

# Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

## Laboratorio di Algebra Lineare Numerica

### A.A. 2019/2020 – I Ciclo

## Esercitazione 5

### Singular Value Decomposition

#### 1) Approssimazione SVD di un'immagine

Si vuole studiare come la decomposizione in valori singolari possa essere utilizzata nell'analisi di immagini ed in particolare nella compressione di immagini. Per approfondimenti si consulti [1].

Esempio di lettura di un'immagine in MATLAB:

```
>>clf
>>load clown
% in alternativa
% X=imread('nomefile','jpg') o altro formato immagine se presente Imagetoolbox
>>image(X)
>>colormap(gray)
>>axis equal
>>axis off
```

Creare uno script **main\_imageSVD.m** con le seguenti funzionalità:

- Decomposizione in valori singolari della matrice immagine X (nxm) (utilizzo della routine **svd(X)** di MATLAB). Visualizzare il grafico dei valori singolari in funzione di  $i=1,...,\min(m,n)$  e calcolo del rango r della matrice.
- Ricostruzione dell'immagine con solo k diadi ( $k < r$ ) (approssimazione di rango k di A). Visualizzare le risultanti immagini  $X_k$  per alcuni differenti valori k.
- Calcolo dell'errore di compressione introdotto mediante norma di Frobenius,(in MATLAB **norm(X,'fro')**):

$$E_{rel} = \frac{\|I - I_c\|_{Fro}}{\|I\|_{Fro}} . \qquad \|I\|_{Fro} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |I_{ij}|^2} .$$

dove  $I_c$  è la versione compressa di I.

- Valutare la qualità della ricostruzione attraverso il calcolo del valore di PSNR o SNR. (Vedi OSSERVAZIONE 1)

[1] Dan Kalman *A Singularly Valuable Decomposition: The SVD of a Matrix*, The College Mathematics Journal, Vol. 27, NO. 1, January 1996

## 2) Elaborazione di segnali via TSVD/Regolarizzazione di Tikhonov

Quasi tutti i metodi di acquisizione segnali hanno l'effetto di perturbare il segnale originale, sia mediante sfocamento (effetto 'smoothing' sui dati) sia con rumore aggiuntivo. Si vuole simulare tale comportamento su un segnale a gradini affetto da sfocamento e rumore additivo casuale, e ricostruire mediante minimi quadrati un'approssimazione il più possibile fedele al segnale originale senza smoothing.

Supponiamo di avere un segnale  $\mathbf{x}$  definito da una sequenza temporale discreta di  $n$  campioni.

Sia  $n=200$ . Si consideri il segnale  $\mathbf{x}$  costante a tratti definito nel seguente modo:

$$x_k = \begin{cases} 1 & 50 \leq k < 100 \\ 4 & 100 \leq k < 150 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il processo di sfocamento (smoothing) è simulato mediante la convoluzione di  $\mathbf{x}$  con una PSF Gaussiana. I coefficienti della convoluzione sono:

$$c_k = \frac{1}{b} e^{-k^2/2\gamma^2} \quad \text{per} \quad -h \leq k \leq h \quad h=20; \gamma=6; n=200$$

il coefficiente  $b$  è scelto in modo da normalizzare i coefficienti della convoluzione:  $\sum_{k=-h}^h c_k = 1$

Il segnale in output  $\mathbf{y}$  è ottenuto dalla convoluzione di  $\mathbf{x}$  con  $\mathbf{c}$ :  $y_i = \sum_{k=-h}^h c_k x_{i+k} \quad i=1, \dots, n$

Con la convenzione che  $x_i = 0$  per  $i < 1$ , o  $i > n$

La function  $[H, y, x] = \text{signalrec}(n)$  costruisce la matrice  $H$  ( $n \times n$ ) tale che

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{x}$$

Creare uno script **main\_signalSVD.m** che crei il sistema e il termine noto perturbato

$$\mathbf{y}_{\text{mis}} = \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{w}$$

dove  $\mathbf{w}$  è un rumore casuale  $\mathbf{w} = \text{sigma} * \text{randn}(n,1)$ , con  $\text{sigma}=0.1$ ; visualizzare il grafico del segnale  $\mathbf{y}_{\text{mis}}$  e del segnale originale  $\mathbf{x}$ .

Ricostruire il segnale mediante le seguenti tecniche:

a) Risolvere il sistema lineare  $\mathbf{H} \mathbf{x} = \mathbf{y}_{\text{mis}}$  mediante metodo numerico senza regolarizzazione. Spiegare quanto succede.

b) Molti valori singolari di  $\mathbf{A}$  sono molto piccoli. La regolarizzazione del segnale mediante **Truncated SVD** (TSVD) di  $\mathbf{A}$  prevede di considerare solo le prime  $r$  componenti della approssimazione SVD di  $\mathbf{H}$ . Consideriamo quindi  $\mathbf{H}_r$  come l'approssimazione di rango  $r$  di  $\mathbf{H}$  e calcoliamo l'approssimazione di  $\mathbf{x}$  risolvendo  $\mathbf{H}_r \mathbf{x} = \mathbf{y}_{\text{mis}}$ , per valori di  $r=5,10,15,30,50$ . Visualizzare il grafico delle soluzioni  $\mathbf{x}$  ottenute.

c) Mediante **regolarizzazione di Tikhonov**.

Calcolare la soluzione del seguente sistema regolarizzato facendo uso della fattorizzazione di Cholesky

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \gamma \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{H}^T \mathbf{y}_{\text{mis}}$$

dove il parametro di regolarizzazione  $\gamma$  è scelto in input (suggerimento: lo si scelga appartenente ad un piccolo intervallo attorno a  $\text{sigma}$ )

Visualizzare l'approssimazione del segnale ideale di  $\mathbf{x}$ .

## OSSERVAZIONI

### 1) Aggiungere rumore additivo ad un'immagine memorizzata in un vettore

Per aggiungere ad un array  $b$  rumore Gaussiano  $w$  con un livello di rumore relativo  $\delta(x) = \frac{\|w\|}{\|b\|}$

**randn** genera numeri casuali da una distribuzione normale con media zero e deviazione standard 1.

```
randn('seed',0);  
e = randn(size(b));  
e = e / norm(e); % si normalizza a 1 l'array e  
w = delta*norm(b)*e;  
b_noise = b+w
```

Qualità dell'immagine misurata in termini di SNR o PSNR:

**SNR (Signal-to-Noise Ratio):** Il rapporto Segnale/Rumore o più comunemente SNR è il parametro più utilizzato per misurare la qualità di una immagine corrotta da rumore.

$$SNR(b\_noise, b) = 10 \log_{10} \frac{\|b - E(b)\|_2^2}{\|b\_noise - b\|_2^2} \quad (dB)$$

$b$  = immagine non corrotta da rumore

$b\_noise$  o  $b_k$  = immagine perturbata da rumore oppure immagine ricostruita

$E(b)$  = media di  $b$

Un aumento di SNR dopo un'elaborazione determina un miglioramento della qualità dell'immagine grazie a quell'elaborazione.

**PSNR (Peak Signal to Noise ratio)** è una misura adottata per valutare la qualità di una immagine elaborata  $b_k$  di dimensione  $m \times n$  in scala di grigi [0,255], rispetto all'immagine originale  $b$ , e si calcola con la formula seguente:

$$RMSE = \sqrt{\text{sum}(\text{sum}((b - b_k).^2))/(m*n)};$$

$$PSNR = 20 * \log_{10}(255/RMSE);$$

Tipici valori di PSNR variano da 20 a 40.

### 2)Regolarizzazione di problemi inversi mal posti

In questa esercitazione simuleremo un problema di ricostruzione di un segnale reale a partire da dati misurati tramite uno strumento di acquisizione e implementeremo due strategie di regolarizzazione, precisamente il metodo della decomposizione in valori singolari troncata (**TSVD**) e il metodo di **regolarizzazione di Tikhonov**.

Il modello matematico che lega il segnale acquisito al segnale ideale incognito, che vogliamo ricostruire, come avete visto a lezione, è l'equazione integrale

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,t) f(t) dt$$

dove  $f(x)$  rappresenta il segnale incognito,  $g(x)$  il segnale misurato mediante lo strumento di acquisizione e  $h(x,t)$  il nucleo della funzione integrale, caratteristica dello strumento di acquisizione.

La forma discreta è

$$g(x_i) = \sum_{j=1}^n h(x_i, t_j) f(t_j) \quad i=1, \dots, M$$

che in formato matriciale si può scrivere come:

$$Hf = g \quad (1)$$

dove

$$g = \begin{bmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{bmatrix}$$

e  $H$  è la matrice  $n \times n$  i cui elementi sono  $h_{i,j} = h(x_i, t_j)$ .

Ricostruire  $f$ , cioè il segnale ideale, è un problema inverso, equivale a risolvere il sistema (1).

La matrice  $H$  risulta in genere molto mal condizionata e la soluzione del sistema (3) è estremamente sensibile a perturbazioni, anche relativamente piccole, sul termine noto  $g$ .

Se cerchiamo di risolvere direttamente, con il metodo di Gauss con pivot, il sistema lineare

$$Hf = g + \varepsilon = g_\varepsilon \quad (4)$$

la soluzione che troviamo è completamente dominata dall'amplificazione del rumore e non ha nessuna somiglianza con la soluzione vera.

Per trovare una soluzione che sia *vicina* alla soluzione vera (che comunque non potremo mai ottenere partendo da dati perturbati) dobbiamo utilizzare un **metodo di regolarizzazione**.

I metodi di regolarizzazione infatti rinunciano a trovare la soluzione esatta del problema (4), ma invece calcolano la soluzione di un problema leggermente diverso ma meglio condizionato. Quest'ultimo viene chiamato **problema regolarizzato**.