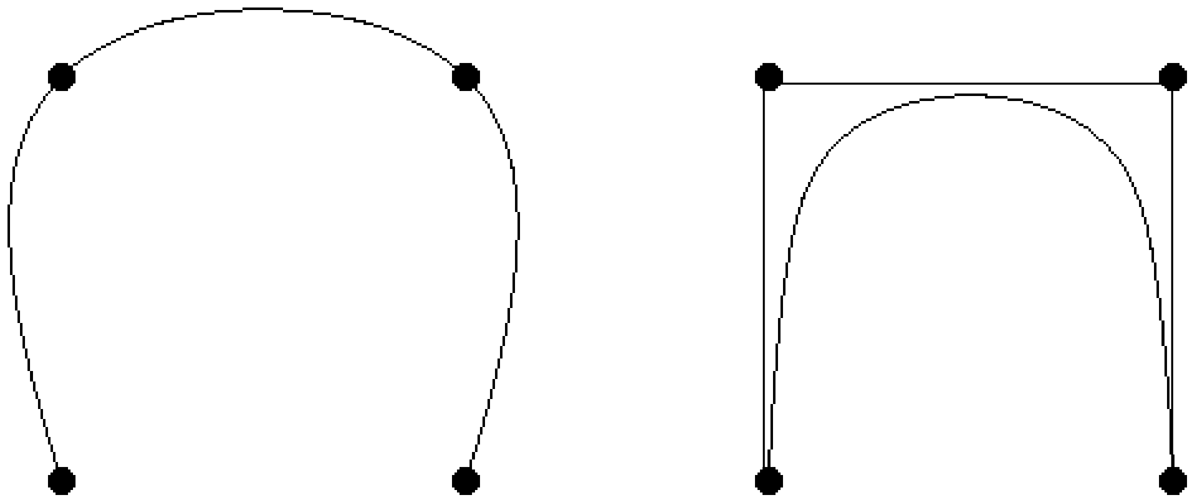
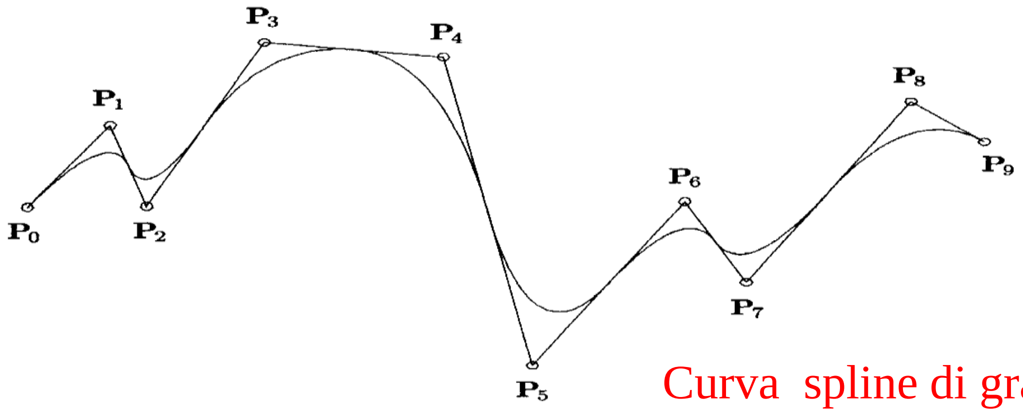
Spline e Interpolazione

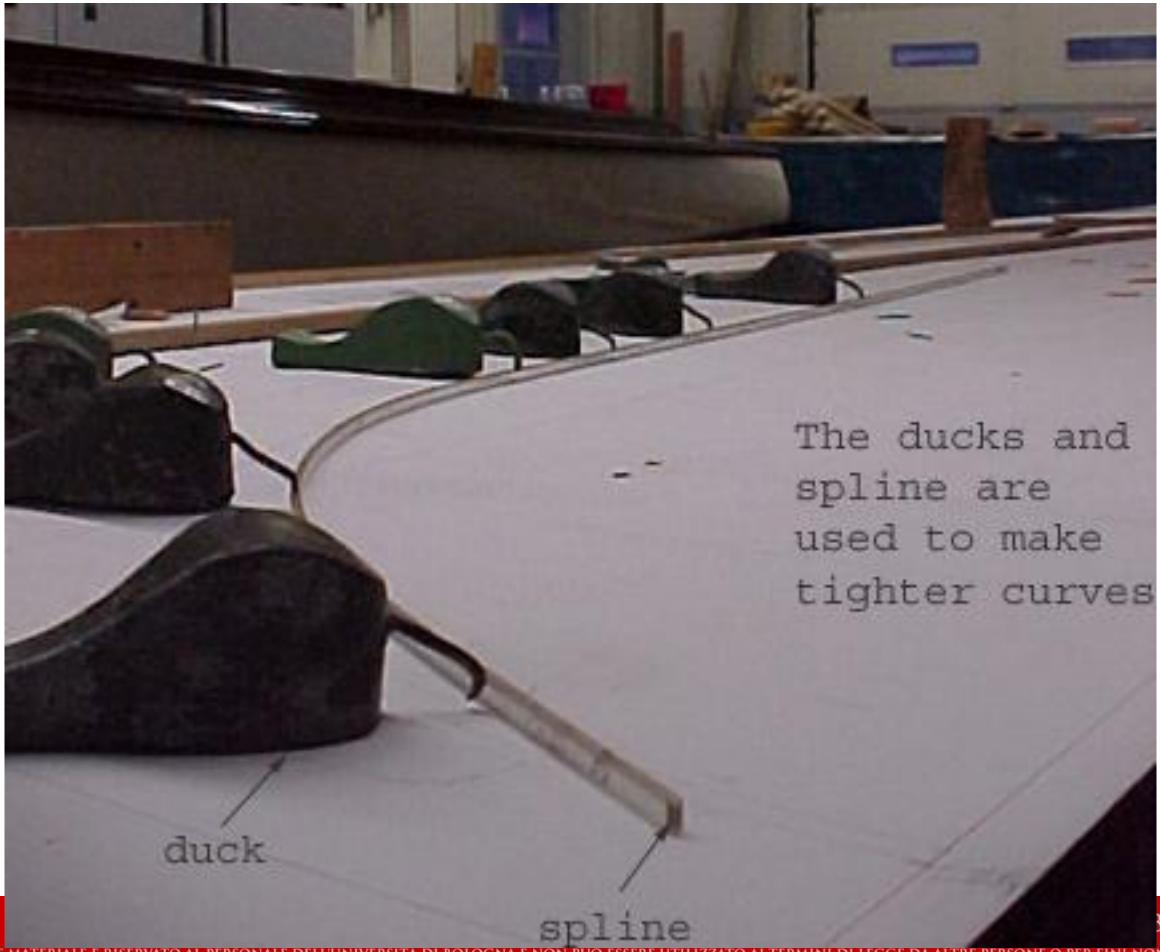


- Interpolante
- Approssimante di forma

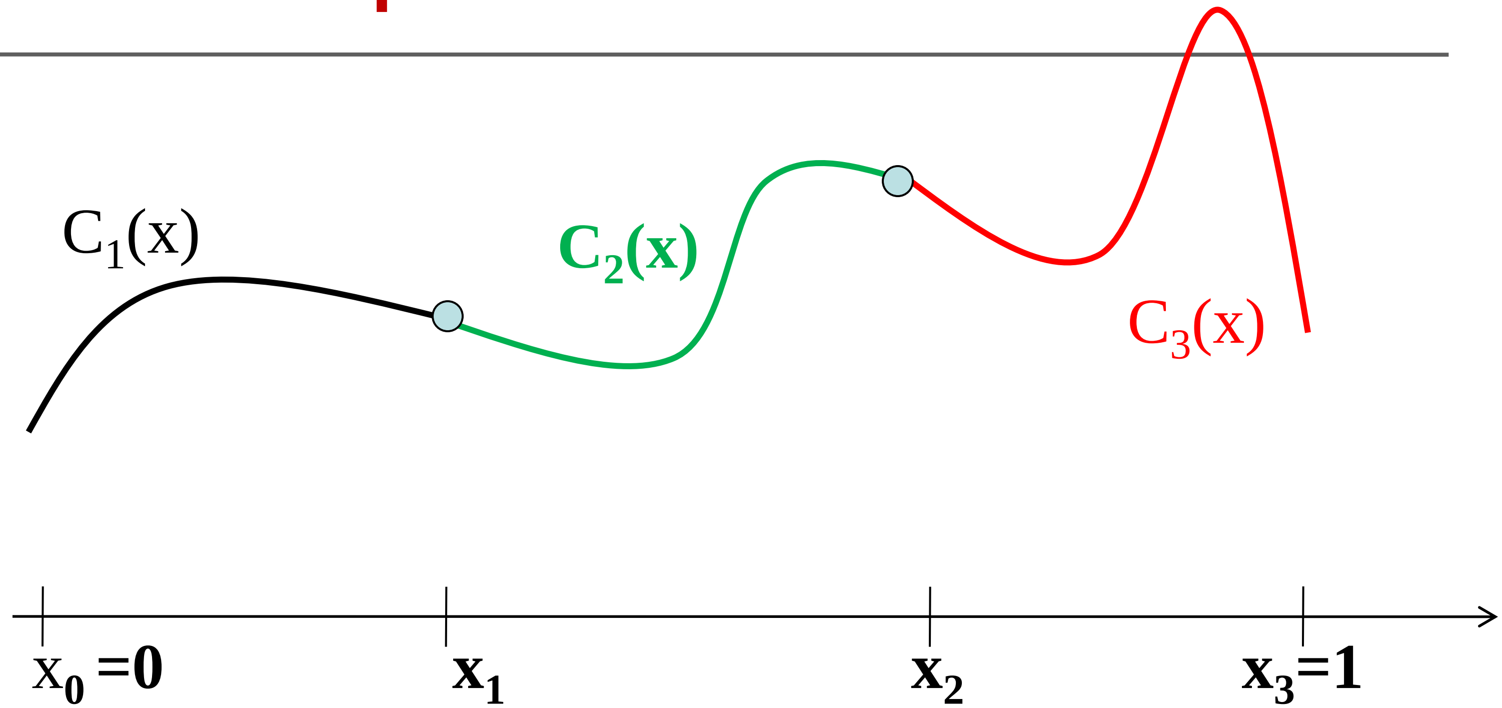
spline



Curva spline di grado 2



Curva polinomiale a tratti



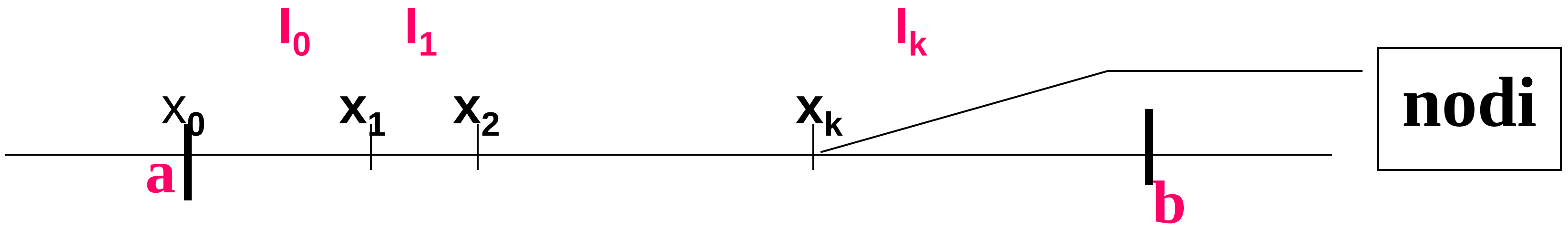
La curva C(x) è definita in [0,1] e consiste di tre segmenti polinomiali di grado n (ordine m=n+1)

I valori dei parametri x_i sono detti **NODI**.

I segmenti sono raccordati con un certo grado di continuità, non necessariamente lo stesso ad ogni nodo.

Funzioni Spline
(Shoenberg 1946)

- Partizione Δ dell'intervallo chiuso e limitato [a,b]



$a=x_0 < x_1 < ..... < x_k < x_{k+1}=b$

- Assegnato un intero **m** – ordine -

  (grado n, m=n+1)

- Assegnato un vettore **M** di molteplicità dei nodi

  $M=(m_1,m_2,..,m_k),\quad m_i<=m$

Funzioni Spline s(x)

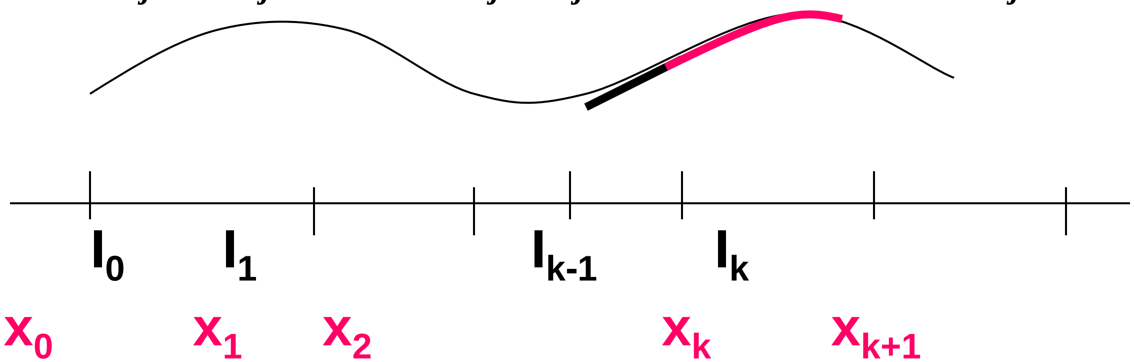
$$S(P_m, M, \Delta) = \{ s(x) \,/\, \exists s_0(x), .., s_k(x) \in P_m$$

per cui valgono:

$$1. \quad s(x) \equiv s_j(x), \quad x \in I_j, \quad j = 0, .., k,$$

$$2. \quad \textit{continuità} \quad \textit{sui} \quad \textit{nodi}:$$

$$D^{(l)} s_{j-1}(x_j) \equiv D^{(l)} s_j(x_j), \quad l = 0, .., m - m_j - 1 \quad \}$$



Spazio di funzioni spline di dimensione **m+K**, $\quad K = \sum_{i=1}^{k} m_i$

Casi speciali

$$M = (m, m, .., m) \quad \Rightarrow S(P_m, M, \Delta)$$

non si ha continuità nei nodi

spazio dei polinomi a tratti

$$M = (1, 1, ..., 1) \quad \Rightarrow S(P_m, M, \Delta)$$

massima continuità nei nodi : $C^{m-2}[a,b]$

spazio delle spline a nodi semplici

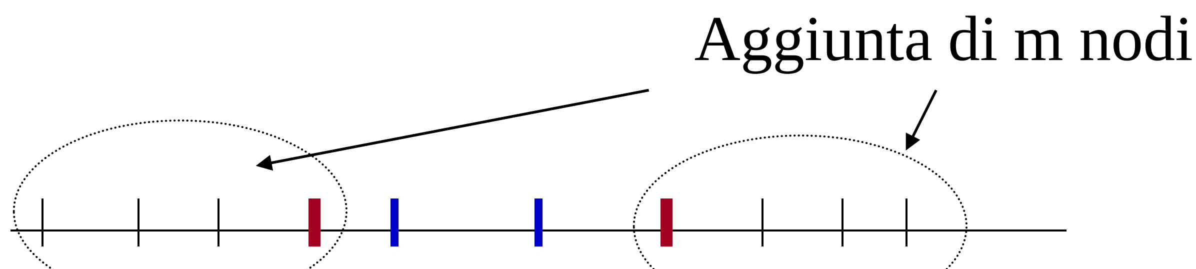
Partizione estesa

A partire dalla partizione Δ si determina la partizione

$$1)\quad t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_{2m+K}$$

$$2)\quad t_m \equiv a \quad t_{m+K+1} \equiv b$$

$$3)\quad t_{m+1} < \ldots < t_{m+K} \equiv (\,\underbrace{x_1 = \ldots = x_1}_{m_1\ volte} < \ldots < \underbrace{x_k = \ldots = x_k}_{m_k\ volte}\,)$$



Esempio

$$[a,b] = [0,1] \quad m = 4 \quad \Delta = \{1/2, 3/4\}, M = \{1,2\}$$

$$\Delta^* = \left\{-3/4, -1/2, -1/4, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 5/4, 3/2, 7/4\right\}$$

Partizione estesa o Vettore nodale

Aperto (o nonperiodico)

Il primo e l'ultimo nodo hanno molteplicità n+1

Es: n=2 $\Delta^*=[0,0,0,1/2,1,1,1]$

Uniforme

I nodi interni del vettore nodale (partizione) sono equispaziati

Non uniforme   altrimenti

Base B-Spline

ogni funzione spline **s(t)** di grado **n** può essere rappresentata come combinazione lineare di una base dello spazio

$$\left\{N_{i,n}(t)\right\}_{i=1}^{n+1+K}$$

Funzioni B-spline normalizzate

$$N_{i,n}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+n}-t_i}N_{i,n-1}(t)+\frac{t_{i+n+1}-t}{t_{i+n+1}-t_{i+1}}N_{i+1,n-1}(t)$$

$$N_{i,0}(t)=\begin{cases}1, & t_i \le t < t_{i+1}\\ 0, & altrimenti\end{cases}$$

FORMULA RICORRENTE
di Cox-de Boor

Convenzione 0/0=0

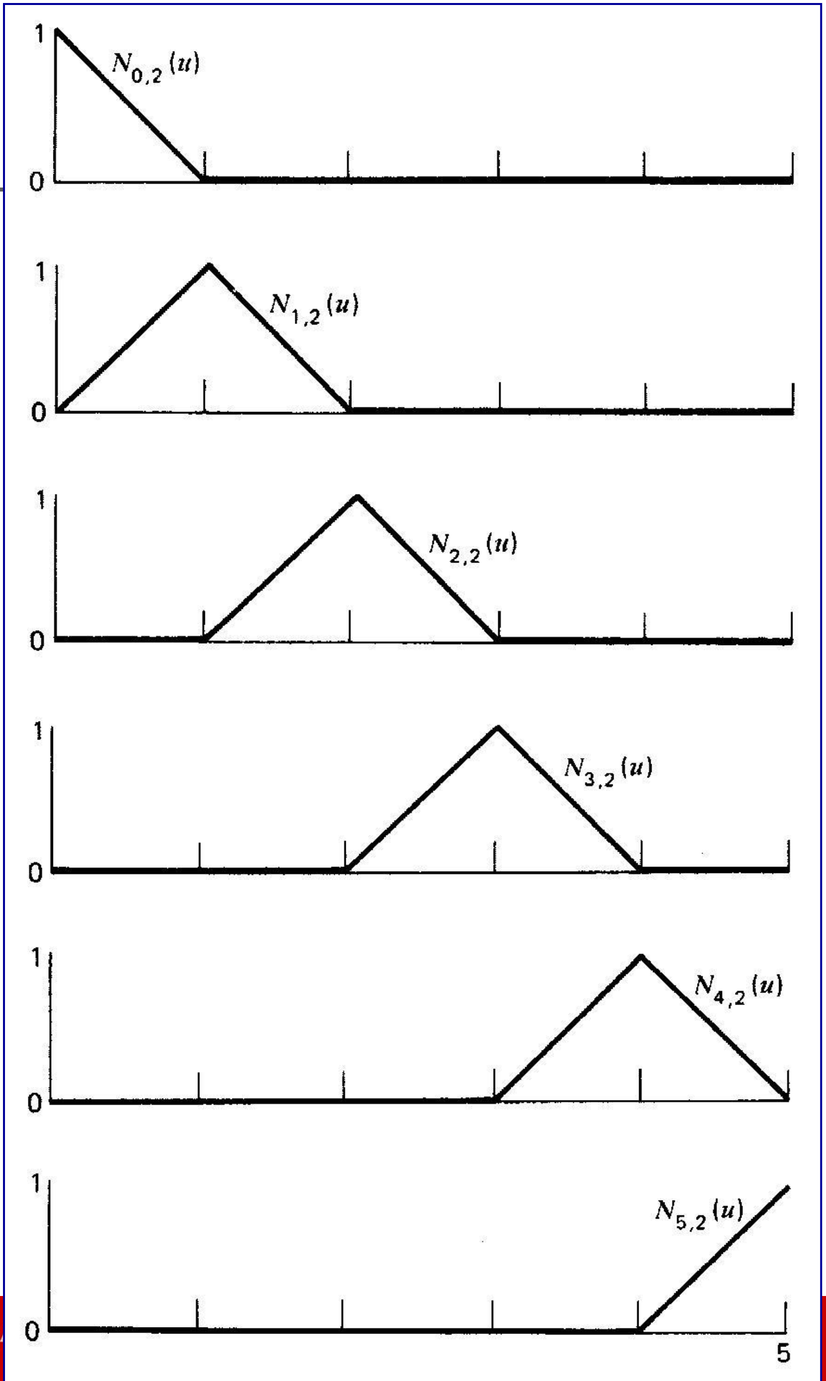
Esempio: base B-spline,n=1

Totale nodi:

N=Nodi interni K+2*m esterni=8

Partizione nodale:

Δ *=(0,0,1,2,3,4,5,5)



Esempio: base B-Spline, n=2

$$\left\{N_{i,2}(t)\right\}_{i=1}^{3+K}$$

$$N_{i,2}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i}N_{i,1}(t)+\frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}N_{i+1,1}(t)$$

$$N_{i,0}(t)=\begin{cases}1, & t_i \le t < t_{i+1}\\ 0, & altrimenti\end{cases}$$

Per il calcolo si crea lo schema triangolare :

$$N_{i,2}(t)$$

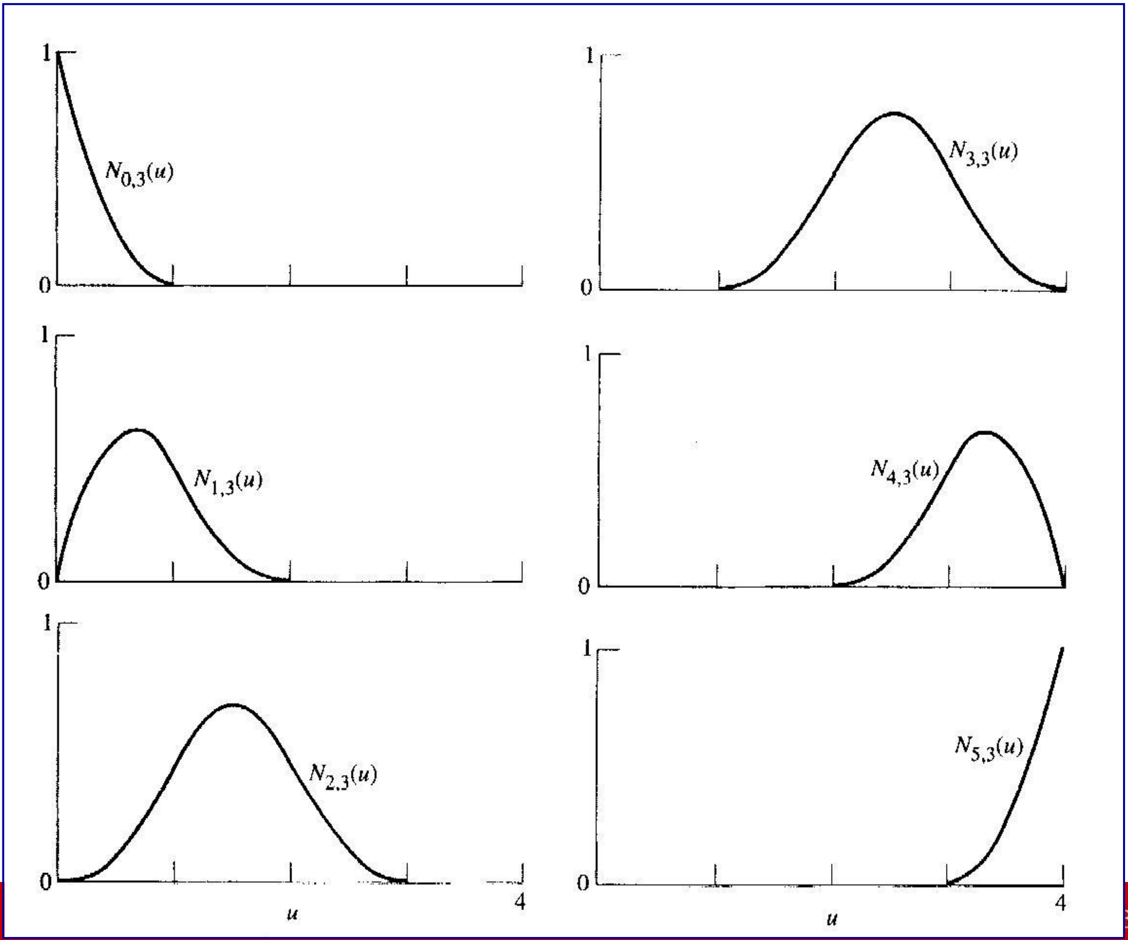
$$N_{i,1}(t) \quad N_{i+1,1}(t)$$

$$N_{i,0}(t) \quad N_{i+1,0}(t) \quad N_{i+2,0}(t)$$

Esempio: base B-Spline, n=2

Partizione nodale estesa: $\Delta^* = (0,0,0,\mathbf{1,2,3},4,4,4)$

K (Nodi interni)+2*m (esterni)



Base B-Spline: proprietà

1. Supporto locale

$$N_{i,n}(t) = 0 \quad \forall t \notin \left[t_i, t_{i+n+1}\right) \quad se\ t_i < t_{i+n+1}$$

2. Non negatività

$$N_{i,n}(t) > 0 \quad \forall t \in (t_i, t_{i+n+1}) \quad t_i < t_{i+n+1}$$

3. Partizione dell'unità

$$\sum_{i=1}^{n+1+K} N_{i,n}(t) = 1 \quad \forall t \in [a,b]$$

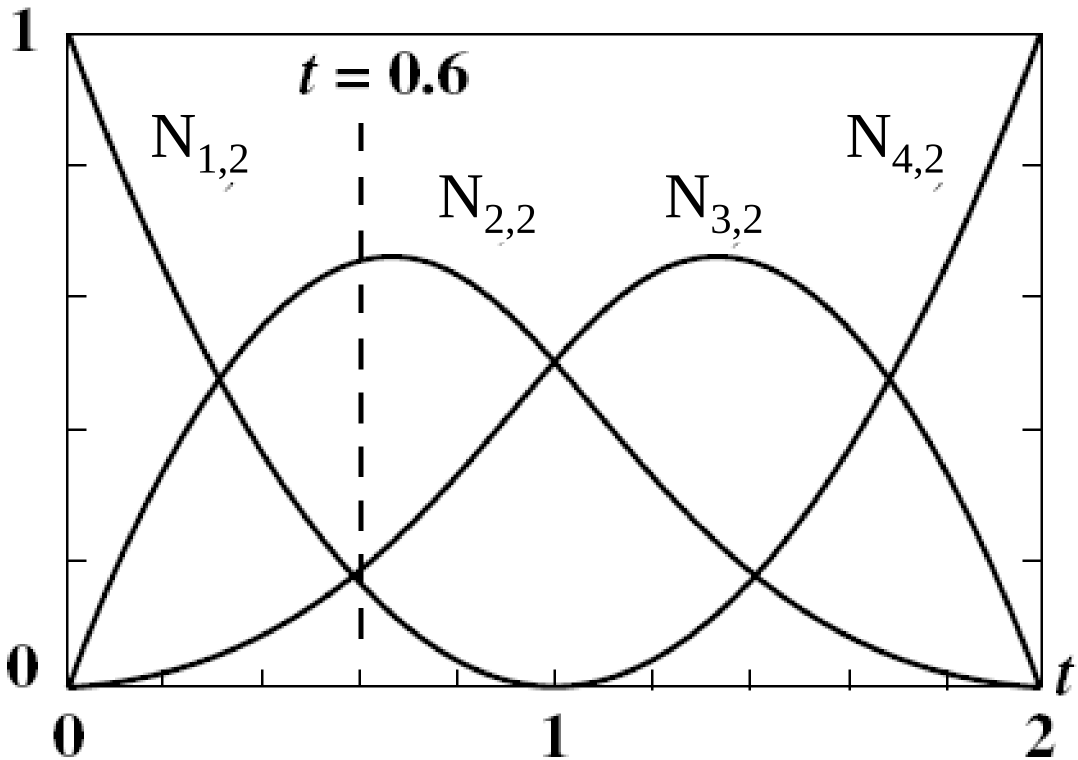
Partizione dell'unità

Esempio:

Grado n=2, vettore nodale: Δ *=(0,0,**0**, **1**,**2**,2,2)

$$t = 0.6$$

$$N_{1,2} + N_{2,2} + N_{3,2} + N_{4,2} = 0.16 + 0.66 + 0.18 + 0.0 = 1.0$$



Funzione spline

Ogni funzione spline ha una rappresentazione nella forma:

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n+1+K} c_i N_{i,n}(t)$$

In particolare per la proprietà 1 delle $N_{i,n}$:

$$se \quad t \in [t_\ell, t_{\ell+1}) \quad s(t) = \sum_{i=\ell-n}^{\ell} c_i N_{i,n}(t)$$

Su ogni sottointervallo s(t) è data dalla somma di al più n+1 funzioni base B-spline, quindi ha un *comportamento locale*: cambiando un qualsiasi c_i la forma cambia solo per n+1 intervallini.

Curva spline

Una curva spline di grado **n** (m=n+1) in forma parametrica è definita da **ncp** punti di controllo $\mathbf{P_i}$ =(x$_i$, $\mathbf{y_i}$) i=1,..,ncp in $\mathbf{R}^2$

$$C(t)=\sum_{i=1}^{ncp} P_i N_{i,n}(t)$$

quindi **K=ncp-m**

$$C(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{ncp} x_i N_{i,n}(t) \\ \sum_{i=1}^{ncp} y_i N_{i,n}(t) \end{pmatrix}$$

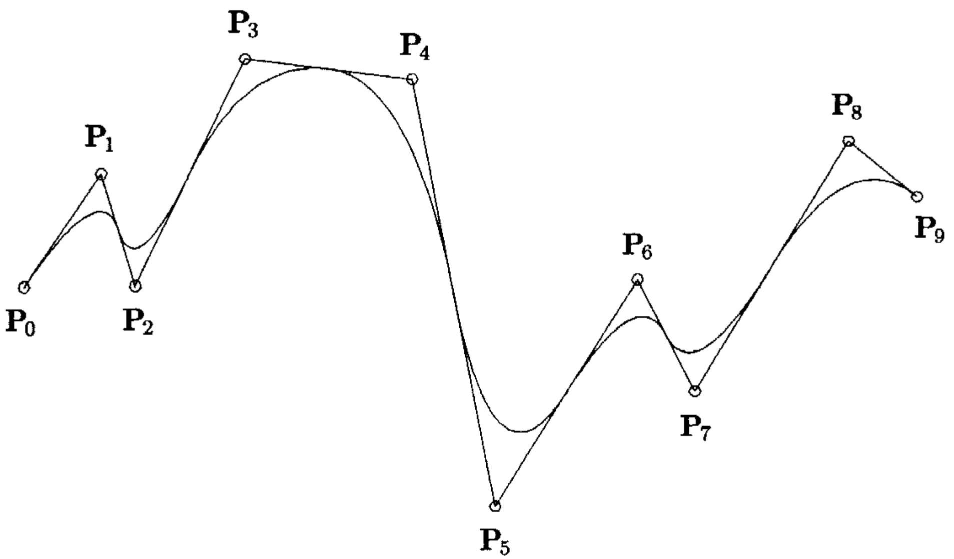
La curva è C^{m-mj-1} continua nei nodi di molteplicità m_j

Dato l’ordine **m**, e il numero di punti di controllo **ncp**,

il numero totale dei nodi è **ncp+m**

Mentre il numero dei nodi interni è **K=ncp-m**

Esempio : Curva spline m=3

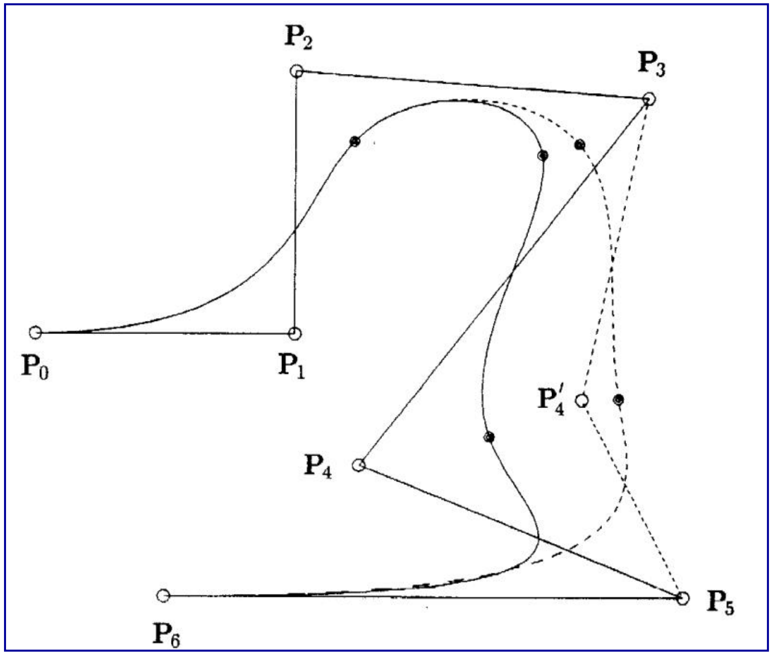


$\Delta^*=\{0,0,0,1/8,2/8,3/8,4/8,5/8,6/8,7/8,1,1,1\}$

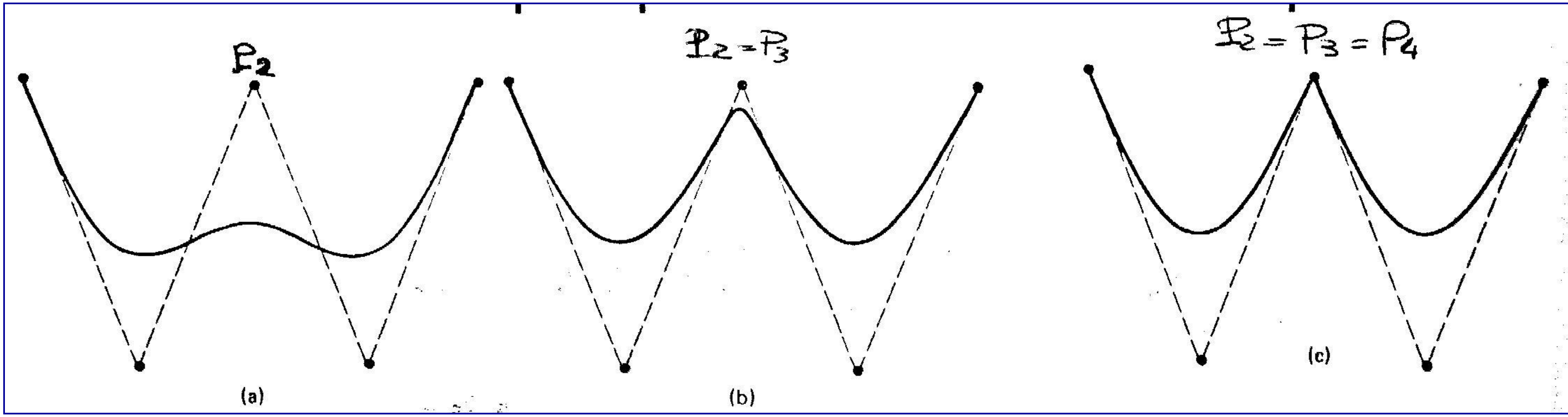
Esempio spline cubica (n=3)

Partizione nodale:$\Delta^*=\{0,0,0,0,$**1/4,1/2,3/4**$,1,1,1,1\}$

Spostamento del punto di controllo P_4 in P_4' cambia la curva nell'intervallo [1/4,1)



Esempio spline cubica



Proiezione prospettica

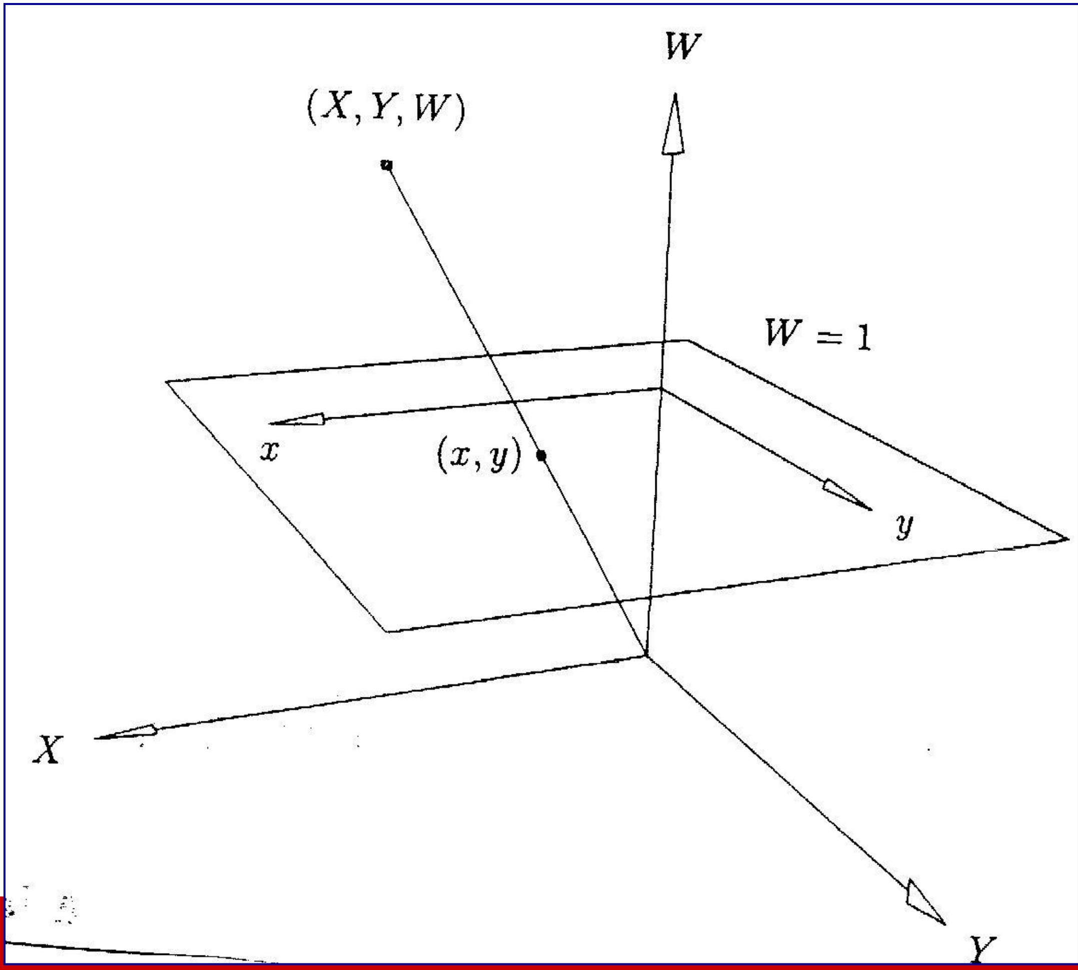
Proiezione prospettica di un punto dallo spazio nD
su di un piano parallelo ad n-1 assi.

Ogni punto in 3D:

$$P^w = \left(X, Y, W\right)$$

sarà proiettato nel
punto in 2D

$$P = \left(x, y\right) = \left(\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}\right)$$



Curve razionali

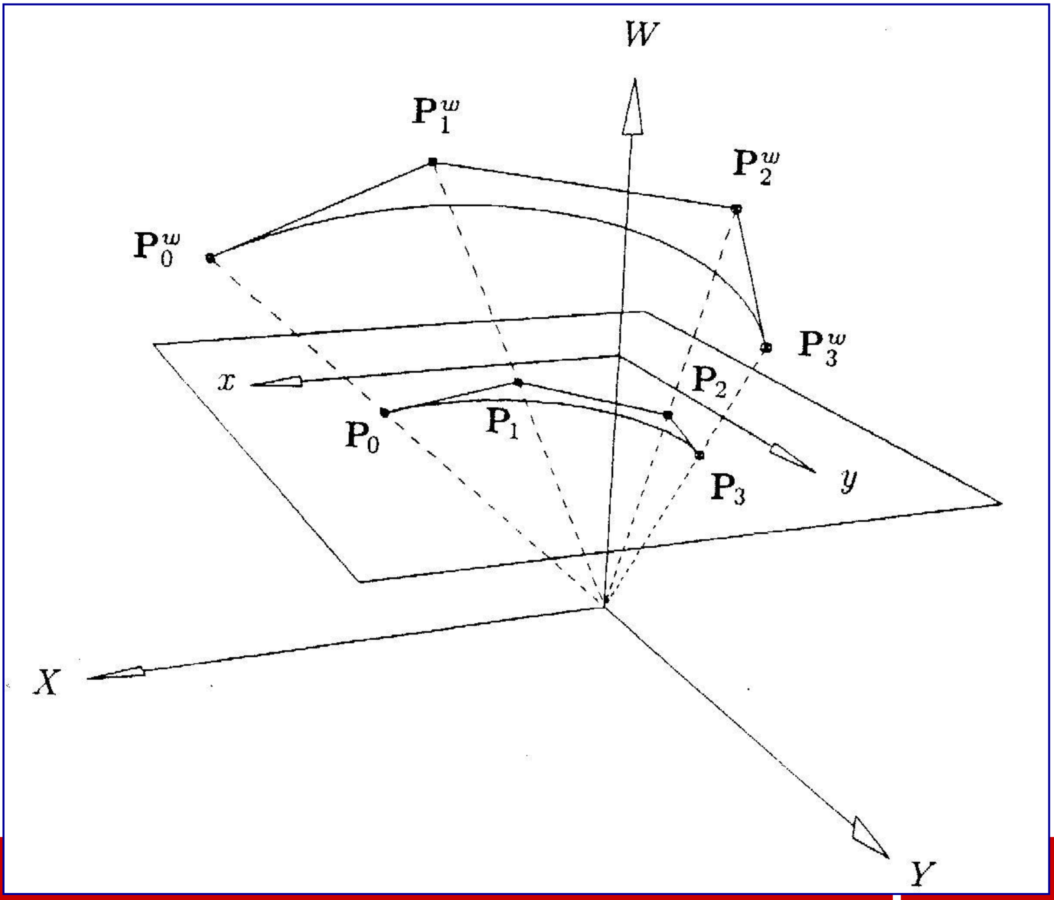
Proiezione prospettica di una curva 3D nel piano 2D:

Ogni punto della curva

$$f^w(t) = \left(x(t), y(t), w(t)\right)$$

sarà proiettato nel punto

$$f(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{x(t)}{w(t)} & \dfrac{y(t)}{w(t)} \end{pmatrix}$$



Curva razionale

Curve NURBS
(NonUniform Rational Bspline)
(Ken Versprille)

A partire dalla curva in 3D:

$$s^w(t) = \sum \begin{pmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i \end{pmatrix} N_{i,m}(t)$$

La curva razionale (proiettata) sarà

$$s(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sum w_i x_i N_{i,m}(t)}{\sum w_i N_{i,m}(t)} \\ \\ \dfrac{\sum w_i y_i N_{i,m}(t)}{\sum w_i N_{i,m}(t)} \end{pmatrix}$$

NURBS

Una curva NURBS di grado n è definita da

$$s(t) = \frac{\sum_{i=1}^{ncp} P_i w_i N_{i,n}(t)}{\sum_{i=1}^{ncp} w_i N_{i,n}(t)},$$

Oltre ai punti di controllo $\mathbf{P_i}$ per definire una NURBS è necessario associare anche i valori dei pesi

$\mathbf{w_i > 0}$ **PESI**

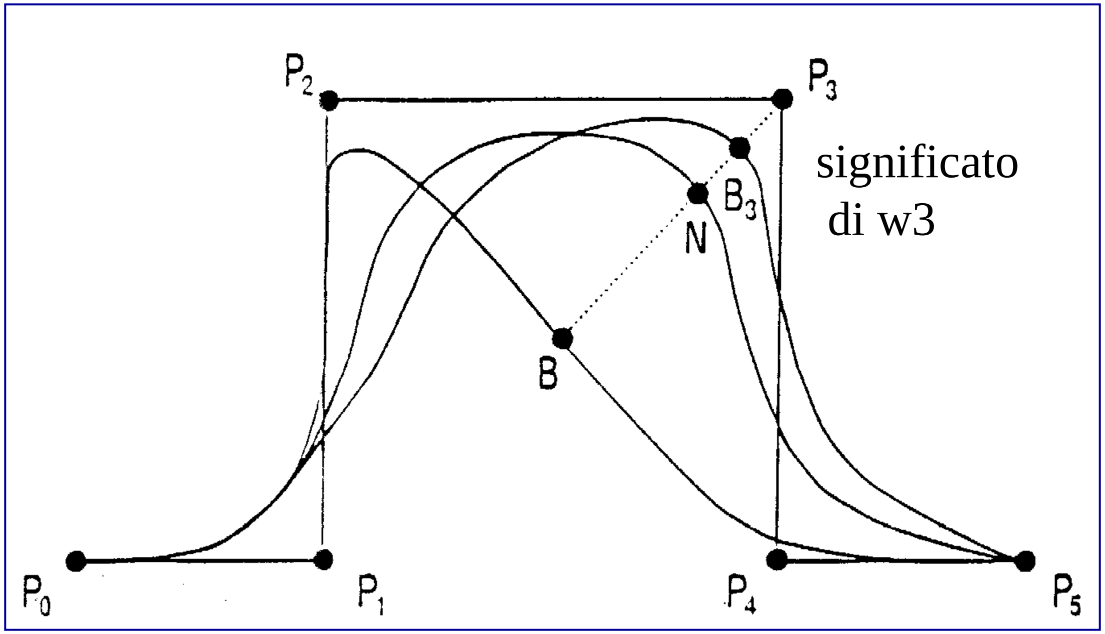
I pesi come parametri di forma

$$Pesi \quad w_i > 0, se \quad w_i = 0 \Rightarrow P_i \ all'\infty$$

$$B = s(t) \ per \ w_i \to 0$$

$$N = s(t) \ per \ w_i = 1$$

$$B_i = s(t) \ per \ w_i \neq [0,1]$$



w_i influenza la curva solo in $[t_i, t_{i+m})$

Se tutti i pesi w_i=1 allora la spline diventa non razionale

Perchè NURBS?

- Rappresentazione esatta delle sezioni coniche (es. Cerchio, ellisse, parabola, iperbole,..)

- Curve Spline sono sottoclassi NURBS

  $\Rightarrow$ ereditano tutte le loro proprietà

- Maggior flessibilità di disegno

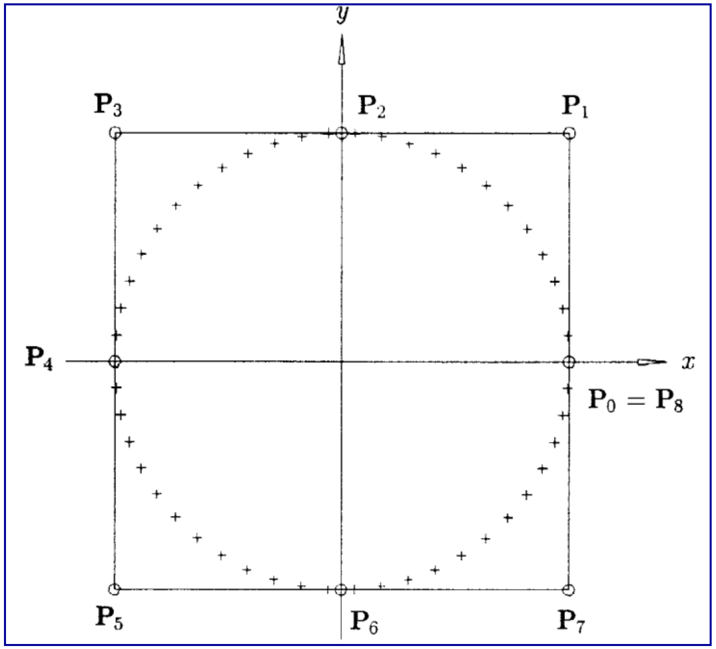
Il Cerchio

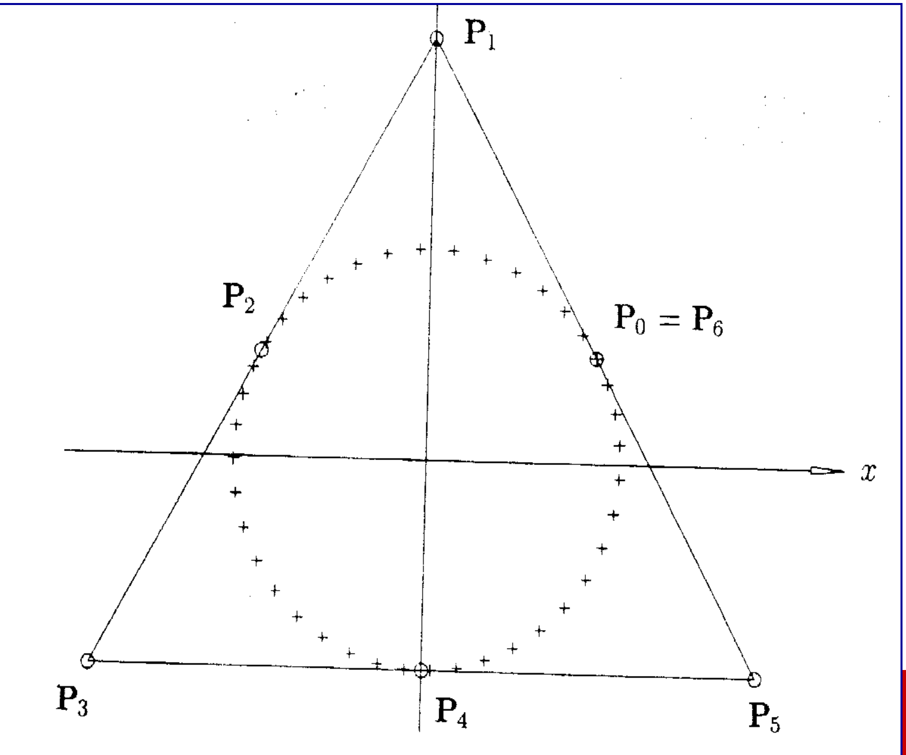
Sezioni coniche sono rappresentate esattamente da NURBS di grado 2

Cerchio a 7 punti:

$\Delta^* = \{0,0,0,1/3,1/3,2/3,2/3,1,1,1\}$

$w_i = \{1,1/2,1,1/2,1,1/2,1\}$, $w_1 = \cos(120) = 1/2$





Cerchio a 9 punti:

$\Delta^* = \{0,0,0,1/4,1/4,1/2,1/2,3/4,3/4,1,1,1\}$

$w_i = \{1,\sqrt{2}/2,1,\sqrt{2}/2,1,\sqrt{2}/2,1,\sqrt{2}/2,1\}$

Interpolazione Polinomiale

Risolubilità del problema di interpolazione mediante un polinomio

TEOREMA

Dati gli n+1 punti di collocazione

$$(t_i, y_i), i = 0,..,n, \quad t_i \neq t_j, per\ i \neq j$$

esiste ed è unico il polinomio $f \in P^n$

che verifica le condizioni

$$f(t_i) = y_i, \quad i = 0,..,n$$

Interpolazione polinomiale base delle potenze

- Dati n+1 punti, n grado interpolante, base

$$\left\{1, t, t^2, \dots, t^n\right\}$$

- Costruire il polinomio $$p(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$$

- Che soddisfi le condizioni di interpolazione:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j t_i^j = y_i \quad i = 0,..,n$$

Interpolazione polinomiale base delle potenze

$$\begin{cases} a_0 + & a_1 t_0 + & \dots + & a_n t_0^{\,n} = & y_0 \\ a_0 + & a_1 t_1 + & \dots + & a_n t_1^{\,n} = & y_1 \\ \dots & \dots & \dots + & \dots & .. \\ a_0 + & a_1 t_n + & \dots + & a_n t_n^{\,n} = & y_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & \dots & t_0^{\,n-1} & t_0^{\,n} \\ 1 & t_1 & \dots & t_1^{\,n-1} & t_1^{\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ 1 & t_n & \dots & t_n^{\,n-1} & t_n^{\,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \\ y_n \end{bmatrix}$$

Modello matematico

- Interpolazione lineare

$$\phi(x;a_0,..,a_n)=a_0\phi_0(x)+a_1\phi_1(x)+..+a_n\phi_n(x)$$

- Interpolazione polinomiale

$$\phi(x;a_0,..,a_n)=a_0+a_1x+..+a_nx^n$$

- Interpolazione trigonometrica

$$\phi(x;a_0,..,a_n)=a_0+a_1e^{xi}+a_2e^{2xi}..+a_ne^{nxi} \quad i=\sqrt{-1}$$

- Interpolazione polinomiale a tratti/spline

- Interpolazione razionale

$$\phi(x;a_0,..,a_n,b_0,..,b_m)=\frac{a_0+a_1x+..+a_nx^n}{b_0+b_1x+..+b_mx^m}$$

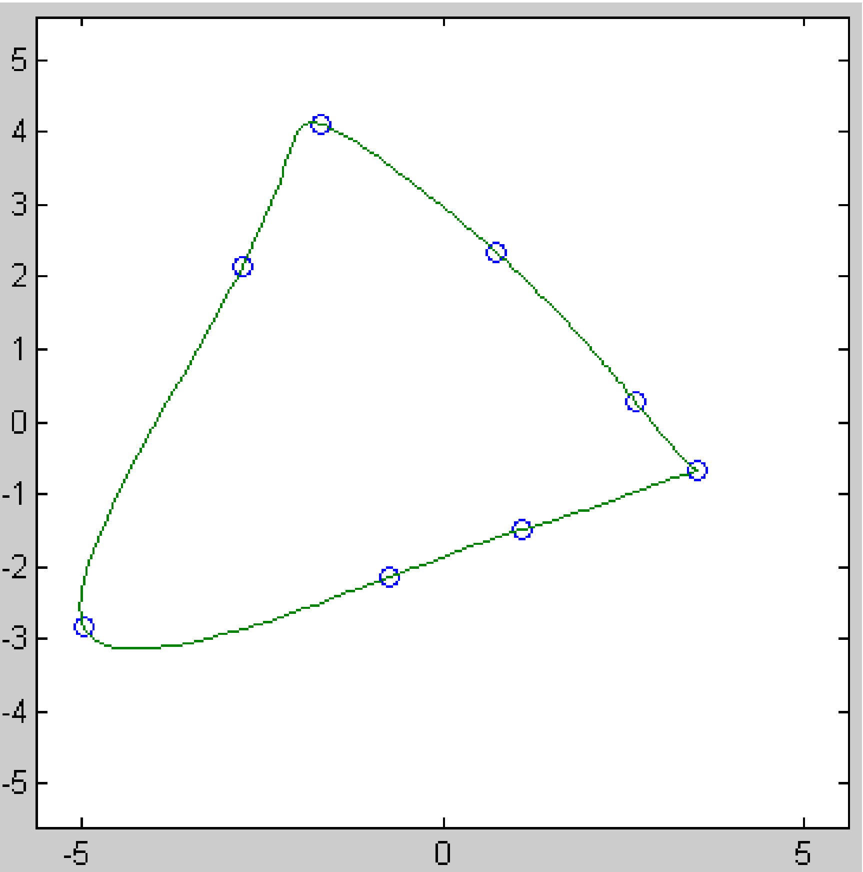
$$\sum_{j=0}^{n} a_j \phi_j(x_i) = y_i \qquad i = 0,..,n$$

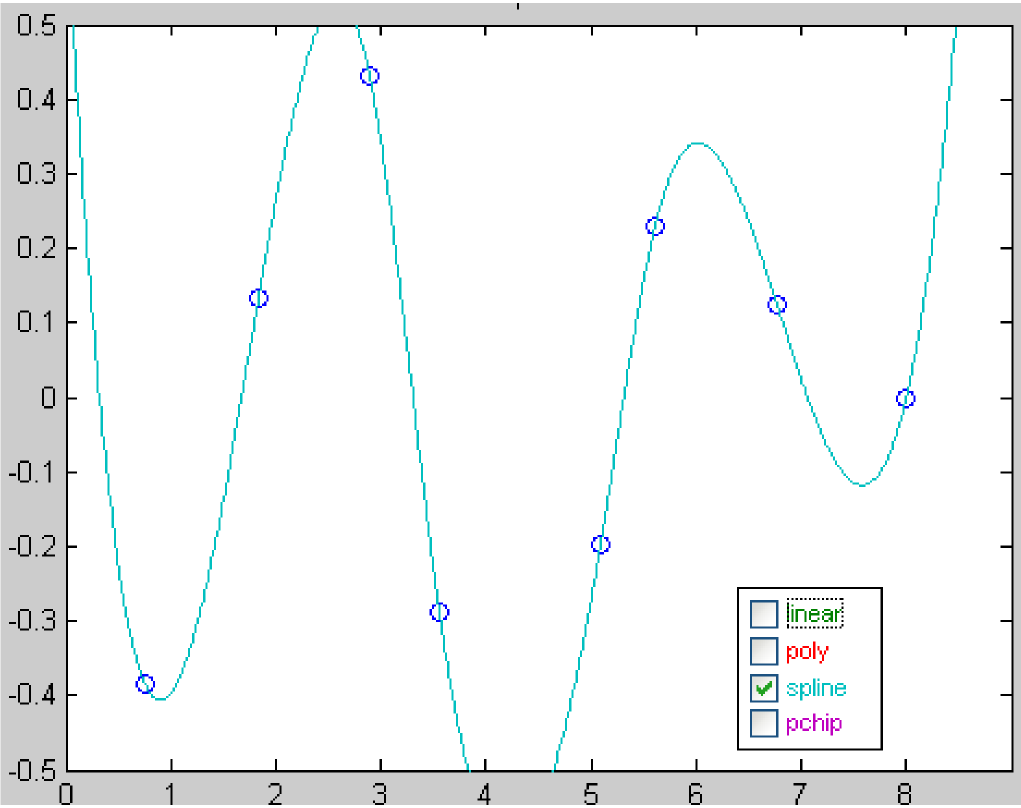
$$Aa = y \qquad A\big|_{ij} = \phi_j(x_i)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \dots & & & \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Vettore **a** : parametri incogniti dell’interpolante

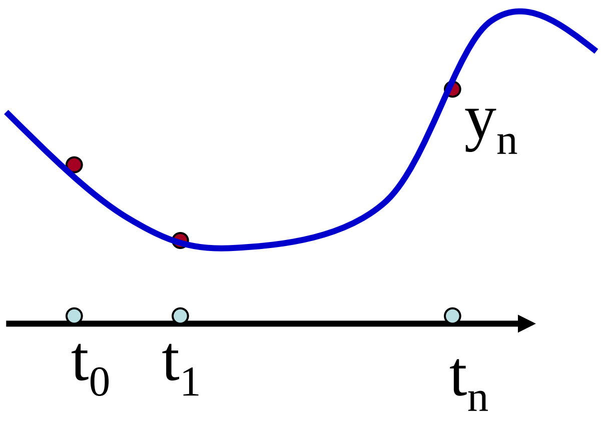
Interpolante: **funzioni vs curve**





Interpolazione di funzioni

Assegnati i punti $P_i(t_i,y_i)$ trovare la funzione che passa per tali punti



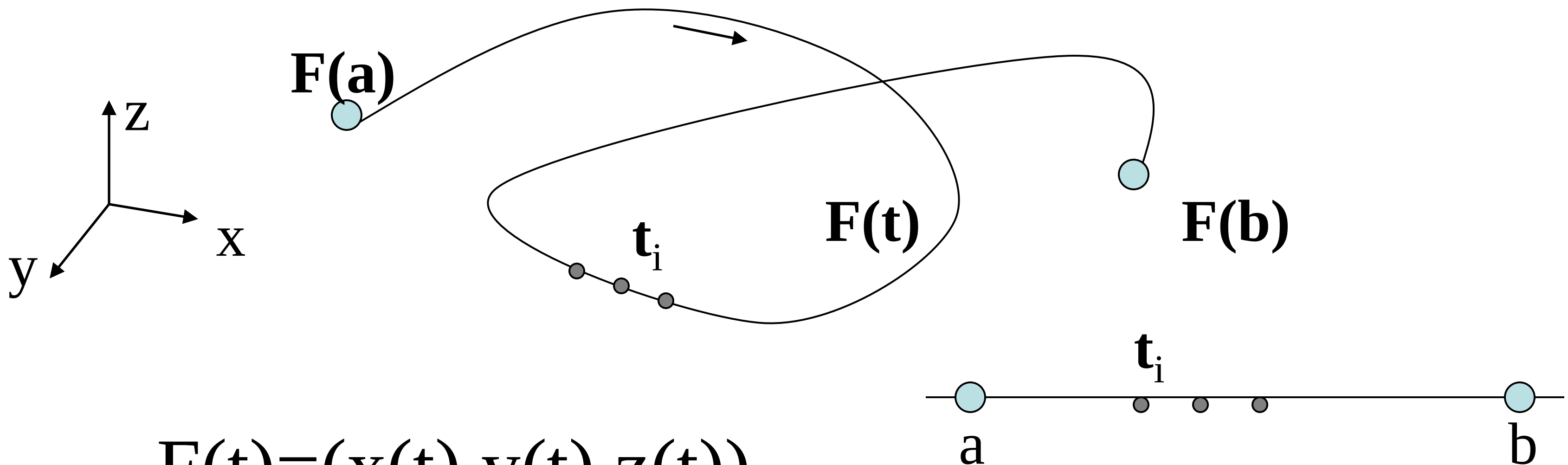
$f(t_i)=y_i \qquad i=0,..,n$

Risolvere il sistema lineare:

$$Va = Y$$

Curve in forma parametrica

Una curva parametrica nello spazio è definita da tre funzioni x(t) y(t) e z(t) del parametro t. Al variare di t, le coordinate (x(t),y(t),z(t)) individuano un punto che si sposta sulla curva.



$$F(t)=(x(t),y(t),z(t))$$

t in [a,b] individua un segmento di curva

Interpolazione con curve in forma parametrica

Assegnati i punti $P_i(x_i,y_i)$ trovare la curva

$$\mathbf{c(t)=(c_x(t),c_y(t))}$$

che passa per tali punti.

E' necessario prima associare ai punti P_i, corrispondenti valori dei parametri t_i

$$\boxed{c(t_i)=P_i \Rightarrow \begin{pmatrix} c_x(t_i) \\ c_y(t_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad i=0,..,m}$$

poi risolvere i due sistemi lineari:

$$\boxed{Va_1 = x_i \quad Va_2 = y_i}$$

Calcolo dei nodi di interpolazione

Parametrizzazione uniforme:

$t_i = i$ (o in [0,1] $t_i = i/n$)

non tiene conto della distanza tra i punti sulla curva

Parametrizzazione della corda:

Richiedendo: $$\frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} = \frac{\|\Delta P_i\|_2}{\|\Delta P_{i+1}\|_2} \qquad \Delta_i = t_{i+1} - t_i$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\tau_1 = 0 \\ &\tau_i = \tau_{i-1} + \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad i = 2,..,n \\ &t_i = \frac{\tau_i}{\tau_n} \quad i = 1,..,n \end{aligned}}$$

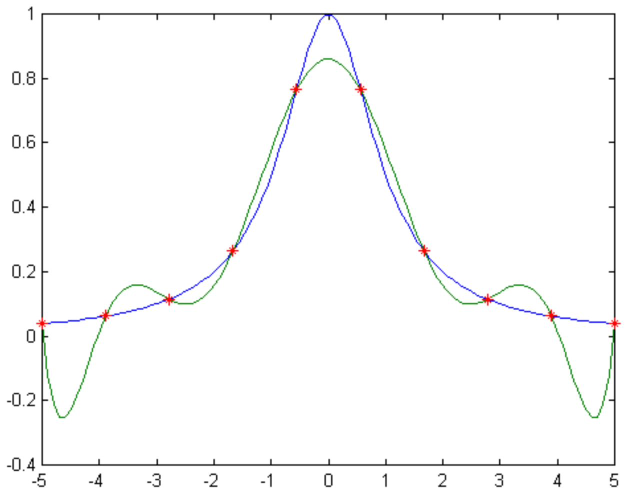
Problema interpolante globale

Limite dell'interpolazione polinomiale :

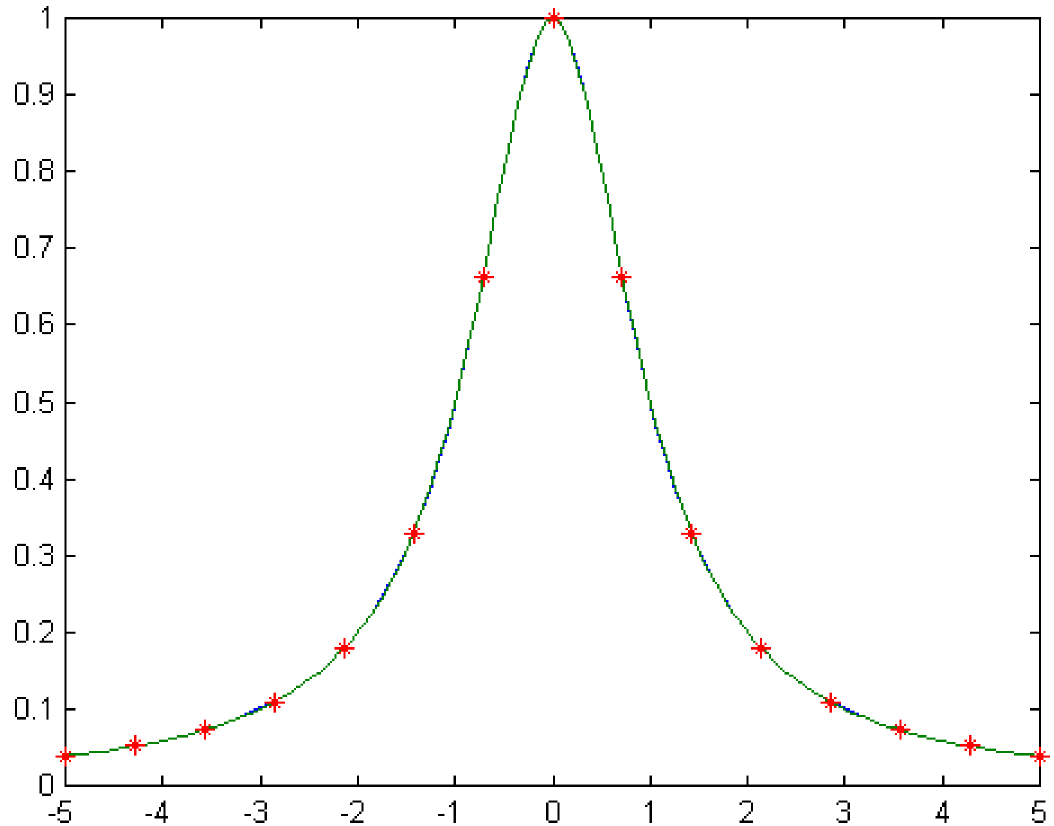
- Il polinomio interpolante oscilla
- Non conserva la 'forma' definita dai punti di interpolazione
- Aumentando il numero dei punti di interpolazione la situazione in generale peggiora.

Il fenomeno di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad [a,b] = [-5,5]$$



Grado 9



L'errore aumenta all'estremità dell'intervallo

Spline di interpolazione di grado 3

Interpolazione polinomiale a TRATTI con funzioni e curve SPLINE

Dai polinomi ai polinomi a tratti…..

- I polinomi sono funzioni regolari, facilmente calcolabili, con derivata ed antiderivata ancora in forma polinomiale, approssimano funzioni continue..

- I polinomi possono presentare la caratteristica di oscillare all'aumentare del grado;
- Buon comportamento su piccoli intervalli e grado basso (n <4,5);

- Si suddivide l'intervallo in tratti più piccoli e si lavora su questi con polinomi di grado relativamente basso;

Interpolazione Polinomiale a tratti

- Siano assegnate m+1 osservazioni y_i, $i=0,..,m$
  nei punti (**NODI x_i**):

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$$

- Un polinomio interpolante a tratti consiste di m polinomi di grado n<<m:

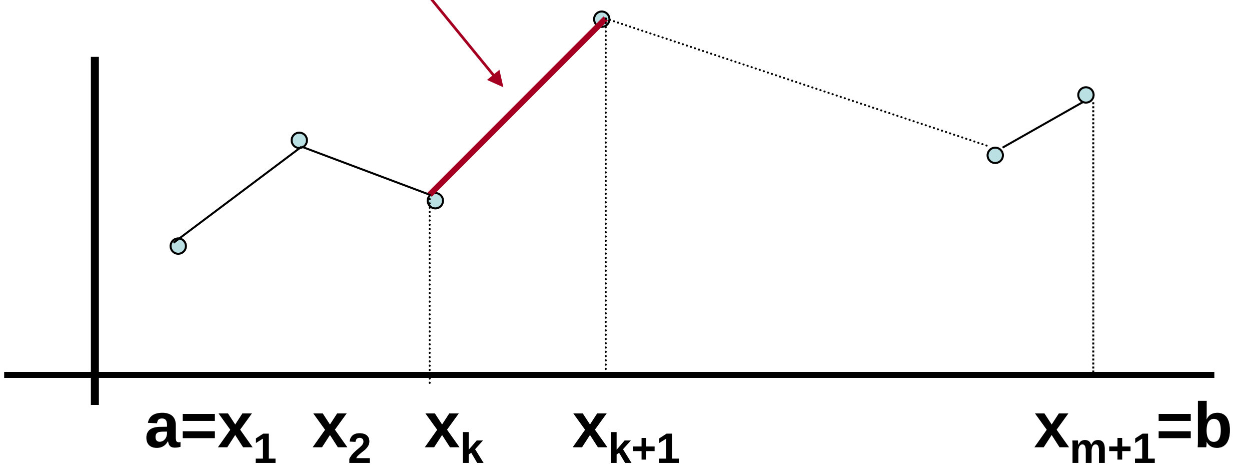
$$p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{m-1}(x),$$

$$p_k(x) \quad \text{definito} \quad \text{su} \quad [x_k, x_{k+1}]$$

$$\text{soddisfa} \quad p_k(x_k) = y_k \quad p_k(x_{k+1}) = y_{k+1} \quad k = 0, \ldots, m-1$$

Polinomi a tratti di interpolazione di grado 1

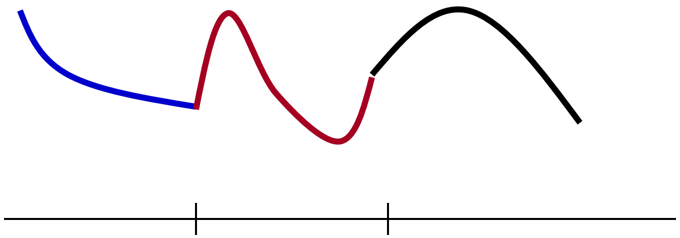
$$p(x) = p_k(x) = y_k + (x - x_k)\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}; \quad x \in [x_k, x_{k+1}]$$



Polinomi a tratti di interpolazione

- Si è però persa un' importante proprietà:

  I polinomi a tratti non sono necessariamente funzioni regolari (C^1):



- ESEMPIO: se n=1, p(x) è funzione continua, ma p'(x) non è continua, assume un valore costante d_k

$$d_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

su ogni sottointervallo, con salti nei nodi.

Curve spline di interpolazione

- Problema:

  Determinare una curva $s(t)=(s_x(t),s_y(t))$ di grado p tale che passi nell'ordine per m+1 punti $P_i=(x_i,y_i)$ i=0,..,m del piano preassegnati.

- Algoritmo:
  - Determinare i valori dei nodi di interpolazione t_i
  - Risolvere le due funzioni spline di interpolazione s_x e s_y :

$$s_x(t_i)=x_i; \qquad e \qquad s_y(t_i)=y_i;$$

Theorem: spline function interpolation

$(x_i, y_i) \quad i = 1,..,N$ *punti di interpolazione*

Il problema di interpolazione

$$s(x_i) = \sum_{j=1}^{K+m} c_j N_{j,m}(x_i) = y_i \quad i = 1,..,N$$

ha un'unica soluzione $c = \{ c_i \}$ *se e solo se*

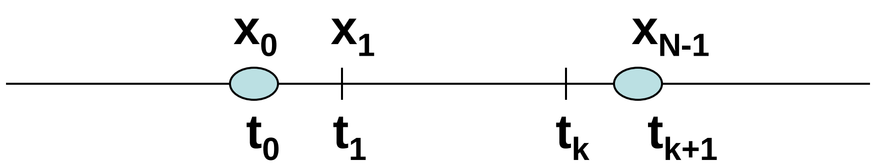
$N_{j,m}(x_{j+m}) \neq 0 \quad j = 1,...,K+m$

$s(x)$ *ha* $K+m$ *gradi di libertà* $\Rightarrow N = K+m$

Poichè in ogni intervallino $[t_i,t_{i+1}]$, s(x) è polinomio di grado al più m-1, è evidente che in esso non possono esserci più di m punti di interpolazione x_i

Scelta dei nodi di interpolazione

Possiamo scegliere i nodi t_i della spline coincidenti con i punti di interpolazione x_i



Es: spline lineare (m=2)

K+2=N   K nodi interni+2 estremi

Es: spline cubica (m=4)

K+4=N   K nodi interni+2 estremi allora

Rimangono due gradi di libertà

Spline cubiche di interpolazione

Siano $(x_i,y_i)_{i=0,..,k+1}$ i punti di interpolazione (x_i distinti).

Sia $\Delta=\{x_i\}$ una partizione. Allora esiste una ed una sola spline s(x) cubica (m=4) per cui risulta

$$\boxed{s(x_i) = y_i \quad i = 0,..,k+1}$$

e per cui si verifica una ed una sola delle seguenti condizioni:

$$1) s'(x_0) = y_0' \quad s'(x_{k+1}) = y_{k+1}'$$

derivata agli estremi data

$$2) s''(x_0) = 0 \quad s''(x_{k+1}) = 0$$

naturale

$$3) s(x_0) = s(x_{k+1}); \quad s'(x_0) = s'(x_{k+1}); \quad s''(x_0) = s''(x_{k+1});$$

$se\ y_0 \equiv y_{k+1}$ **periodica**

Interpolante con derivata agli estremi

Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} s'(x_0) = y_0' \\ s(x_i) = y_i \quad i = 0,..,k+1 \\ s'(x_{k+1}) = y_{k+1}' \end{cases}$$

Interpolante spline naturale

Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} s''(x_0) = 0 \\ s(x_i) = y_i \quad i = 0,..,k+1 \\ s''(x_{k+1}) = 0 \end{cases}$$

Interpolante spline periodica

Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} s(x_0) = s(x_{k+1}) \\ s'(x_0) = s'(x_{k+1}) \\ s''(x_0) = s''(x_{k+1}) \\ s(x_i) = y_i \quad i = 0,..,k+1 \end{cases}$$

Partizione nodale estesa a nodi distinti

Curve spline di interpolazione

- Problema:

  Determinare una curva $s(t)=(s_x(t),s_y(t))$ di grado p tale che passi nell'ordine per m+1 punti $P_i=(x_i,y_i)$ i=0,..,m del piano preassegnati.

- Algoritmo:
  - Determinare i valori dei nodi di interpolazione t_i
    - Parametrizzazione uniforme/corda
  - Risolvere le due funzioni spline di interpolazione s_x e s_y :

$$s_x(t_i)=x_i; \quad e \quad s_y(t_i)=y_i;$$

Curve spline di interpolazione

Costruiamo infine i sistemi lineari nelle (n+1) eq.

$$s(t_i) = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{n} Q^x{}_j N_{j,m}(t_i) \\ \sum_{j=0}^{n} Q^y{}_j N_{j,m}(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \qquad i = 0,..,n$$

Nelle (n+1) incognite le componenti x ed y
dei control point Q_j j=0,..,n della curva interpolante