Integrazione numerica

- **Formule di Newton-Cotes**
  - Trapezi
  - Simpson
  - Punto medio
  - Composite
- **Metodi Adattivi**
- **Formule Gaussiane**

Integrazione numerica

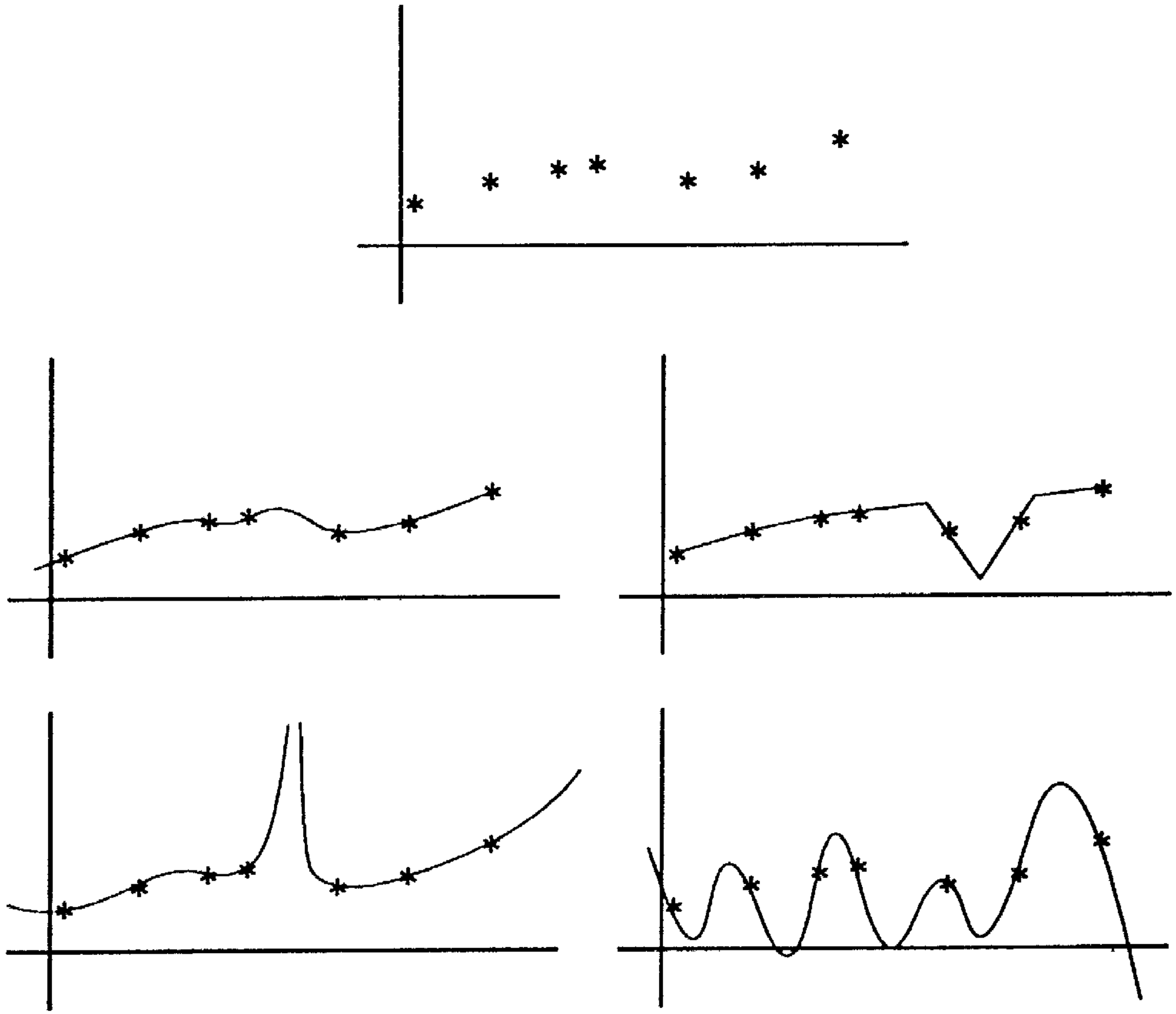
PROBLEMA:

Sia f una funzione definita sull'intervallo [a,b], si vuole determinare un'approssimazione dell'integrale definito

$$\boxed{I(f;a,b) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

1. di f(x) sono noti solo i valori in un insieme finito di punti;
2. Integrale non valutabile in forma chiusa

Funzioni passanti per gli stessi punti



Formule di quadratura

$$I(f;a,b)=\int_a^b f(x)dx \approx \boxed{I_n(f)=\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)}$$

Coefficienti o pesi $\mathbf{c_i}$

Nodi

Resto della formula di quadratura

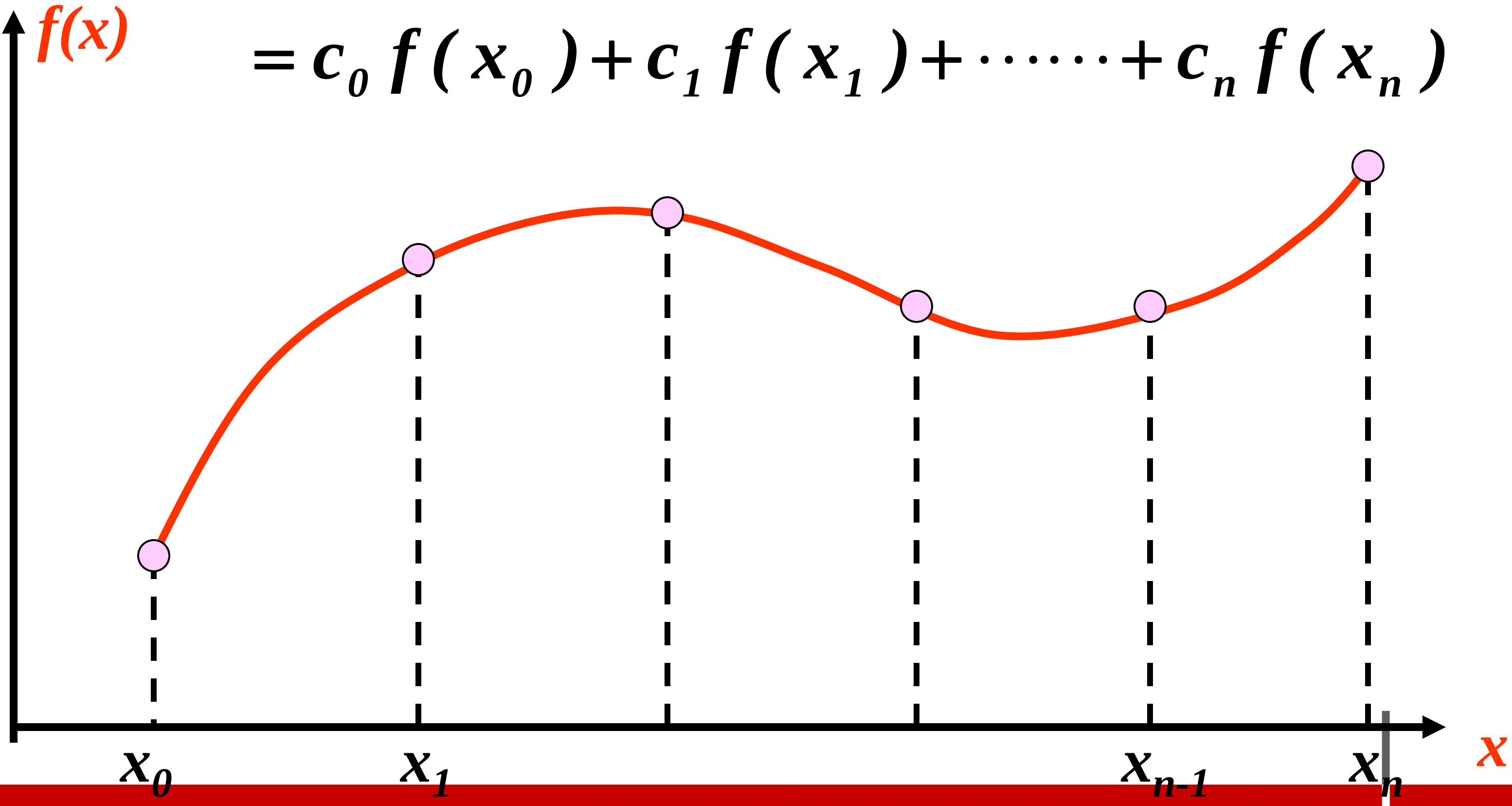
$$r_n = I - I_n$$

Formule di quadratura

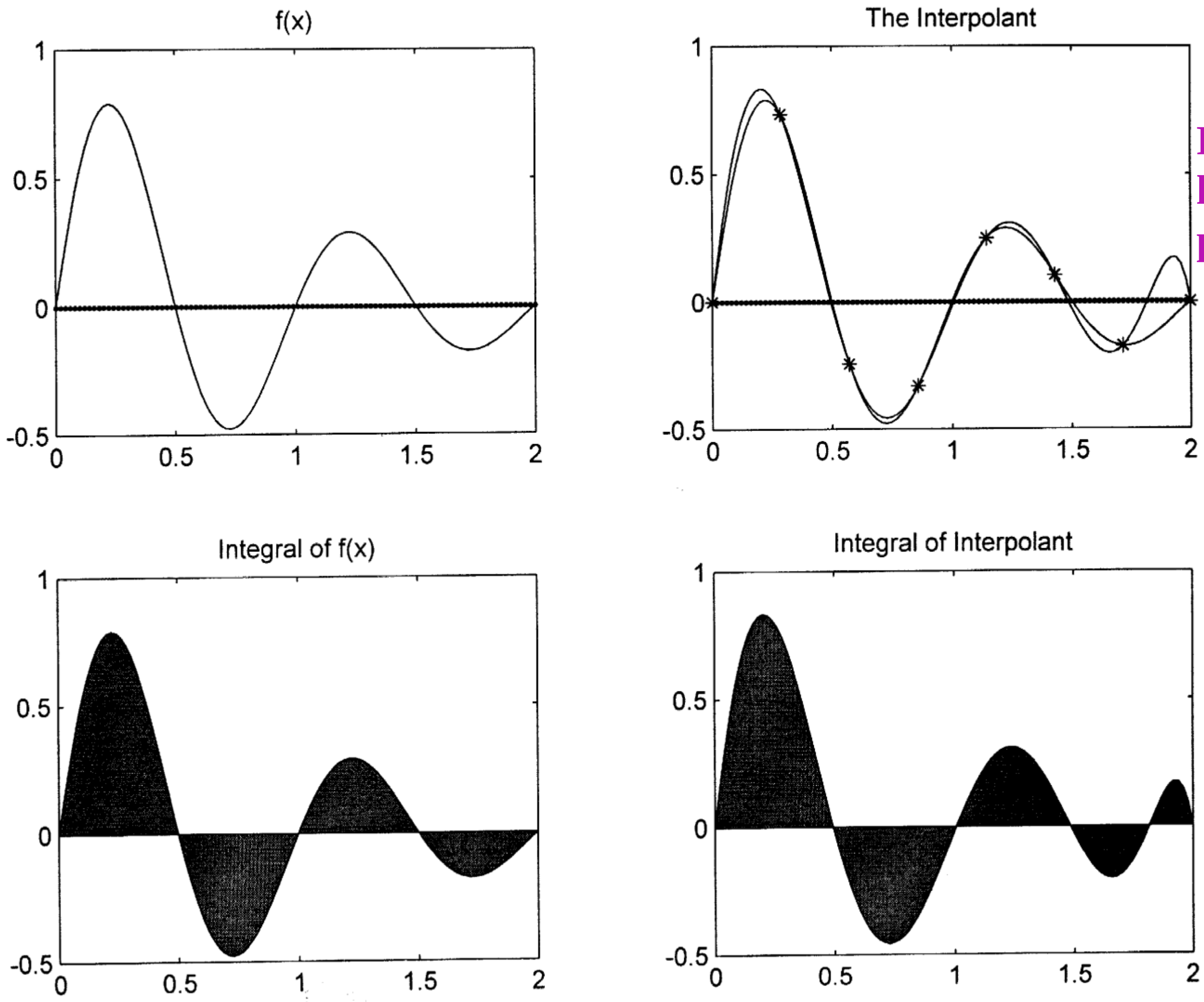
Somma pesata di valori della funzione in punti opportuni appartenenti o meno all'intervallo di integrazione

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$$

$$= c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \cdots\cdots + c_n f(x_n)$$



$$I(f;a,b)=\int_a^b f(x)dx \qquad I_n(f;a,b)=\int_a^b p_n(x)dx$$



Polinomio che interpola la funzione *f(x)* in n+1 punti $(x_i,f(x_i))$

Formule di tipo interpolatorio

Sia $p_n(x)$ il polinomio interpolante di Lagrange in n+1 punti distinti

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

coefficienti

$$I_n(f) = \int_a^b p_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \boxed{\int_a^b L_i(x)}\,dx$$

nodi

La formula di quadratura risulta esatta per costruzione per i polinomi di grado almeno n (grado di precisione almeno n)

Grado di precisione

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{I} = \underbrace{\int_a^b p(x)dx}_{I_n} + r_n \approx \int_a^b p(x)dx$$

Resto della formula di quadratura

$$r_n = I - I_n \qquad\qquad I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

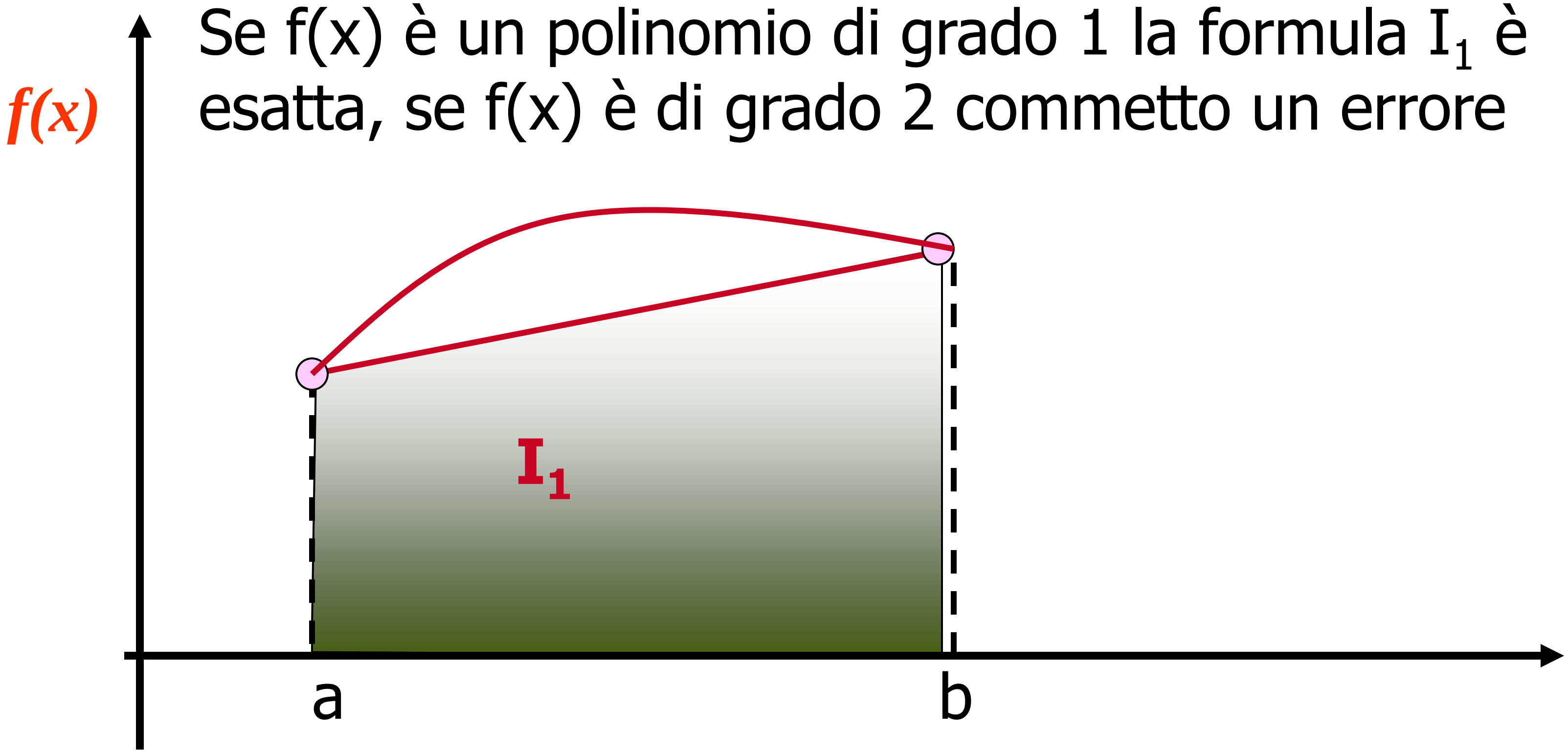
Grado di precisione o esattezza

Una formula di quadratura I_n ha grado di precisione **k** se è esatta (r_n=0) quando la funzione integranda è un polinomio qualsiasi p(x) di grado minore o uguale a k.

$$I(p) = I_n(p) \qquad\qquad \forall p \in \mathbf{P}_k$$

Grado di precisione

Se f(x) è un polinomio di grado 1 la formula I_1 è esatta, se f(x) è di grado 2 commetto un errore



Grado di precisione 1

Formule di quadratura di Newton-Cotes (nodi equispaziati)

- **Newton-Cotes Chiuse**

  Usano entrambi gli estremi di integrazione
  - formula dei Trapezi : Lineare
  - formula di Simpson 1/3: Quadratica
  - formula di Simpson 3/8 : Cubica
- **Newton-Cotes aperte**

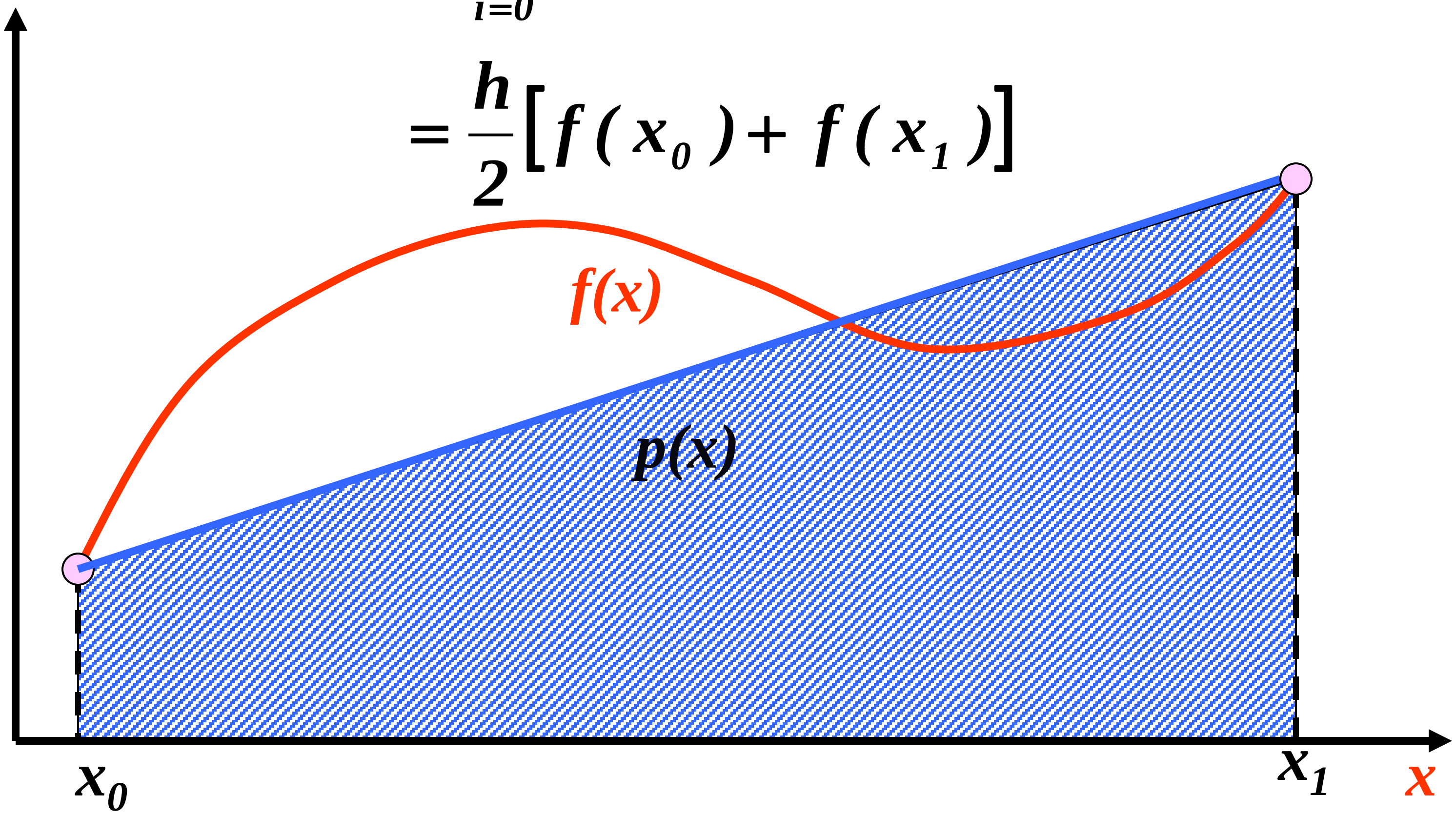
  Usano solo punti interni
  - formula del punto medio

Formula dei Trapezi

Approssimazione lineare di f(x)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{1} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right]$$



Formula dei Trapezi

Polinomio di interpolazione di Lagrange, n=1

$$p(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$$

$$p(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

Cambiamento di variabile

nodi $\quad \mathrm{a} = \mathrm{x}_0,\ \mathrm{b} = \mathrm{x}_1,\quad \mathrm{x} \in [\mathrm{a,b}] \quad \xi \in [0,1]$

$$\xi = \frac{x-a}{b-a},\quad \mathrm{d}\xi = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{h}};\quad h = b - a$$

$$x = a \ \Rightarrow \xi = 0 \qquad\qquad x = b \ \Rightarrow \xi = 1$$

$$\boxed{p(\xi) = (1-\xi) f(a) + (\xi) f(b)}$$

Formula dei Trapezi

Integrando

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = h\int_0^1 p(\xi)d\xi$$

$$= f(a)h\int_0^1 (1-\xi)d\xi + f(b)h\int_0^1 \xi d\xi$$

$$= f(a)h(\xi - \frac{\xi^2}{2})\Big|_0^1 + f(b)h\frac{\xi^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)]$$

Esempio: formula Trapezi

Calcolare l'integrale

$$\boxed{\int_0^4 xe^{2x}dx}$$

Soluzione esatta

$$\int_0^4 xe^{2x}dx = \left[\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)\Big|_0^1 = 5216.926477$$

Formula dei Trapezi

$$I = \int_0^4 xe^{2x}dx \approx \frac{4-0}{2}\left[f(0)+f(4)\right] = 2(0+4e^8) = 23847.66$$

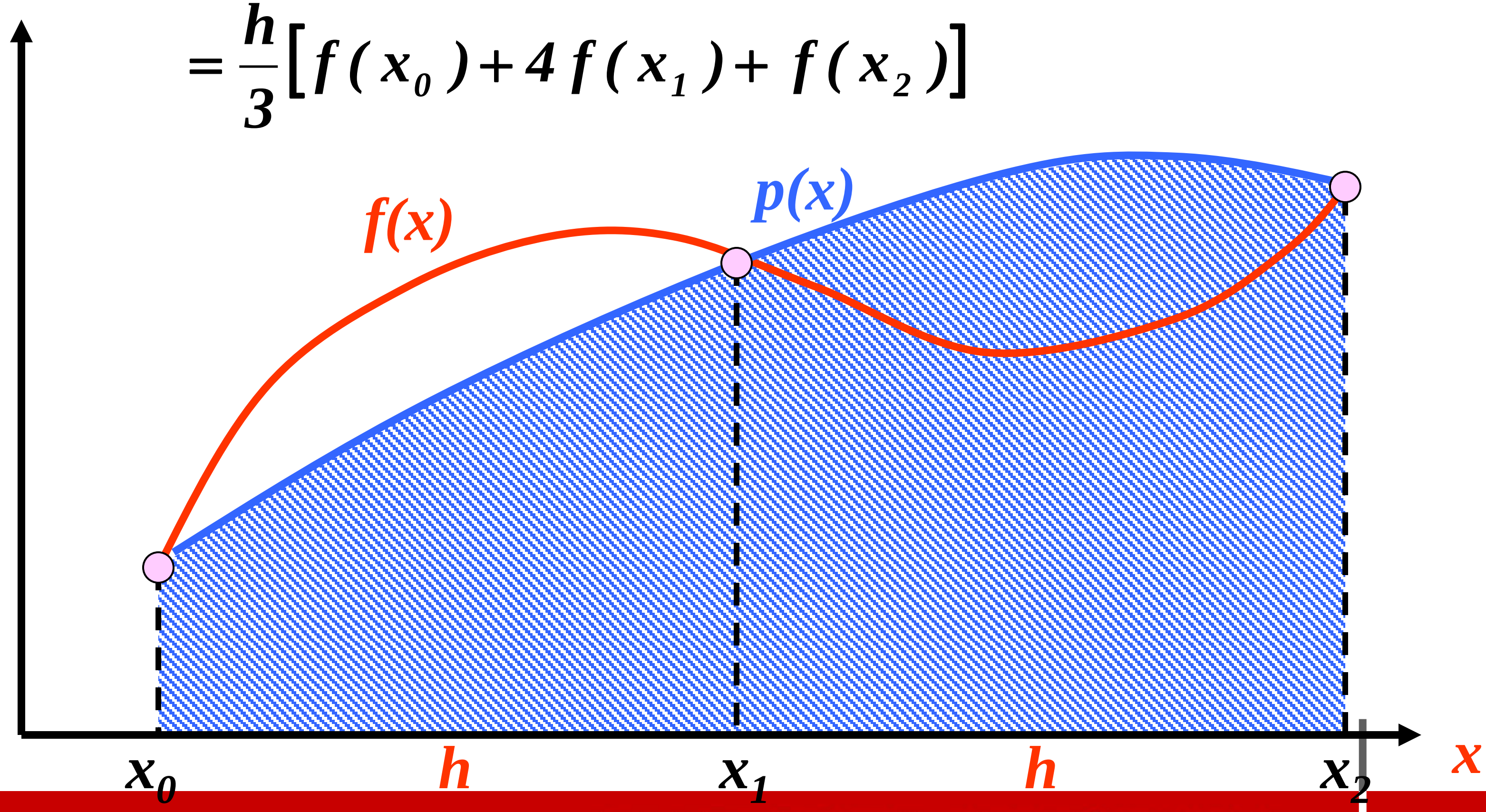
$$\varepsilon = \frac{5216.926 - 23847.66}{5216.926} = -357.12\%$$

Formula di Simpson 1/3

Approssima la funzione f(x) con una parabola p(x), n=2

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{2} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$



Formula di Simpson 1/3

$$p(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

nodi $\mathrm{x}_0 = a,\ \mathrm{x}_2 = b,\ \mathrm{x}_1 = \frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}$

$$x \in [a,b] \qquad \xi \in [-1,1] \quad h = \frac{b-a}{2},\ \xi = \frac{x-x_1}{h},\ \mathrm{d}\xi = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{h}}$$

$$\begin{cases} x = x_0 & \Rightarrow \xi = -1 \\ x = x_1 & \Rightarrow \xi = 0 \\ x = x_2 & \Rightarrow \xi = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{p(\xi) = \frac{\xi(\xi-1)}{2} f(x_0) + (1-\xi^2) f(x_1) + \frac{\xi(\xi+1)}{2} f(x_2)}$$

Formula di Simpson 1/3

Integriamo il polinomio interpolante di Lagrange

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\int_{-1}^{1} p(\xi)d\xi =$$

$$= f(x_0)\frac{h}{2}\int_{-1}^{1}\xi(\xi-1)d\xi + f(x_1)h\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)d\xi + f(x_2)\frac{h}{2}\int_{-1}^{1}\xi(\xi+1)d\xi$$

$$= f(x_0)\frac{h}{2}\left(\frac{\xi^3}{3}-\frac{\xi^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} + f(x_1)h\left(\xi-\frac{\xi^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} + f(x_2)\frac{h}{2}\left(\frac{\xi^3}{3}+\frac{\xi^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

Grado di precisione almeno 2

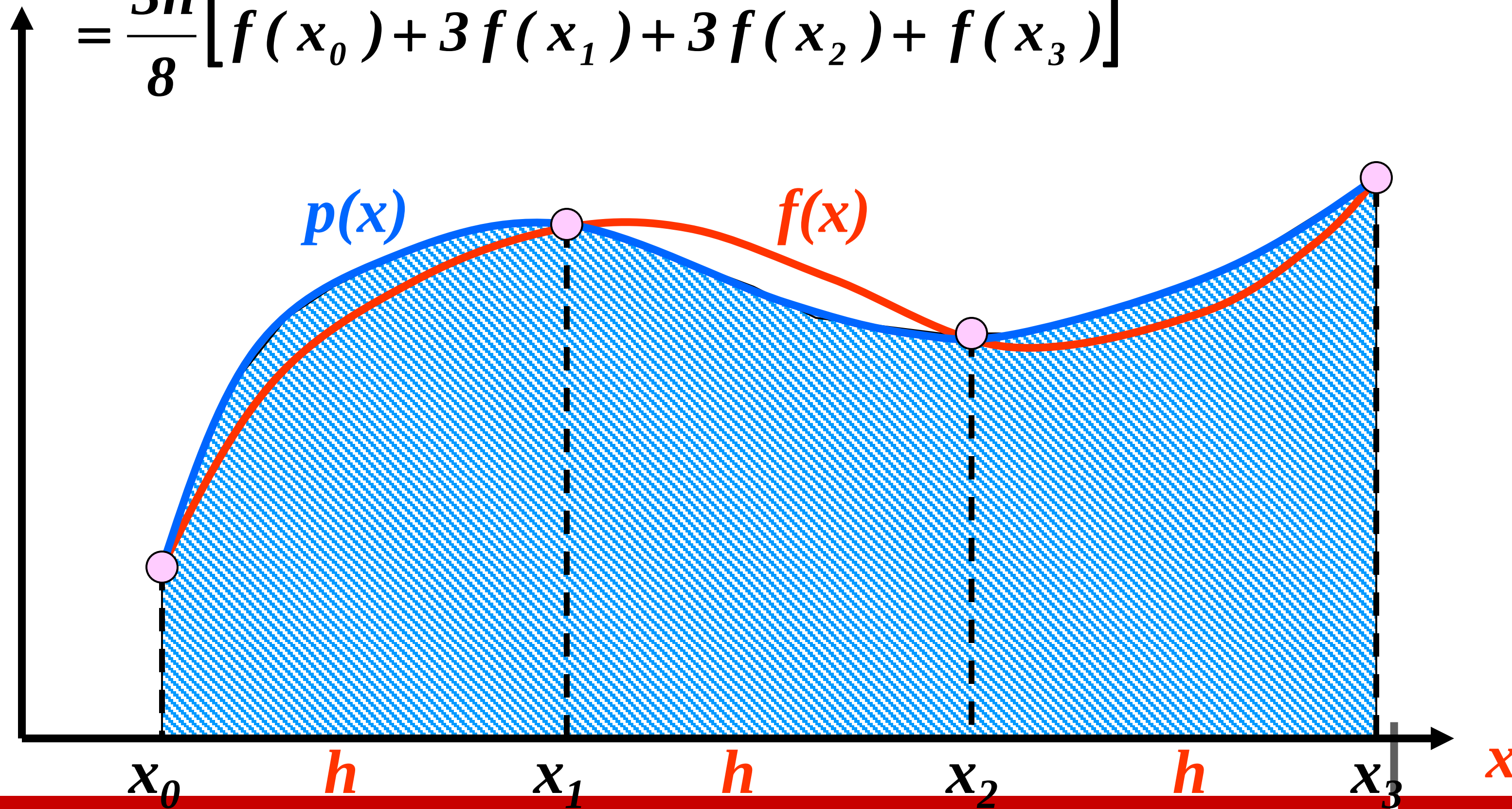
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]}$$

Formula di Simpson 3/8

Approssimiamo con un polinomio cubico, n=3

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{3} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

$$= \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \right]$$



Esempi: formule di Simpson

Calcolare l' integrale $\int_0^4 xe^{2x}dx$

- Simpson 1/3

$$I=\int_0^4 xe^{2x}dx \approx \frac{h}{3}\left[f(0)+4f(2)+f(4)\right]$$

$$=\frac{2}{3}\left[0+4(2e^4)+4e^8\right]=8240.411$$

$$\varepsilon=\frac{5216.926-8240.411}{5216.926}=-57.96\%$$

- Simpson 3/8

$$I=\int_0^4 xe^{2x}dx \approx \frac{3h}{8}\left[f(0)+3f\left(\frac{4}{3}\right)+3f\left(\frac{8}{3}\right)+f(4)\right]$$

$$=\frac{3(4/3)}{8}\left[0+3(19.18922)+3(552.33933)+11923.832\right]=6819.209$$

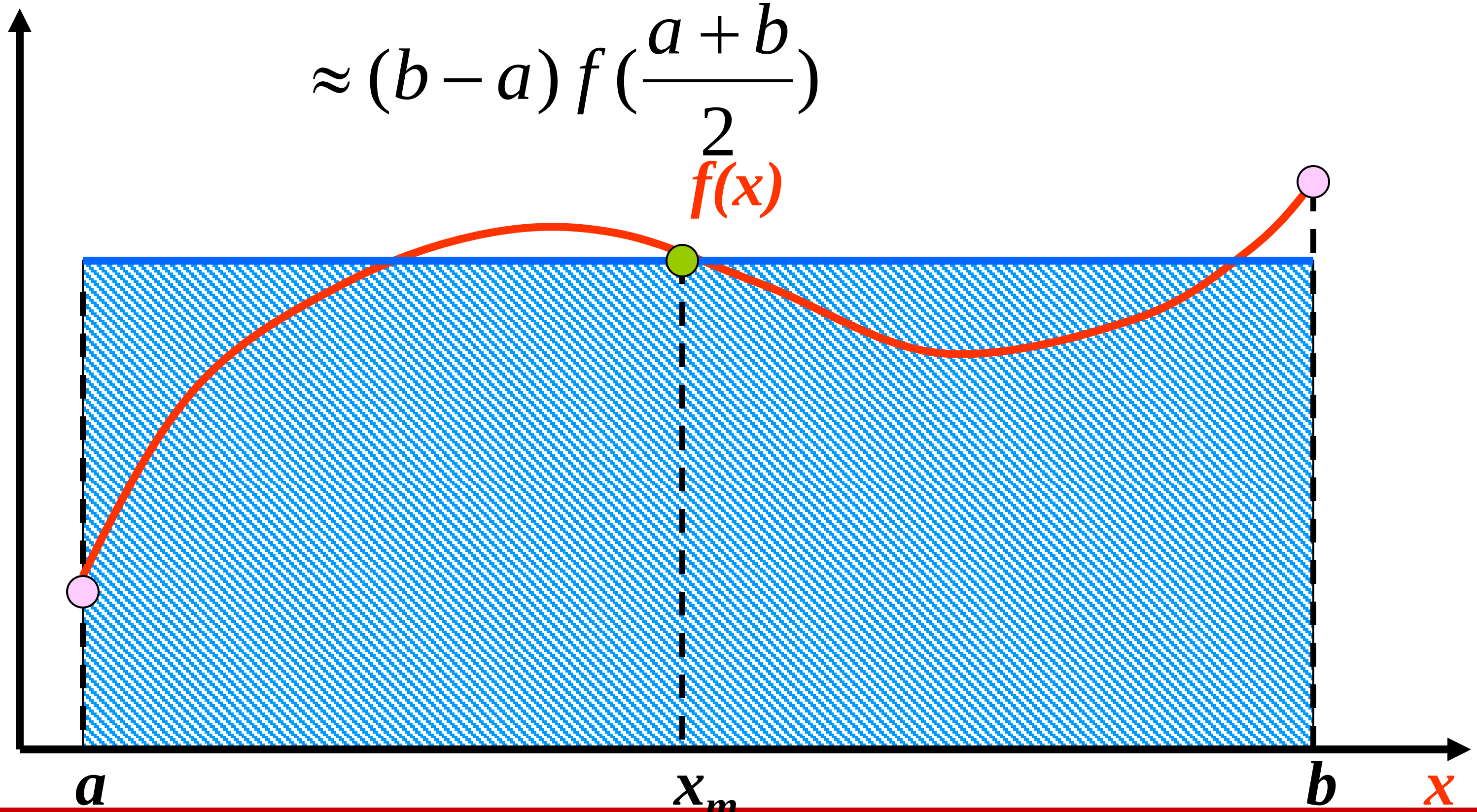
$$\varepsilon=\frac{5216.926-6819.209}{5216.926}=-30.71\%$$

Formula del punto Medio

Formula di Newton-Cotes aperta n=0

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(x_m)$$

$$\approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$



Errore di troncamento r_n

Errore interpolazione polinomiale

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\Pi_n(x) f^{(n+1)}(\xi)$$

$$dove \quad \Pi_n(x) = \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Errore di una formula di quadratura interpolatoria

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p(x)dx + r_n \cong \int_a^b p(x)dx$$

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi)\Pi_n(x)dx\,, \quad f \in C^{n+1}\textbf{([a, b])}\ ,\xi \in (a,b)$$

La formula di quadratura risulta esatta per costruzione per i polinomi di grado almeno n (grado di precisione almeno n)

Errore di troncamento r_n

Poichè i nodi x_i sono equidistanti l'espressione del resto si semplifica

TEOREMA

Formula con n pari aperte o chiuse

Se $f \in C^{n+2}([a,b])$ **e** $\xi \in (a,b)$

$$r_n = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} \mathbf{t}^{\mathbf{2}}(t-1)\cdots(t-n)\,dt$$

$\boxed{\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} \textbf{ per formule chiuse } \int_{\mathbf{-1}}^{\mathbf{n+1}} \textbf{ per formule aperte}}$

Grado di precisione n+1

Formula con n dispari aperte o chiuse

$$\textbf{Se} \quad f \in C^{n+1}([a,b]) \quad \textbf{e} \quad \xi \in (a,b)$$

$$r_n = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} \mathbf{t}(t-1)\cdots(t-n)\,dt$$

$\int_0^n$ **per formule chiuse** $\int_{-1}^{n+1}$ **per formule aperte**

Grado di precisione n

Le formule di Newton-Cotes hanno grado di precisione n+1 se n è PARI e n se n è DISPARI

Errore di troncamento nella formula dei trapezi

$$n = 1; \quad h = b - a$$

$$r_1 = \frac{h^3}{2!} f^{(2)}(\eta) \int_0^1 t(t-1)dx$$

$$\int_0^1 t(t-1)dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{6}$$

$$\boxed{r_1 = -\frac{1}{12} h^3 f^{(2)}(\eta)}$$

Errori nelle formule di Newton-Cotes

$$\boxed{r_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \qquad h = b-a}$$

Formula dei trapezi

$$\boxed{r_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \qquad h = \frac{b-a}{2}}$$

Formula di Simpson 1/3

$$\boxed{r_3(f) = -\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi) \qquad h = \frac{b-a}{3}}$$

Formula di Simpson 3/8

$$\boxed{r_0(f) = \frac{h^3}{3} f''(\xi) \quad h = \frac{b-a}{2}}$$

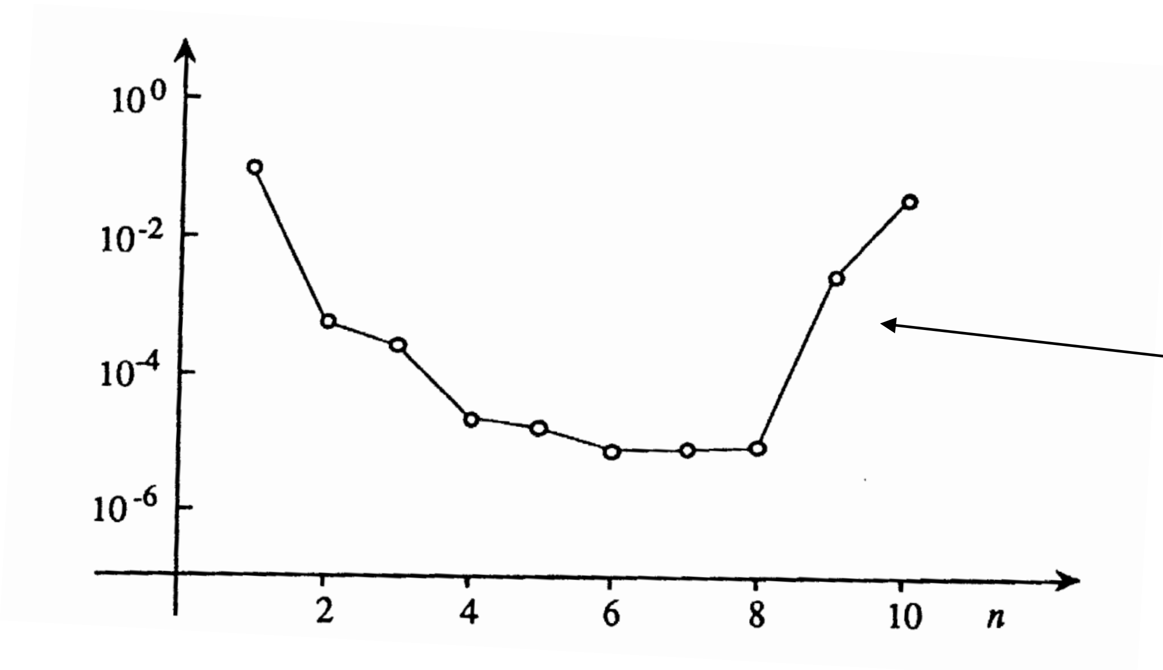
Formula del punto medio

Si può dimostrare che i coefficienti o pesi w_i di una formula di quadratura dipendono solo da n, ma non dall'intervallo di integrazione [a,b] o da f(x) e possono quindi essere calcolati a priori.

Pesi per formule chiuse di Newton-Cotes a n+1 punti

n	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
1	1/2	1/2							
2	1/3	4/3	1/3						
3	3/8	9/8	9/8	3/8					
4	14/45	64/45	24/45	64/45	14/45				
5	95/ 288	375/ 288	250/ 288	250/ 288	375/ 288	95/ 288			
6	41/ 840	216/ 840	27/ 840	272/ 840	27/ 840	216/ 840	41/ 840		
7	751/ 17280	3577/1 7280	1323/ 17280	2989/ 17280	2989/ 17280	1323/ 17280	3577/ 17280	751/ 17280	
8	989/ 28350	5888/2 8350	-928/ 28350	10496/2 8350	-4540/ 28350	10496/ 28350	-928/ 28350	5888/ 28350	989/ 28350

Formule di quadratura di Newton-Cotes nodi equispaziati



Instabilità numerica delle formule di quadratura per n>8

Errore relativo nel calcolo delle formule di Newton-Cotes per l'approssimazione di

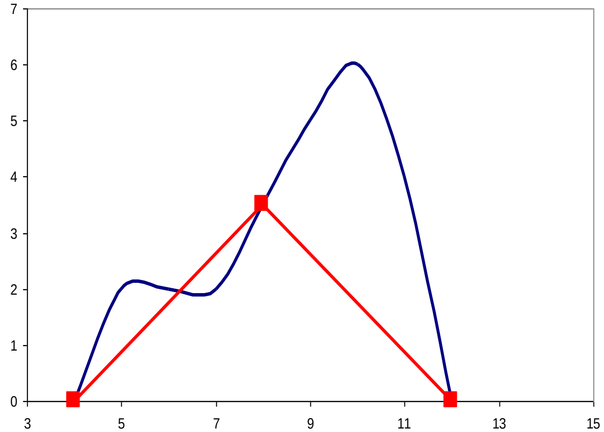
$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

Per migliorare l'accuratezza

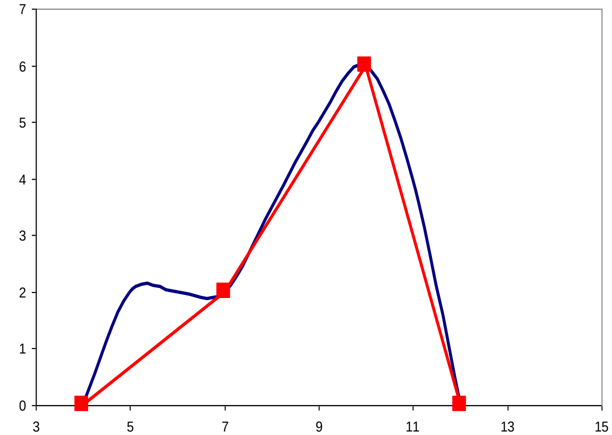
- **Formule Composite**
  - **Formula dei Trapezi Composita**
  - **Formula di Simpson Composita**
- **Estrapolazione di Richardson**
- **Integrazione di Romberg**

Applichiamo la formula dei trapezi su sottointervalli

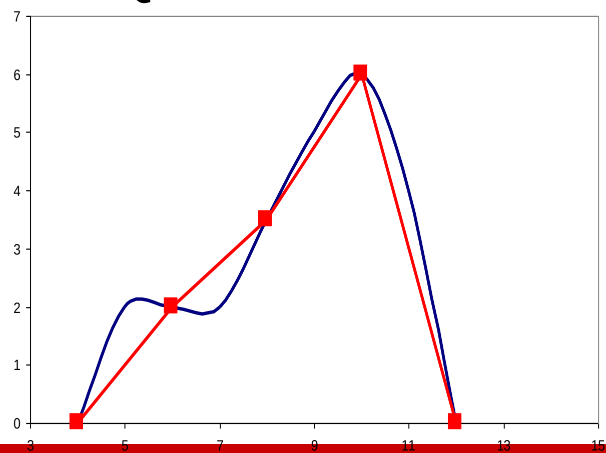
Due intervalli



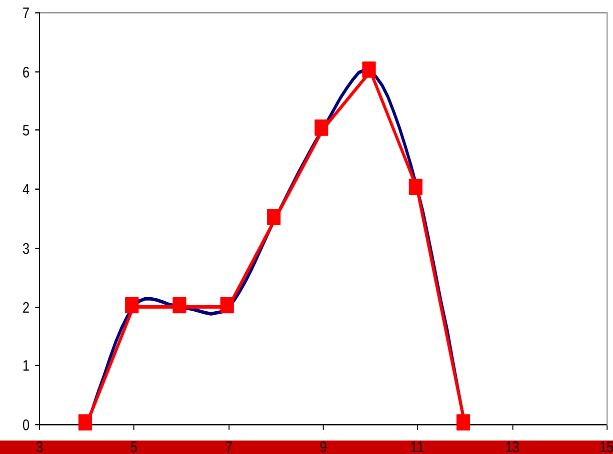
Tre intervalli



Quattro intervalli



…Molti intervalli



Formule composite

- Suddivisione dell’intervallo di integrazione [a,b] in N parti $[x_i, x_{i+1}] \quad i = 0,1,..,N-1$

- Somma di integrali su ciascun intervallino

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

- Formula elementare interpolatoria su ciascun intervallino

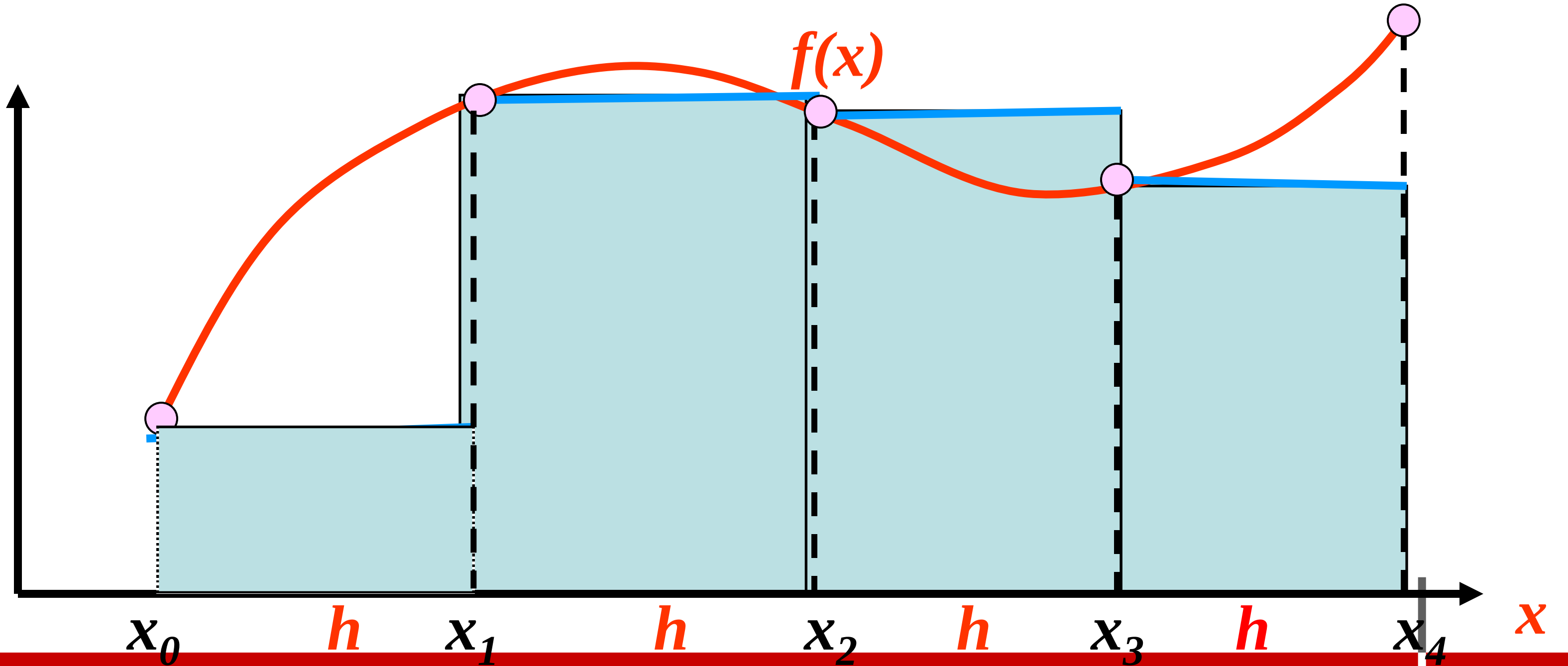
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \quad sostituito\ con \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dx$$

Formula dei Rettangoli Composita

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots\cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)dx$$
$$= h\left[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_i) + \cdots + f(x_{N-1})\right] + r$$

N sottointervalli

$$\boxed{h = \frac{b-a}{N}}$$



Formula dei Trapezi Composita

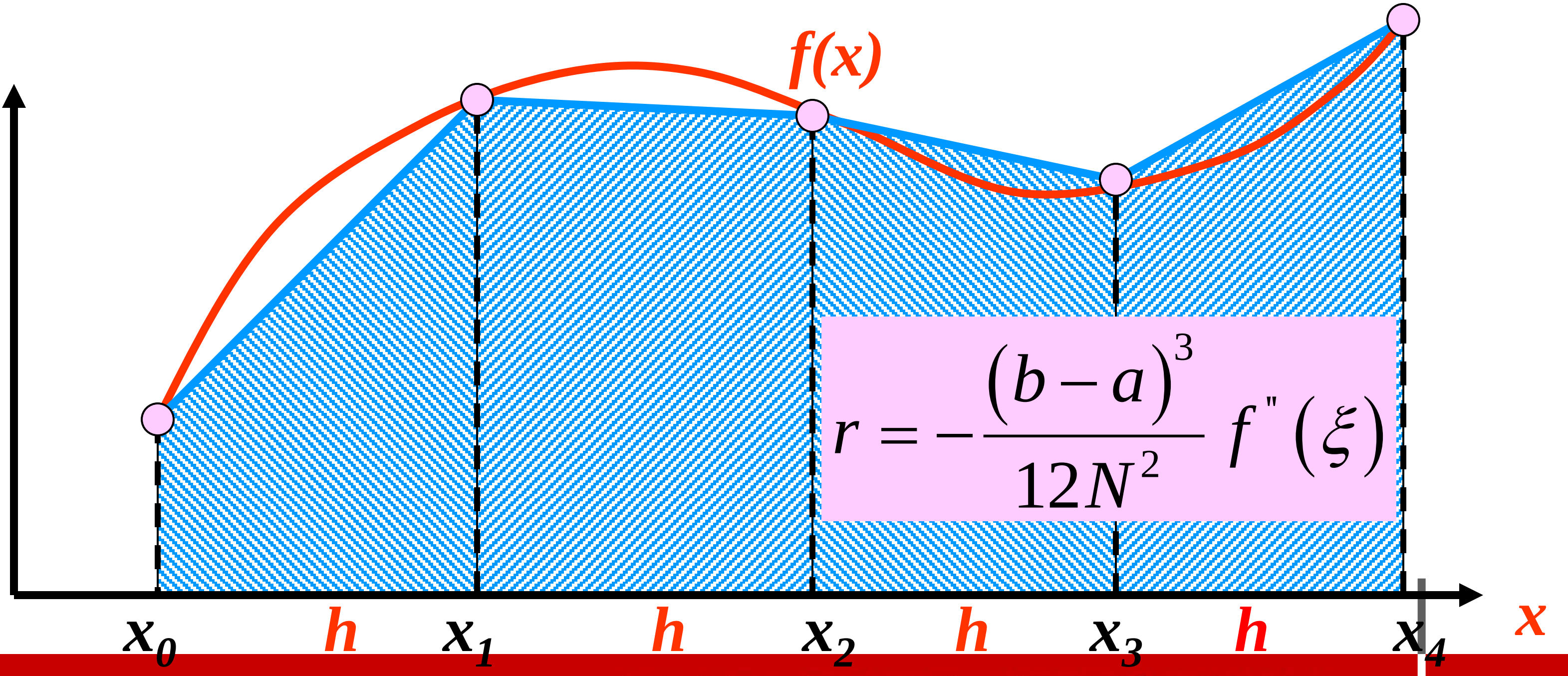
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots\cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] + \cdots + \frac{h}{2}\left[f(x_{N-1}) + f(x_N)\right] + r$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_i) + \cdots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)\right] + r$$

N sottointervalli

$$\boxed{h = \frac{b-a}{N}}$$



$$r = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi)$$

Formula dei Trapezi Composita

Calcolo dell'integrale

$$I = \int_0^4 x e^{2x} dx$$

$$N = 1, h = 4 \Rightarrow I = \frac{h}{2}\left[f(0) + f(4) \right] = 23847.66 \qquad \varepsilon = -357.12\%$$

$$N = 2, h = 2 \Rightarrow I = \frac{h}{2}\left[f(0) + 2f(2) + f(4) \right] = 12142.23 \qquad \varepsilon = -132.75\%$$

$$N = 4, h = 1 \Rightarrow I = \frac{h}{2}\left[f(0) + 2f(1) + 2f(2) + 2f(3) + f(4) \right] = 7288.79 \qquad \varepsilon = -39.71\%$$

$$N = 8, h = 0.5 \Rightarrow I = \frac{h}{2}\left[f(0) + 2f(0.5) + 2f(1) + 2f(1.5) + 2f(2) + 2f(2.5) + 2f(3) + 2f(3.5) + f(4) \right] = 5764.76 \qquad \varepsilon = -10.50\%$$

$$N = 16, h = 0.25 \Rightarrow I = \frac{h}{2}\left[f(0) + 2f(0.25) + 2f(0.5) + \cdots + 2f(3.5) + 2f(3.75) + f(4) \right] = 5355.95 \qquad \varepsilon = -2.66\%$$

Formula dei Trapezi Composita con intervalli non equispaziati

Valutiamo l'integrale $I = \int_0^4 x e^{2x} dx$

$h_1 = 2,\ h_2 = 1,\ h_3 = 0.5,\ h_4 = 0.5$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^{3.5} f(x)dx + \int_{3.5}^4 f(x)dx \\
&= \frac{h_1}{2}\left[f(0) + f(2)\right] + \frac{h_2}{2}\left[f(2) + f(3)\right] \\
&+ \frac{h_3}{2}\left[f(3) + f(3.5)\right] + \frac{h_4}{2}\left[f(3.5) + f(4)\right] \\
&= \frac{2}{2}\left[0 + 2e^4\right] + \frac{1}{2}\left[2e^4 + 3e^6\right] + \frac{0.5}{2}\left[3e^6 + 3.5e^7\right] \\
&+ \frac{0.5}{2}\left[3.5e^7 + 4e^8\right] = 5971.58 \qquad \Rightarrow \varepsilon = -14.45\%
\end{aligned}
$$

Errore globale di troncamento nella formula composita dei trapezi

- Suddivisione dell'intervallo di integrazione [a,b] in N parti

$$[x_i, x_{i+1}] \quad i = 0,1,..,N-1$$

- Errore globale di troncamento è la somma degli errori su ciascun intervallino

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} [\frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))] - \frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\eta_i)$$

$$h = \frac{b-a}{N}$$

Errore locale di troncamento

Errore globale di troncamento

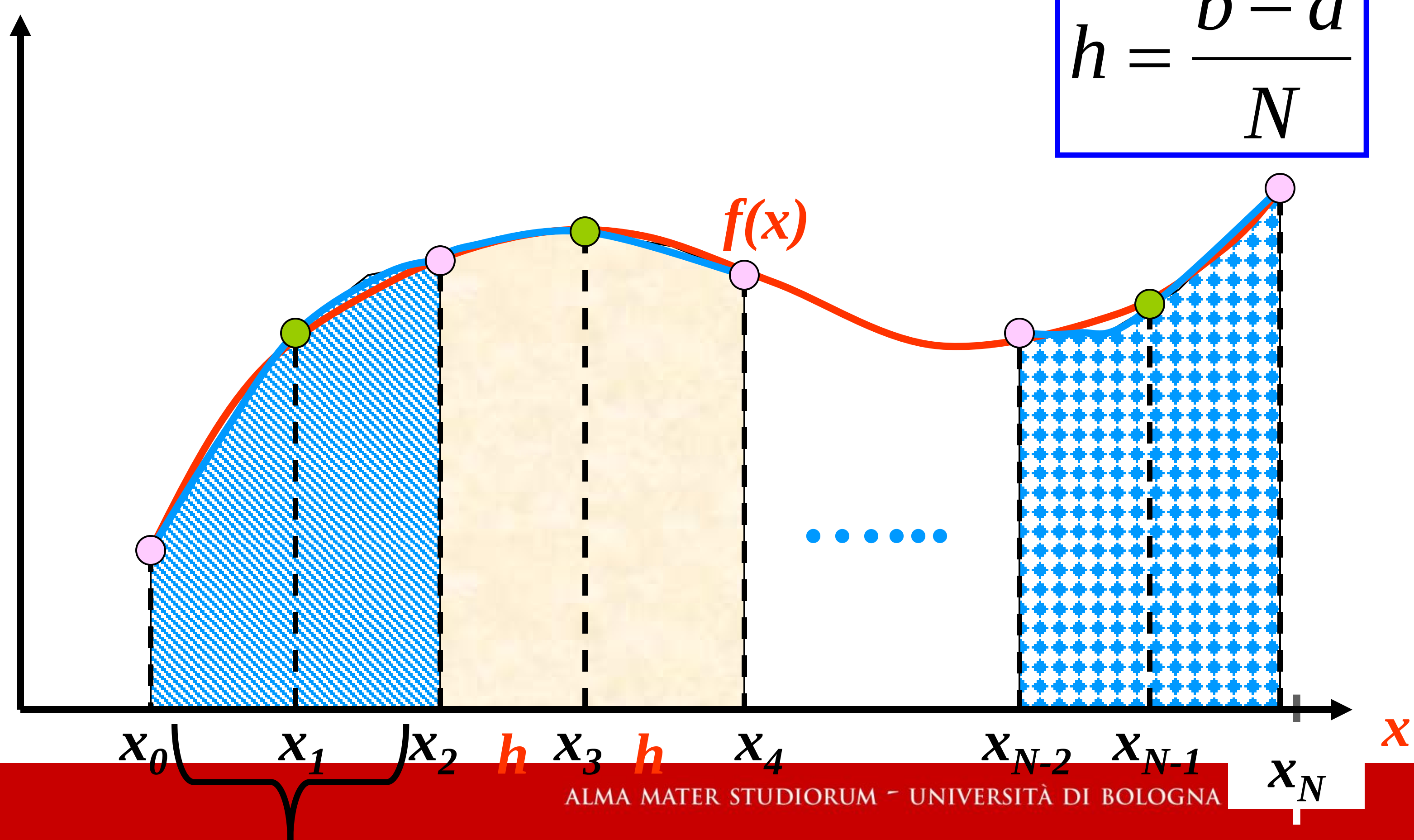
$$\boxed{R = -\frac{b-a}{12}h^2 \frac{\sum_{i=0}^{N-1} f^{(2)}(\eta_i)}{N}}$$

Formula di Simpson Composita

Interpolazione quadratica a tratti

Suddivisione di [a,b] in k=N/2 sottointervalli

$$h = \frac{b-a}{N}$$



Formula di Simpson Composita

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{N-2}}^{x_N} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] + \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$

$$+ \cdots + \frac{h}{3}\left[f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)\right] + r$$

$$= \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots$$

$$+ 4f(x_{2i-1}) + 2f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + \cdots$$

$$+ 2f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)\Big] + r$$

$$r = -\frac{(b-a)^5}{2880N^4} f^{(4)}(\xi)$$

Formula di Simpson Composita

Valutiamo l'integrale

$$I = \int_0^4 x e^{2x} dx$$

n = 2, h = 2

$$I = \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f(2) + f(4)\right]$$
$$= \frac{2}{3}\left[0 + 4(2e^4) + 4e^8\right] = 8240.411 \quad \Rightarrow \varepsilon = -57.96\%$$

n = 4, h = 1

$$I = \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[0 + 4(e^2) + 2(2e^4) + 4(3e^6) + 4e^8\right]$$
$$= 5670.975 \quad \Rightarrow \varepsilon = -8.70\%$$

Formula di Simpson Composita con intervalli non equispaziati

Valutiamo l'integrale

$$I = \int_0^4 xe^{2x}dx$$

$h_1 = 1.5$, $h_2 = 0.5$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx \\ &= \frac{h_1}{3}\left[f(0) + 4f(1.5) + f(3)\right] + \frac{h_2}{3}\left[f(3) + 4f(3.5) + f(4)\right] \\ &= \frac{1.5}{3}\left[0 + 4(1.5e^3) + 3e^6\right] + \frac{0.5}{3}\left[3e^6 + 4(3.5e^7) + 4e^8\right] \\ &= 5413.23 \qquad \Rightarrow \varepsilon = -3.76\% \end{aligned}$$

Quadratura automatica

Il programma P calcola il valore dell'integrale

$$I(f;a,b)=\int_a^b f(x)dx$$

IN:
f(x)
[a,b]
Etol
Nmax

$\rightarrow$ P $\rightarrow$

OUT:
I_n
Est
M

con un errore stimato Est<Etol e con un numero di valutazioni di funzione M<Nmax

Se ciò non è possibile il programma P si interrompe.

P consiste in:

1. Una successione di formule di quadratura che comportano un numero crescente di valutazioni di f(x)
2. Un criterio per determinare I_n
3. Un criterio per determinare la stima automatica dell'errore Est

Esempi di schemi di quadratura automatica P:

Metodo di Romberg (non adattivo)

Metodo di Simpson composito adattivo

(realizzato in quad di MATLAB)

Metodo di Simpson composito **adattivo**

- Si **applicano due formule di quadratura composite** con passo h e h/2 ad un intervallo=[a,b] (Simpson S(h) e S(h/2))
- **Stima dell'errore di integrazione** con estrapolazione di Richardson;
- **Se la tolleranza richiesta è raggiunta** S(h/2) o una combinazione delle due approssimazioni viene presa come valore di I su quell'intervallo,
- **Se la tolleranza non è raggiunta**, l'intervallo [a,b] viene suddiviso a metà e il processo viene ripetuto su ognuno dei due sottointervalli.

DEMO

Estrapolazione di Richardson

E' possibile dare una stima automatica del resto confrontando tra loro le approssimazioni composite dell'integrale ottenute con due diversi valori di N (num. Intervalli, ovvero passi h e h/2).

$$I_N, I_{2N} \quad approssimazioni$$

$$r_N = I - I_N = \frac{\delta_N}{N^s}, \quad r_{2N} = I - I_{2N} = \frac{\delta_{2N}}{2^s N^s},$$

$$in\ cui\ \delta_N\ e\ \delta_{2N} \quad differiscono\ per\ f^{(s)}(\xi)$$

$$r_N = -\frac{(b-a)^5}{2880N^4} f^{(4)}(\xi)$$

$$r_{2N} = -\frac{(b-a)^5}{2880N^4 2^4} f^{(4)}(\xi)$$

Nell'ipotesi che $f^{(s)}(\xi)$ vari di poco al variare di ξ, si suppone: $\delta_N \approx \delta_{2N} = \delta$ allora $r_N - r_{2N}$ è dato da

$$\boxed{I_{2N} - I_N \approx \frac{\delta}{2^s N^s}(2^s - 1)}$$

Estrapolazione di Richardson

$$I_{2N} - I_N \approx \frac{\delta}{2^s N^s}(2^s - 1)$$

Stima del resto:

$$\boxed{\frac{I_{2N} - I_N}{2^s - 1} \approx \frac{\delta}{2^s N^s} = r_{2N}}$$

Si può procedere con successivi raddoppi di N fino a quando

$$\left| \frac{I_{2N} - I_N}{2^s - 1} \right| \leq Etol$$

L'approssimazione dell'integrale sarà:

$$I_{2N} + \frac{I_{2N} - I_N}{2^s - 1}$$

Calcolo di $I=\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

Con la formula dei trapezi (s=2), Etol=0.5x10^{-3}

N	I_N
2	0.7313700
4	0.7429838
8	0.7458653
16	0.7465825

$$\left|\frac{I_{2N}-I_N}{2^s-1}\right| \le Etol$$

Valore finale (I_8 corretto) =0.7468214

Errore effettivo (Est) circa 0.273x10^{-5}

Calcolo di $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$

Con la formula di Simpson (s=4), Etol=0.5x10^{-3}

N	I_N
2	0.7468553
4	0.7468255

$$\left| \frac{I_{2N} - I_N}{2^s - 1} \right| \le Etol$$

Valore finale (I_2 corretto) =0.7468235

Errore effettivo (Est) circa 0.633x10^{-6}

Formule di quadratura Gaussiane

- **Formule di Newton-Cotes**

  usano valori delle funzioni su n punti equispaziati

  Grado di precisione n o n+1

Quali sono i coefficienti c_i e i nodi x_i tali che la formula di quadratura

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} c_i f(x_i)$$

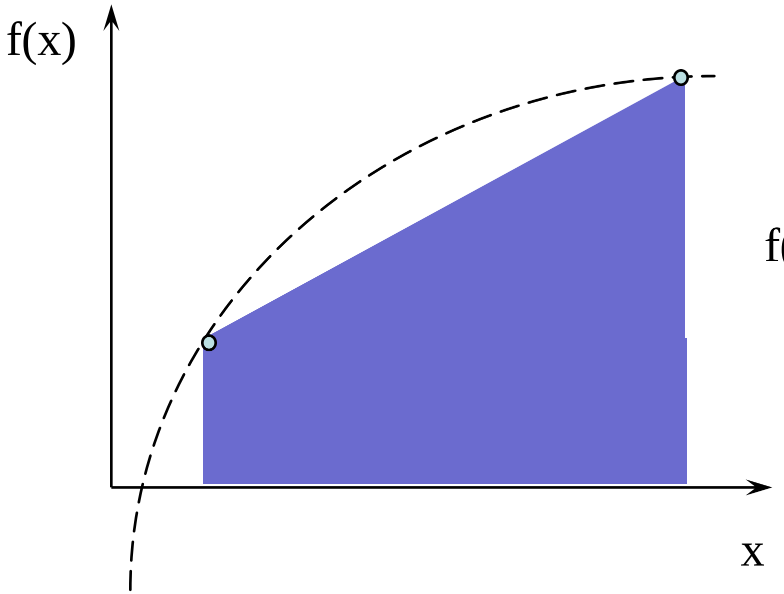
sia esatta per un polinomio avente il massimo grado possibile?

- **Formule Gaussiane**

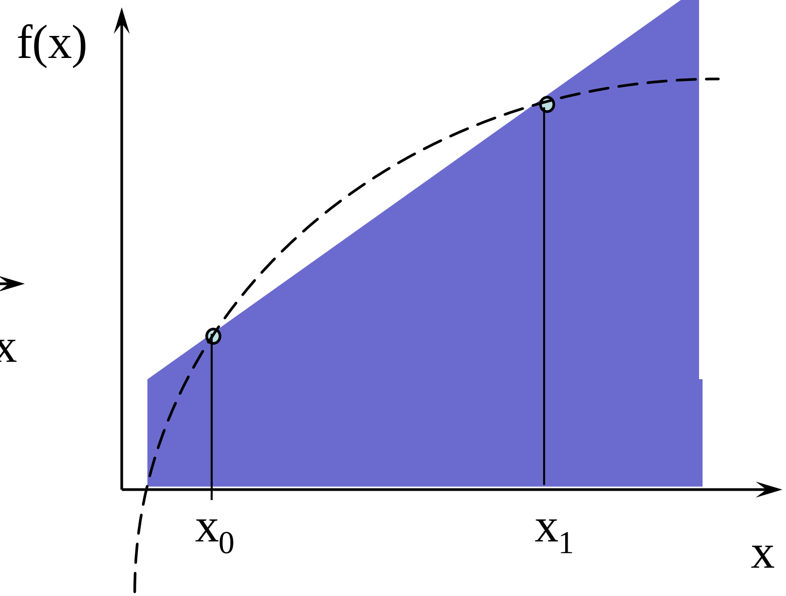
  I nodi $x_0, x_1, ..$ non sono prefissati, nodi e coefficienti vengono ricavati in modo da massimizzare il grado di precisione.

  Grado di precisione $\leq 2n-1$

Formule di quadratura Gaussiane



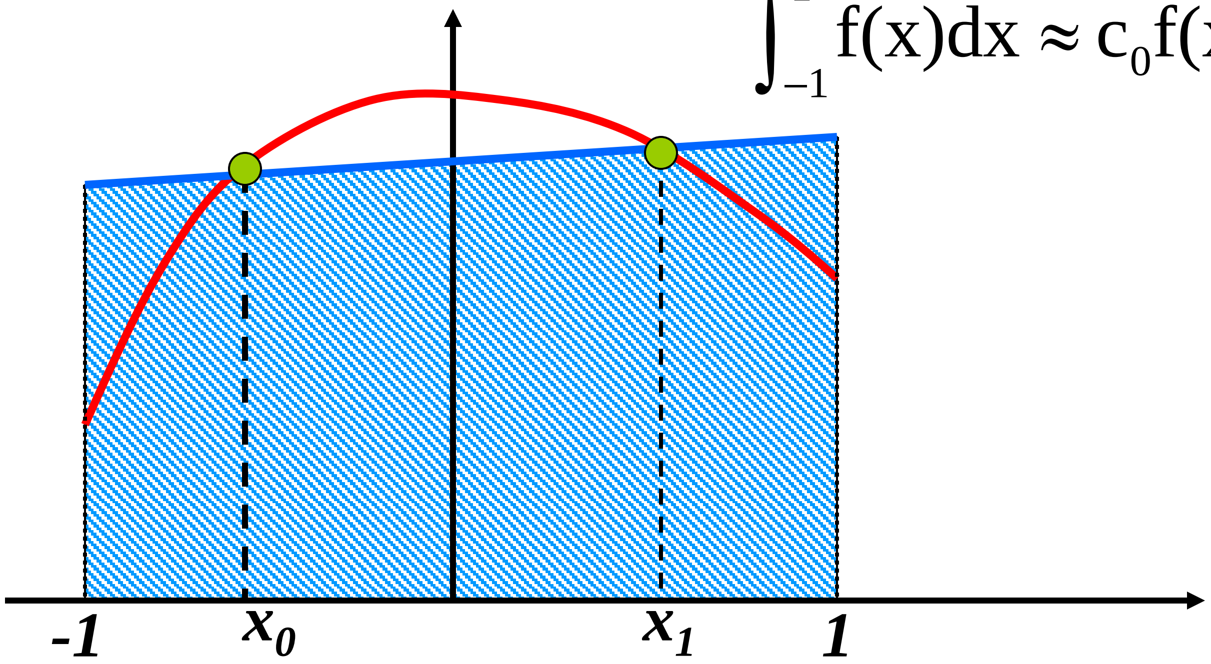
Idea: extend the area under the straight line



Formule di quadratura Gaussiane su [-1, 1]

$$n = 2:$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$



Scegliere (c_0, c_1, x_0, x_1) in modo da massimizzare il grado di precisione, ovvero imponendo che l'integrale sia "esatto" per $f(x) = x^0, x^1, x^2, x^3$

Formule di quadratura Gaussiane su [-1, 1]: Metodo dei coefficienti indeterminati

$$n = 2: \quad \int_{-1}^{1} f(x)dx = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

- **Formula esatta per $f = x^0, x^1, x^2, x^3$**
- **Sistema non lineare di 4 equazioni e 4 incognite**

$$\begin{cases} f = 1 & \Rightarrow \int_{-1}^{1} 1dx = 2 = c_0 + c_1 \\ f = x & \Rightarrow \int_{-1}^{1} xdx = 0 = c_0 x_0 + c_1 x_1 \\ f = x^2 & \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2 dx = \dfrac{2}{3} = c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 \\ f = x^3 & \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 = c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 1 \\ x_0 = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \\ x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\boxed{I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

Grado di precisione 3

Formule di quadratura Gaussiane su [-1, 1]
Metodo polinomi di Gauss-Legendre

In alternativa, i nodi di una formula Gaussiana si ottengono usando polinomi ortogonali. I nodi sono le radici di polinomi ortogonali rispetto ad opportune **funzioni peso w(x)** in [a,b]

$$\boxed{\int_a^b w(x) f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} c_i f(x_i)}$$

$$\text{n} = 2: \quad \text{intervallo [-1,1]};\ w(x) = 1$$

$$p_0(x) = 1; \quad p_1(x) = x;$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad \text{con radici } \ x_0 = -1/\sqrt{3}, x_1 = 1/\sqrt{3},$$

Determinare c_0 e c_1 in modo che la formula sia esatta per polinomi di grado < n

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{f(x)dx} = \mathrm{c_0 f}(-1/\sqrt{3}) + \mathrm{c_1 f}(1/\sqrt{3})$$

$$\boxed{I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

Grado di precisione 2n-1=3

Gauss-Legendre in [a, b]

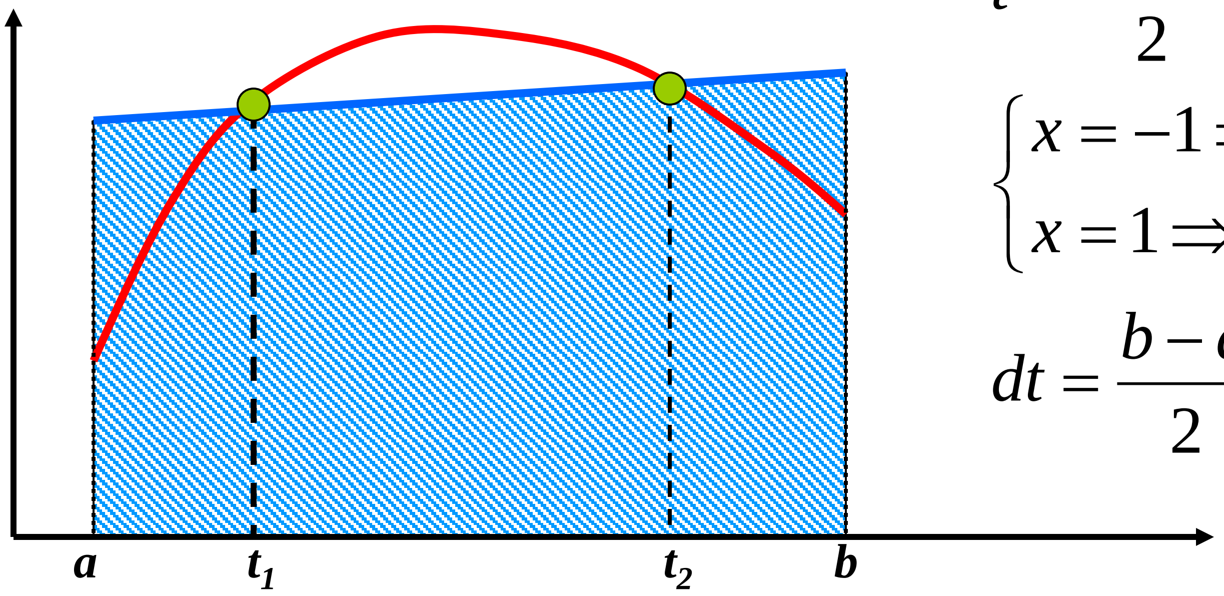
- Trasformazione di Coordinate

da t in [a,b] a x in [-1,1]

$$t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$$

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = a \\ x = 1 \Rightarrow \quad t = b \end{cases}$$

$$dt = \frac{b-a}{2}dx$$



$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)dx = \int_{-1}^1 g(x)dx}$$

Esempio

- Calcolare $I = \int_0^4 te^{2t} dt = 5216.926477$
- Cambio coordinate

$$t = \frac{b-a}{2} x + \frac{b+a}{2} = 2x + 2; \quad dt = 2dx$$

$$I = \int_0^4 te^{2t} dt = \int_{-1}^{1} (4x+4) e^{4x+4} dx = \int_{-1}^{1} f(x) dx$$

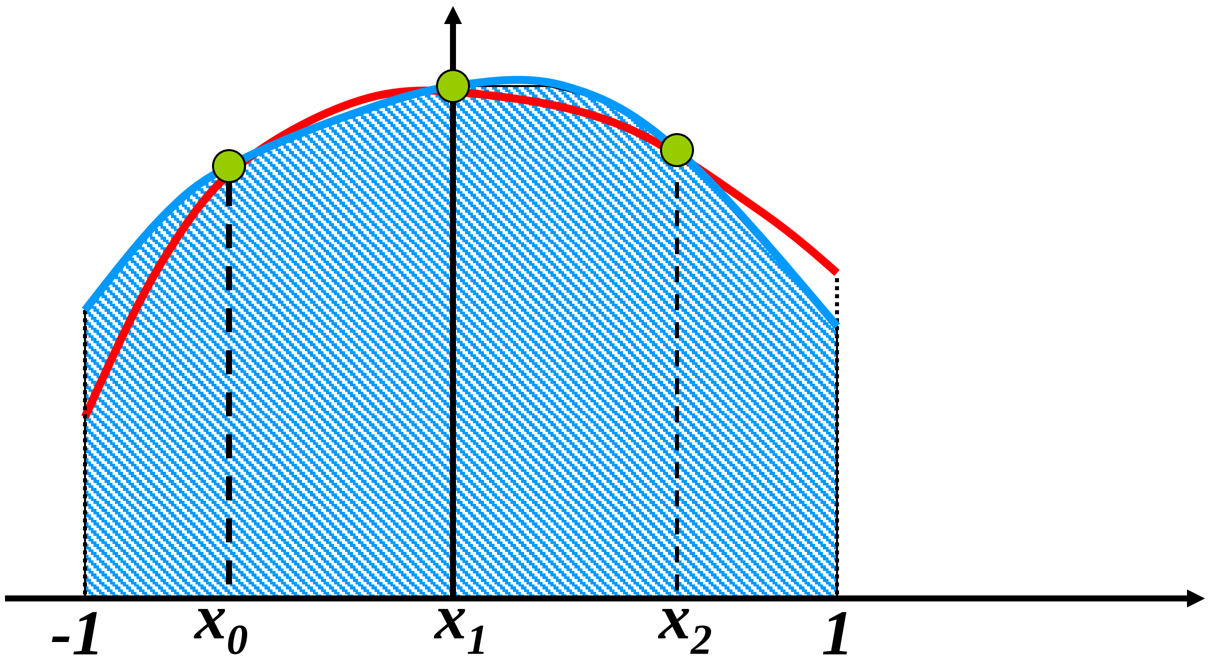
- **Formula Gausiana per 2 punti**

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(4 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right) e^{4-\frac{4}{\sqrt{3}}} + \left(4 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) e^{4+\frac{4}{\sqrt{3}}}$$

$$= 9.167657324 + 3468.376279 = 3477.543936 \qquad (\varepsilon = 33.34\%)$$

Formule di quadratura Gaussiane su [-1, 1]

$$n = 3: \quad \int_{-1}^{1} f(x)dx = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$



Scegliere ***(c_0, c_1, c_2, x_0, x_1, x_2)*** in modo da massimizzare il grado di precisione, ovvero imponendo che l'integrale sia "esatto"

per *f(x)* **= x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5**

Formule di quadratura Gaussiane su [-1, 1]: Metodo dei coefficienti indeterminati

- **Sistema non lineare 6x6**

$$
\begin{cases}
f = 1 & \Rightarrow \int_{-1}^{1} 1dx = 2 = c_0 + c_1 + c_2 \\
f = x & \Rightarrow \int_{-1}^{1} xdx = 0 = c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 \\
f = x^2 & \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} = c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 \\
f = x^3 & \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 = c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 \\
f = x^4 & \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^4 dx = 0 = c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 \\
f = x^5 & \Rightarrow \int_{-1}^{1} x^5 dx = 0 = c_0 x_0^5 + c_1 x_1^5 + c_2 x_2^5
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
c_0 = 5/9 \\
\mathrm{c}_1 = 8/9 \\
\mathrm{c}_2 = 5/9 \\
x_0 = -\sqrt{3/5} \\
x_1 = 0 \\
x_2 = \sqrt{3/5}
\end{cases}
$$

$$
\boxed{I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}
$$

Formule di quadratura gaussiana - Gauss Legendre -

$$\boxed{I=\int_{-1}^{1} f(x)dx=\frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}$$

n=3; Grado di precisione 2n-1=5

I coefficienti della formula possono essere determinati mediante il metodo dei coefficienti indeterminati

Esempio $I = \int_0^4 te^{2t}dt = \int_{-1}^1 (4x+4)e^{4x+4}dx = 5216,92$

Formula con tre punti n=3

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{5}{9} f(-\sqrt{0.6}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{0.6})$$

$$= \frac{5}{9}(4-4\sqrt{0.6})e^{4-\sqrt{0.6}} + \frac{8}{9}(4)e^{4} + \frac{5}{9}(4+4\sqrt{0.6})e^{4+\sqrt{0.6}}$$

$$= \frac{5}{9}(2.221191545) + \frac{8}{9}(218.3926001) + \frac{5}{9}(8589.142689)$$

$$= 4967.106689 \qquad (\varepsilon = 4.79\%)$$

Formula con quattro punti n=4

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0.34785\left[f(-0.861136) + f(0.861136)\right]$$

$$+ 0.652145\left[f(-0.339981) + f(0.339981)\right]$$

$$= 5197.54375 \qquad (\varepsilon = 0.37\%)$$

TEOREMA

$$\boxed{\int_a^b w(x) f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} c_i f(x_i)} \qquad (1)$$

Siano $x_0, x_1, .., x_{n-1}$ gli zeri dell'n-esimo polinomio ortogonale $p_n(x)$ nell'intervallo [a,b] rispetto alla funzione peso w(x).

Se i coefficienti sono determinati in modo tale che la formula (1) sia esatta per ogni polinomio di grado < n, allora la formula di quadratura Gaussiana (1) ha grado di precisione 2n-1.

Dimostrazione

Sia $\quad f \in \mathbf{P}_{2n-1} \quad$ dividiamo $\quad f(x) \quad$ per p_n

$$f(x) = p_n q + r \qquad q, r \in \mathbf{P}_{n-1}$$

di conseguenza $f(x_i) = r(x_i), \quad x_i$ zeri di p_n

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \int_a^b (p_n q + r)w(x)dx =$$

$$= \underbrace{\int_a^b p_n(x)q(x)w(x)dx}_{0} + \int_a^b r(x)w(x)dx =$$

La formula è esatta per f in $\mathbf{P}_{n-1}$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} w_i r(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_i)$$

allora la formula è esatta per $f \in \mathbf{P}_{2n-1} \quad$ #

Formule di quadratura Gaussiane:
- Gauss Legendre -

I pesi w delle formule di quadratura gaussiane sono tutti positivi.

Number of points, n	Points, x_i	Weights, w_i
1	0	2
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1
3	0	$8/9$
	$\pm\sqrt{3/5}$	$5/9$
4	$\pm\sqrt{\left(3-2\sqrt{6/5}\right)/7}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{\left(3+2\sqrt{6/5}\right)/7}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$
5	0	$128/225$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{10/7}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{10/7}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$

```
function intf = guasslengendre(f,a,b)
% Approximate the integral of f from a to b using a
       6-point Gauss-Legendre rule.
% f is the name of a function file
nodes = [-0.9324695142031520; -0.6612093864662645; -0.2386191860831969;
          0.2386191860831969; 0.6612093864662645; 0.9324695142031520];
weights =[0.1713244923791703; 0.3607615730481386; 0.4679139345726910;
           0.4679139345726910; 0.3607615730481386; 0.1713244923791703];

% change of variables from [-1,1] to [a,b]
ab_nodes = a + (b-a)*(nodes+1)/2;
ab_weights = weights*(b-a)/2;

% apply Guass-Legendre rule
intf = sum(ab_weights.*feval(f,ab_nodes));
% requires f to work for vectors
% exact for polynomials of degree 2n-1=11
```

Formule di quadratura Gaussiane

$$I_{w,f} = \int_a^b w(x) f(x) dx \qquad w(x) \text{ funzione peso } \quad w(x) \geq 0 \quad su \quad [a,b]$$

Interval	ω(x)	Orthogonal polynomials	Formule
[−1, 1]	1	Legendre polynomials	Gauss-Legendre
(−1, 1)	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \quad \alpha, \beta > -1$	Jacobi polynomials	Gauss-Jacobi
(−1, 1)	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Chebyshev polynomials (first kind)	Gauss-Chebyshev
[−1, 1]	$\sqrt{1-x^2}$	Chebyshev polynomials (second kind)	Gauss-Chebyshev
[0, ∞)	e^{-x}	Laguerre polynomials	Gauss-Laguerre
(−∞, ∞)	e^{-x^2}	Hermite polynomials	Gauss-Hermite

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-1/2}\, dx \approx \frac{\pi}{k+1} \sum_{i=0}^{k} f\left(\cos \frac{(2i+1)\pi}{2(k+1)}\right)$$

Gauss-Chebyshev

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left(\frac{b-a}{2}\right) \int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right) dt$$

Gauss-Legendre

Formule di quadratura

- **Formule di Newton-Cotes**
  - usano valori delle funzioni su n punti equispaziati
  - Grado di precisione n o n+1
  - Coefficienti tutti positivi solo per n <=7
  - Possono non convergere

- **Formule gaussiane**
  - Grado di precisione 2n-1
  - Coefficienti sempre positivi
  - Sempre convergenti all’aumentare del numero dei nodi

  (il grado di precisione tende all’infinito quando il numero dei punti usati tende all’infinito)

Formule di quadratura Gaussiane

Una qualunque famiglia di polinomi ortogonali genera una formula di quadratura.
Per le formule più classiche nodi e coefficienti sono memorizzati in tabelle

File MATLAB	Formula di quadratura	File
Gauss.m	Formule gaussiane con assegnata funzione peso	-
GaCe.m	Formule di Gauss-Chebicev	GCe.dat
GaHe.m	Formule di Gauss-Hermite	GHe.dat
GaLa.m	Formule di Gauss-Laguarre	GLa.dat
GaLe.m	Formule di Gauss-Legendre	GLe.dat
Lobatto.m	Formule di Lobatto	Lobatto.dat
Radau.m	Formule di Radau	Radau.dat

Tabella 5.5 Elenco degli script MATLAB per il calcolo di nodi e pesi delle formule di quadratura di Gauss più comuni.

Formule di quadratura multidimensionali

- Elementi quadrati
- Prodotto tensoriale di formule monodimensionali

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(s,t)\, dsdt$$

$$\approx \int_{-1}^{1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j\, f(s,t_j)\right) ds$$

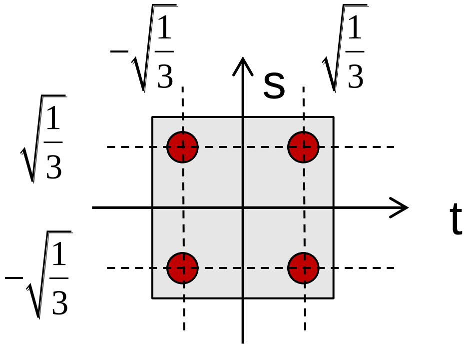
Usa formula1D di Gauss per integrare lungo 't'

$$\approx \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} c_i c_j\, f(s_i,t_j)$$

Usa formula1D di Gauss per integrare lungo 's'

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} c_{ij}\, f(s_i,t_j)$$

dove $c_{ij} = c_i\, c_j$



Es :**Nodi** di Gauss-Legendre per n=2, **pesi** $c_0=c_1=1$

$$I \approx \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{1} c_{ij}\, f(s_i,t_j)$$

$c_{ij} = c_i\, c_j = 1$

$$= f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Formule di quadratura multidimensionali

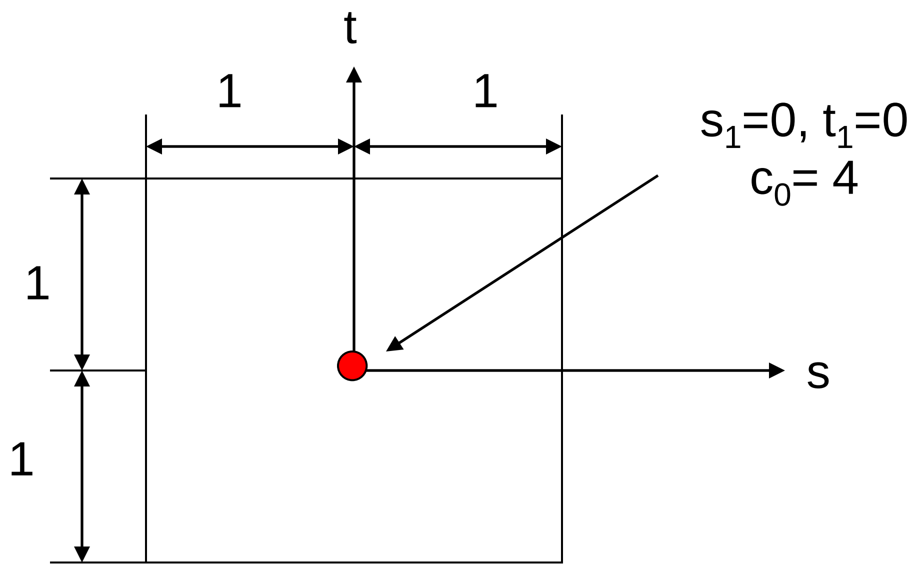
$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(s,t)\, ds dt \approx \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} c_{ij}\, f(s_i, t_j)$$

Usa n^2 nodi di integrazione su una griglia non uniforme

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} s^{\alpha} t^{\beta} ds dt \overset{esatta}{=} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} c_{ij} s_i^{\alpha} t_j^{\beta} \quad per \quad \alpha + \beta \le 2n-1$$

ed è esatta per un polinomio multivariato di grado (2n-1)

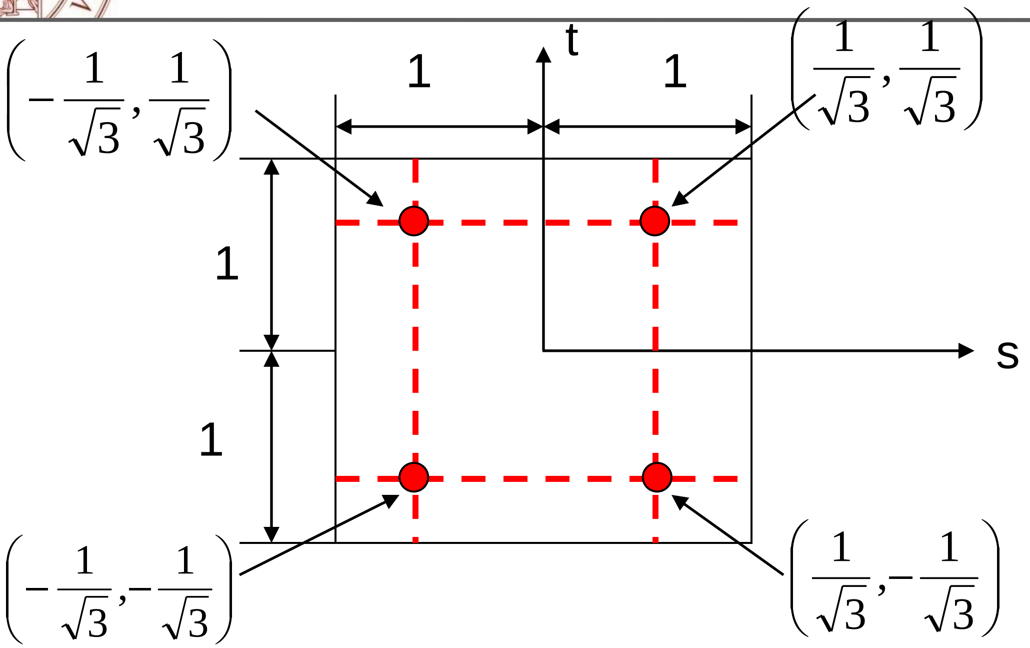
CASO I: n=1 (One-point GQ rule)



È esatta per un prodotto di due polinomi lineari

$$\boxed{I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(s,t)\, ds dt \approx 4 f(0,0)}$$

CASO II: n=2 (2x2 GQ rule)

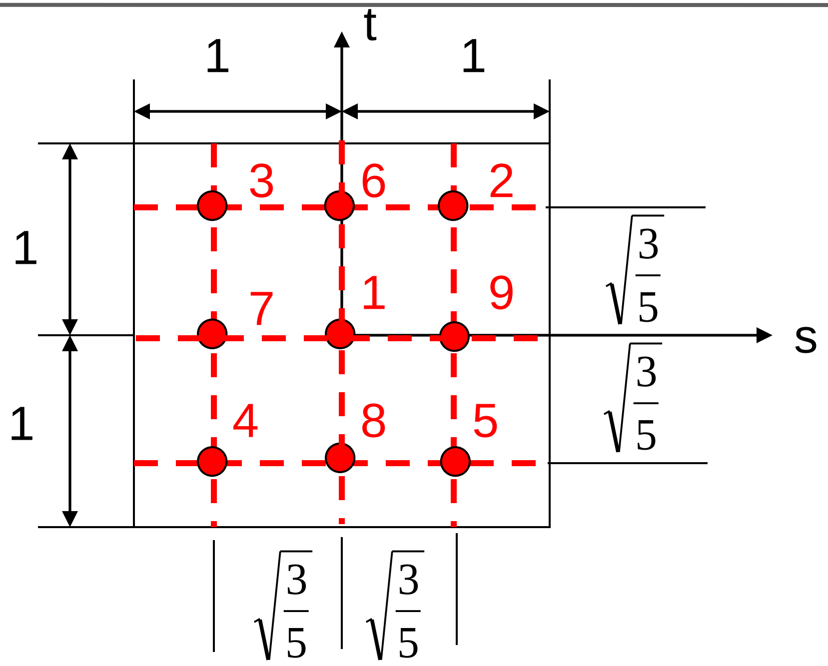


$$I \approx \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} c_{ij} f(s_i, t_j)$$

$$= f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

È esatta per un prodotto di due polinomi cubici

CASO III: n=3 (3x3 GQ rule)



$$c_0 = \frac{64}{81},$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \frac{25}{81}$$

$$c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = \frac{40}{81}$$

$$\boxed{I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(s,t)\, dsdt \approx \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} c_{ij}\, f(s_i, t_j)}$$

È esatta per un prodotto di due polinomi 1D di grado 5

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Serena Morigi

Dipartimento di Matematica

serena.morigi@unibo.it

http://www.dm.unibo.it/~morigi