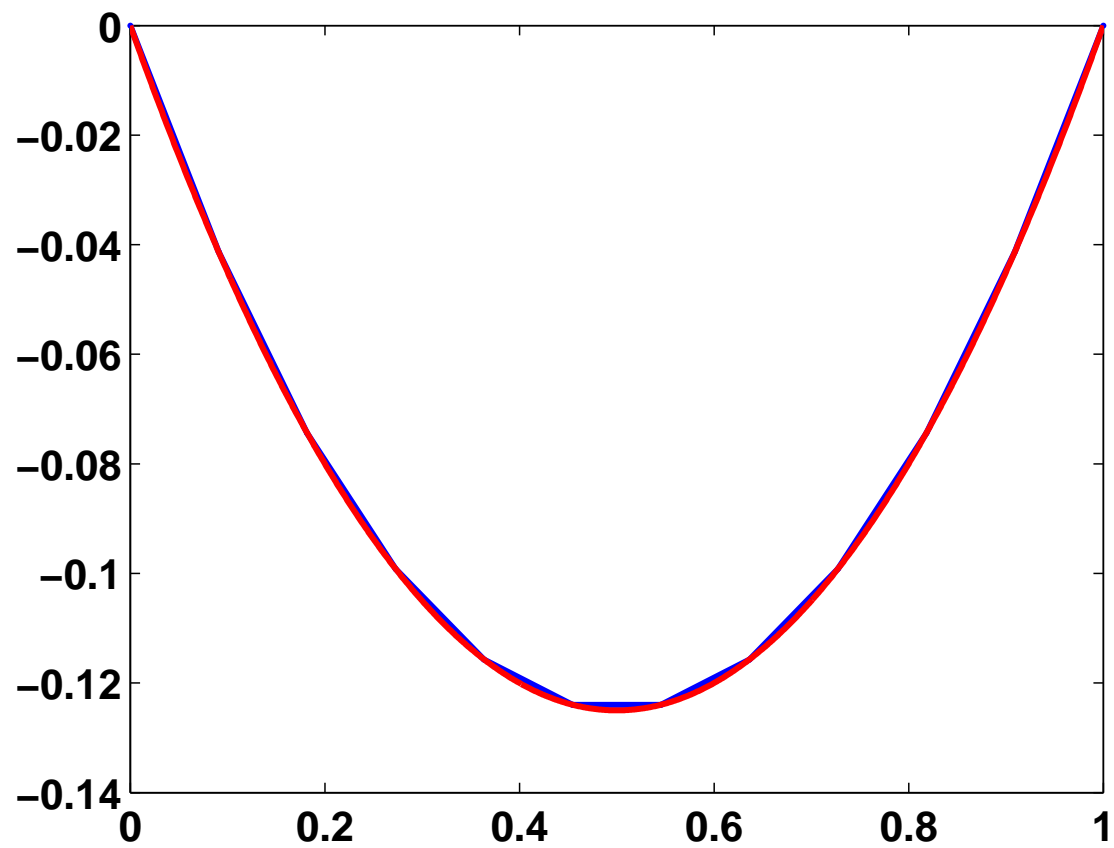
Caso $n = 10$ e grafico del risultato rispetto alla soluzione esatta:

$$u(x) = \frac{1}{2}x * (x - 1)$$

```
[u,x]=filo_unif(10)
xx=0:0.001:1;
plot(x,u,'.-',xx,0.5*xx.*(xx-1),'-r')
```

Funzione matlab

```
function [u,x]=filo_unif(n)
% Risolve il problema del filo elastico per
% condizioni al bordo omogenee di
% Dirichlet, con carico uniforme e N punti
% interni
b=ones(n,1);b1=ones(n-1,1);
a=2*diag(b,0)-diag(b1,-1)-diag(b1,1);
h=1/(n+1); % spaziatura di griglia
f=-h^2*ones(n,1); % ho portato h a sinistra
u=a\f; % DA RENDERE PIU' EFFICIENTE
% Ora aggiungo le condizioni al contorno
u(2:n+1)=u; u(1)=0; u(n+2)=0;
% Calcola il vettore delle ascisse
for i=0:n+1; x(i+1) = i*h; end
```



Termine forzante

Per scrivere una function che risolva il problema del filo elastico con condizioni omogenee di Dirichlet al bordo e con carico assegnato in ingresso, dobbiamo:

- Impostare in input la funzione carico e il numero di intervalli;
- Costruire la matrice di rigidezza;
- Preparare il vettore di carico;
- Risolvere il sistema lineare;
- Aggiungere le condizioni al bordo.

function matlab

```
function [x,u]=Dir_filo_f(f,n)
% Risolve il problema del filo elastico
% per condizioni al bordo omogenee di
% Dirichlet, carico definito in ingresso
% dalla function f
% n: numero di sottointervalli
a=2*diag(ones(n,1),0)-...
    diag(ones(n-1,1),-1)-diag(ones(n-1,1),1);
h=1/(n+1);
for i=1:n; x(i) = i*h; end
b=h^2*feval(f,x); b=b';
u=a\b;
u(2:n+1)=u; u(1)=0; u(n+2)=0;
x(2:n+1)=x; x(1)=0; x(n+2)=1;
```


Esempio

```
r=inline(vectorize('4*pi^2*sin(2*pi*x)'), 'x')  
[x,u]=Dir_filo_f(r,10)  
plot(x,u)
```

Carico puntiforme

Si considera il caso:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0.5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia N il numero dei nodi interni:

● Se N è dispari allora $\exists K : N + 1 = 2K$ ossia $N + 1$ è pari:

$$0.5 = \frac{1}{2} = \frac{x_0 + x_{N+1}}{2} = 2K \frac{h}{2} = Kh = x_K$$

il valore 0.5 coincide con il nodo x_K della partizione;

● Se N è pari allora $\exists K : N = 2K$:

$$\begin{aligned} 0.5 &= \frac{1}{2} = \frac{x_0 + x_{N+1}}{2} = 2K + 1 \frac{h}{2} = \\ &= \frac{Kh + (K + 1)h}{2} = \frac{x_K + x_{K+1}}{2} \end{aligned}$$

il valore 0.5 coincide con punto medio dell'intervallo $[x_K, x_{K+1}]$.

Il vettore dei carichi è dato da:

$$f_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x - x_{i-1})dx + \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)(x_{i+1} - x)dx$$

$$f_i = \begin{cases} \frac{1}{h}h & i = K \text{ caso } N \text{ dispari} \\ \frac{1}{h}\frac{h}{2} & i = K, K+1 \text{ caso } N \text{ pari} \end{cases}$$

Poichè il codice risolve il sistema $A_h u = h^2 b$ si ha che:

$$b_i = \begin{cases} -\frac{1}{h} = -(N+1) & i = K \text{ caso } N \text{ dispari} \\ -\frac{1}{2h} = -0.5(N+1) & i = K, K+1 \text{ caso } N \text{ pari} \end{cases}$$

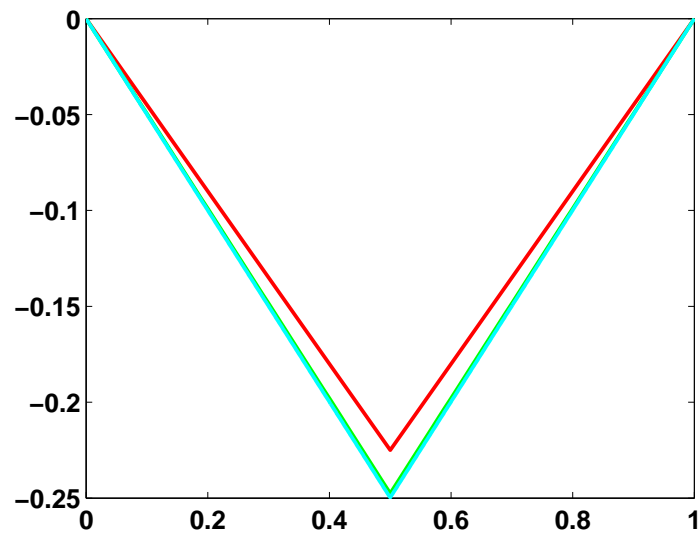
Questi valori sono calcolati dal codice `delta_0ne`:

codice matlab

```
function f=delta_one(x)
n=length(x);val=n;
f=zeros(1,n);
if mod(n,2)==0
    f(n/2)= -val/2;
    f(n/2 +1)= -val/2;
else
    f((n+1)/2)= -val;
end
```

Esempio

```
[x,u]=dir_filo_f(@delta_one,9);  
plot(x,u,'r','Linewidth',2)  
hold on  
[x,u]=dir_filo_f(@delta_one,99);  
plot(x,u,'g','Linewidth',2)  
[x,u]=dir_filo_f(@delta_one,999);  
plot(x,u,'c','Linewidth',2)
```



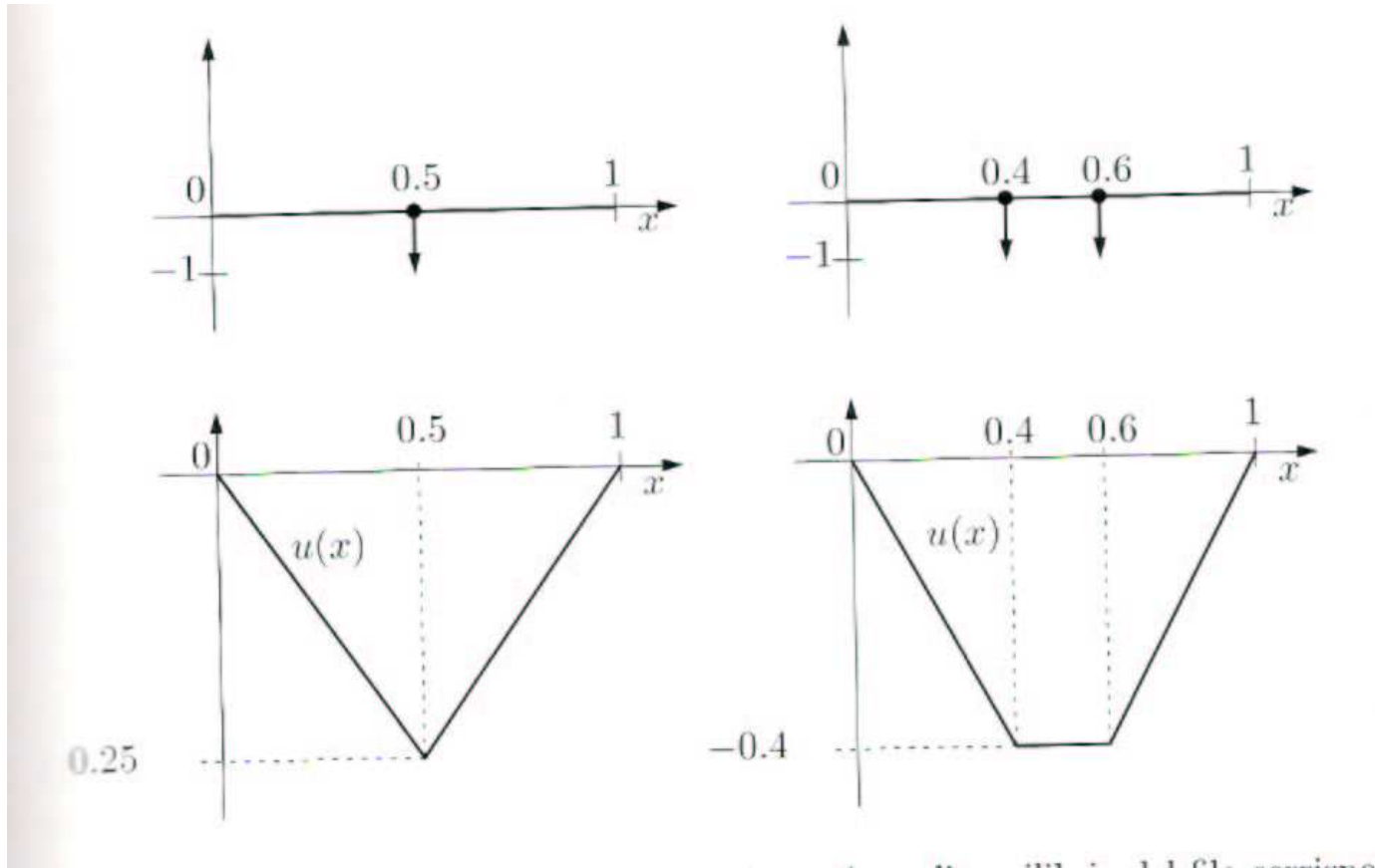
Problema di Dirichlet (1D)

Consideriamo il problema di Dirichlet omogeneo 1D:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 & u(1) = 0 \end{cases}$$

la funzione u descrive lo spostamento verticale (rispetto alla posizione di riposo $u = 0$) di un filo elastico con tensione pari a uno, fissato agli estremi, in regime di piccoli spostamenti e soggetto ad una forza trasversale di intensità f .

Esempio



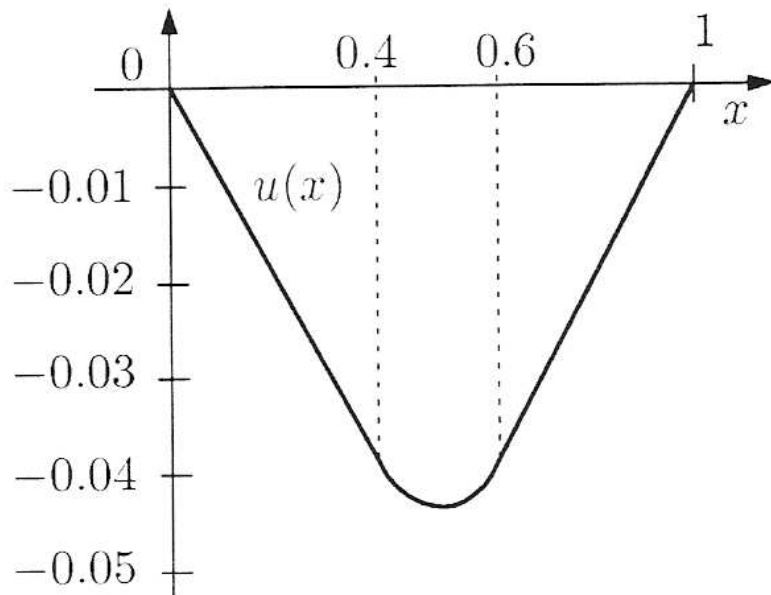
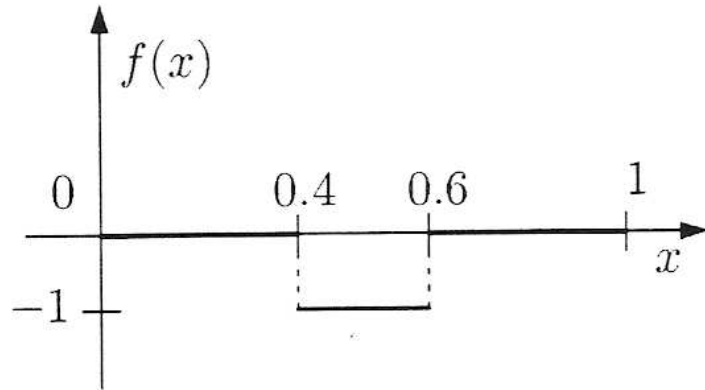
Osservazioni

- A sinistra. Configurazione di equilibrio corrispondente ad un carico unitario concentrato in 0.5
- A destra. Configurazione di equilibrio corrispondente a due carichi unitari concentrati in $x = 0.4$ e $x = 0.6$ rappresentati nella parte superiore.

Come si osserva dai grafici, nel caso di carichi concentrati, le soluzioni fisiche appartengono solo a $C^0(\bar{\Omega})$.

Tali funzioni non possono essere soluzioni dell'equazione differenziale in quanto quest'ultima richiederebbe derivate continue fino al secondo ordine.

Esempi



Regolarità

Analoghe considerazioni valgono nel caso in cui f sia una funzione costante a tratti. Nel caso rappresentato in figura, la soluzione analitica è di classe $C^1([0, 1])$ data da

$$u(x) = \begin{cases} -x/10 & x \in [0, 0.4] \\ 0.5x^2 - 0.5x + 2/25 & x \in [0.4, 0.6] \\ -(1-x)/10 & x \in [0.6, 1] \end{cases}$$

si introduce una formulazione del problema alternativa a quella forte che consenta di ridurre l'ordine di derivazione richiesto sulla soluzione incognita u .

- Si passa da un problema differenziale del secondo ordine ad uno integrale del primo ordine.
- Questo problema costituisce la **forma debole** del problema differenziale.

Forma debole

- Moltiplichiamo l'equazione per una funzione test v e integriamo nell'intervallo $(0, 1)$

$$-u''(x)v(x) = f(x)v(x) \rightarrow \int_0^1 -u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

- Applichiamo l'integrazione per parti rispetto al primo argomento:

$$\int_0^1 -u''(x)v(x)dx = -u'(x)v(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$$

Poichè i valori al bordo di u sono assegnati, consideriamo solo funzioni test che si annullano al bordo in modo da annullare il contributo del termine: $-u'(x)v(x)\Big|_0^1$

Forma debole

- Si ottiene:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad (2)$$

- Lo spazio delle funzioni test V tale che:

$$v \in V \Rightarrow v(0) = v(1) = 0$$

- Se $u, v \in C_{[0,1]}^1$ allora (2) è ben definita.
- Le soluzioni fisiche possono non essere derivabili con continuità .
- Lo spazio vettoriale: $V \equiv \left\{ v \in C_{[0,1]}^1 : v(0) = v(1) = 0 \right\}$ non è completo rispetto al prodotto scalare:

$$(u, v)_1 = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$$

- Richiamo:

$$L^p(0, 1) \equiv \left\{ v \in (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } \|v\|_{L^p(0,1)} \equiv \left(\int_0^1 |v(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty \right\}$$

funzioni di potenza p -esima integrabile secondo Lebesgue.

- Affinchè $\int_0^1 u'(x)v'(x)dx$ sia ben definito occorre che

$$u'v' \in L^p(0, 1)$$

- Proprietà . Date due funzioni $\varphi, \psi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ se

$$\varphi^2, \psi^2 \text{ sono integrabili} \Rightarrow \varphi\psi \text{ è integrabile}$$

$$\text{quindi } \varphi, \psi \in L^2(0, 1) \Rightarrow \varphi\psi \in L^1(0, 1)$$

Spazio H^1

- Affinchè la relazione (2) sia ben definita bastano funzioni di quadrato sommabile con derivate prime di quadrato sommabile.
- Si definisce lo **spazio di Sobolev**:

$$H^1(0, 1) \equiv \left\{ v \in L^2(0, 1) : v' \in L^2(0, 1) \right\}$$

- Si ha che: $H^1(0, 1) \subsetneq C^1_{[0,1]}$ Le funzioni continue a tratti con raccordi a spigolo appartengono ad $H^1(0, 1)$ ma non a $C^1_{[0,1]}$. Quindi sono contenute anche funzioni continue ma non derivabili.

Forma debole

- Dunque si sceglie come spazio V delle funzioni test il sottospazio di $H^1(0, 1)$ costituito da:

$$H_0^1(0, 1) \equiv \left\{ v \in H^1(0, 1) : v(0) = v(1) = 0 \right\}$$

- Se $f \in L^2(0, 1)$ allora anche $\int_0^1 f(x)v(x)dx$ è ben definita.
- Il problema (2) diventa quindi:

$$\text{cercare } u \in V : \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V \quad (3)$$

con $V = H_0^1(0, 1)$

Forma variazionale

Il problema (3) è equivalente al seguente **problema variazionale**

$$\text{cercare } u \in V : \begin{cases} J(u) = \min_{v \in V} J(v) & \text{con} \\ J(v) \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 (v')^2 dx - \int_0^1 f v dx \end{cases}, \quad (4)$$

Ovvero u è soluzione di (2) se e solo se u è soluzione di (4)

Principio dei lavori virtuali

- Consideriamo il problema di studiare la configurazione assunta da un filo di tensione unitaria, vincolato agli estremi e soggetto ad un termine forzante f descritto da:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 & u(1) = 0 \end{cases}$$

- Indichiamo con v uno spostamento ammissibile dalla posizione di equilibrio (cioè nullo agli estremi)
- L'equazione (3):

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

esprime il lavoro fatto dalle forze interne e da quelle esterne in corrispondenza di v , dunque traduce il **principio dei lavori virtuali** della meccanica.

Energia Potenziale

- Il funzionale $J(w)$ esprime l'**energia potenziale** del sistema in corrispondenza della configurazione w .
- Il principio dei lavori virtuali stabilisce che qualsiasi spostamento ammissibile dalla posizione di equilibrio causa un incremento dell'energia potenziale.
- **La soluzione debole è quella che minimizza l'energia potenziale.**

Problema non omogeneo

Si considera il problema:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = g_0 & u(1) = g_1 \end{cases}$$

Ci si può ricondurre al caso omogeneo osservando che se u è soluzione del problema non omogeneo allora:

$$\tilde{u} = u - [(1 - x)g_0 + xg_1]$$

è soluzione del corrispondente problema omogeneo:

$$\begin{cases} -\tilde{u}''(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ \tilde{u}(0) = 0 & \tilde{u}(1) = 0 \end{cases}$$

la funzione $R_g = (1 - x)g_0 + xg_1$ è detta **rilevamento del dato al bordo**.

Problema di Neumann

Ricaviamo la forma debole per il seguente problema:

$$\begin{cases} -u''(x) + \sigma u(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u'(0) = h_0 & u'(1) = h_1 \end{cases}$$

Applicando integrazione per parti si ha:

$$\int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 \sigma uv dx - [u'v]_0^1 = \int_0^1 f v dx$$

- Ipotesi: $f \in L^2(0,1)$, $\sigma \in L^\infty(0,1)$ ovvero σ limitata quasi ovunque su $(0,1)$.
- L'incognita u non è specificata al bordo, quindi non si deve richiedere che v si annulli al bordo.

Forma debole

Cercare $u \in H^1(0, 1)$ tale che:

$$\int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 \sigma uv dx = \int_0^1 f v dx + h_1 v(1) - h_0 v(0) \quad (5)$$

- Se $h_1 = h_0 = 0$ il problema è caratterizzato dalla stessa equazione del caso di Dirichlet.
- Lo spazio delle funzioni test ora è $H^1(0, 1)$.

Problema Misto Omogeneo

Caso in cui si abbiano condizioni di Dirichlet ad un estremo e di Neumann nell'altro.

$$\begin{cases} -u''(x) + \sigma u(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 & u'(1) = 0 \end{cases}$$

In questo caso si deve chiedere che le funzioni test siano nulle in $x = 0$. Si definisce $\Gamma_D = \{0\}$ e

$$H_{\Gamma_D}^1(0, 1) \equiv \left\{ b \in H^1(0, 1) : v(0) = 0 \right\}$$

Si ottiene la forma debole del problema: cercare $u \in H_{\Gamma_D}^1(0, 1)$ tale che

$$\int_0^1 u' v' dx + \int_0^1 \sigma u v dx = \int_0^1 f v dx \quad \forall v \in H_{\Gamma_D}^1(0, 1)$$

con $f \in L^2(0, 1)$, $\sigma \in L^\infty(0, 1)$

Condizioni al bordo miste (Robin)

$$\begin{cases} -u''(x) + \sigma u(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 & u'(1) + \gamma u = r \end{cases}$$

In questo caso si ha:

$$-[u'v]_0^1 = -rv(1) + \gamma u(1)v(1)$$

quindi la forma debole è : cercare $u \in H_{\Gamma_D}^1(0, 1)$ tale che

$$\int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 \sigma uv dx + \gamma u(1)v(1) = \int_0^1 f v dx + rv(1),$$

$$\forall v \in H_{\Gamma_D}^1(0, 1)$$

con $f \in L^2(0, 1)$, $\sigma \in L^\infty(0, 1)$

Osservazioni

- La forma debole dei problemi differenziali può essere espressa come:

$$a(u, v) = F(v)$$

dove

- $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ è detta forma *bilineare* (ovvero lineare rispetto ad entrambi i suoi argomenti),
- $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ è un funzionale lineare.

Il problema in forma debole diventa quindi:

$$\text{cercare } u \in V : a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

In particolare nei casi precedentemente illustrati si ha:

● Problema (3)

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx \quad F(v) = \int_0^1 f(x)v(x)$$

$$V = H_0^1(0, 1)$$

● Problema (5)

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 \sigma uvdx \quad F(v) = \int_0^1 fvdx + h_1v(1) - h_0v(0)$$

$$V = H^1(0, 1)$$

Metodo di Galerkin

Dato il seguente problema in forma debole su un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}$

$$\text{trovare } u \in V : a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V$$

Si cerca una soluzione approssimata $u_h \in V_h$ in spazi V_h dipendenti dal parametro h tali che:

$$V_h \subset V, \quad \dim V_h = N_h < \infty$$

Problema approssimato:

$$\text{trovare } u_h \in V_h : a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

viene detto *problema di Galerkin*.

Metodo di Galerkin

Sia $\{\varphi_j, j = 1, \dots, N_h\}$ una base per V_h è sufficiente verificare la forma debole per tutte le funzioni base ovvero:

$$\text{trovare } u_h \in V_h : a(u_h, \varphi_i) = F(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, N_h$$

Poichè $u_h \in V_h$ allora:

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j(\mathbf{x})$$

dove gli $u_j, j = 1, \dots, N_h$ sono coefficienti incogniti. Le equazioni diventano allora:

$$\sum_{j=1}^{N_h} u_j a(\varphi_j, \varphi_i) = F(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, N_h$$

Metodo di Galerkin

Relazioni equivalenti al sistema lineare:

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

dove:

- A è detta matrice di rigidezza o stiffness con elementi:

$$a_{i,j} \equiv a(\varphi_j, \varphi_i)$$

- \mathbf{f} vettore di componenti $f_i \equiv F(\varphi_i)$,
- \mathbf{u} vettore dei coefficienti incogniti u_i .