

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

A.A. 2012/2013 – II Ciclo

Esercitazione 7

Soluzione numerica di Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali con metodi alle differenze finite

1. Equazione del Potenziale

Realizzare lo script MATLAB **ex1.m** per trovare la soluzione numerica al seguente problema della determinazione del potenziale su di un quadrato unitario $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{su } \Omega \\ u(x, y) = g(x, y) & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

u continua sulla frontiera, utilizzando $N=18$, stesso passo per entrambe le variabili, $h=k$.

Il metodo utilizza un ordinamento naturale delle incognite e il metodo di Gauss-Seidel per risolvere il sistema lineare.

Si realizzi la function **gfun.m** come $g(x,y)$ per sperimentare le seguenti funzioni

(a) Si consideri la seguente funzione per i punti sulla frontiera del quadrato unitario:

$$g(x, y) = 10^{-4} \sinh(3\pi x) \sin(3\pi y).$$

(b) Si consideri la seguente funzione per i punti sulla frontiera del quadrato unitario:

$$g(x, y) = 4xy(x - y)(x + y).$$

Poichè g è anche soluzione al problema, è quindi possibile confrontare la soluzione $u(x_i, y_j)$ calcolata con la soluzione esatta $g(x_i, y_j)$. Calcolare inoltre l'errore che si commette nell'approssimazione.

2. Eq. del calore 2D e il modello PDE non lineare di Perona Malik nell'elaborazione digitale di immagini

INTRODUZIONE AL PROBLEMA

Nelle immagini ottenute od elaborate in formato digitale è possibile riscontrare la presenza di rumore che ne altera l'aspetto originale. Una prima soluzione che si vuole analizzare è l'utilizzo dell'equazione del calore (lineare) come filtro di rimozione del rumore nelle immagini.

Una seconda soluzione invece considera un filtro più sofisticato (introdotto da PIETRO PERONA e JITENDRA MALIK 1987) che permette di preservare le caratteristiche strutturali dell'immagine (edge) utilizzando il principio di diffusione anisotropica.

Sulla base di questo lavoro sono poi stati sviluppati ulteriori tecniche di filtraggio sempre più performanti che hanno permesso grandi sviluppi nel mondo dell'elaborazione digitale delle immagini.

Si richiede di realizzare una discretizzazione alle differenze finite delle due equazioni differenziali e poi metterle a confronto calcolando l'errore relativo nella norma di Frobenius rispetto all'immagine non rumoreggiata.

Per aggiungere rumore all'immagine utilizzare la routine `addnoise()`.

DESCRIZIONE MODELLO MATEMATICO

Sia I_0 l'immagine perturbata originale rappresentata come una funzione bivariata che caratterizza i livelli di grigio dell'immagine definita in un dominio rettangolare D . Sia $I(x, y, t)$ una famiglia di immagini che può essere vista come soluzione dell'equazione conduzione/diffusione del calore 2D:

$$I_t = c\Delta I = I_{xx} + I_{yy} \quad (1)$$

con condizione iniziale $I(x, y, 0) = I_0(x, y)$ e c coefficiente di diffusione $c > 0$. Si consideri l'equazione di diffusione anisotropica in dimensione due

$$I_t = \text{div}(g(\|\nabla I\|)\nabla I), \quad (2)$$

dove $g(x, y, t)$ è il coefficiente di diffusione anisotropica e l'operatore ∇I indica il gradiente di I . Questa si riduce all'equazione di diffusione isotropica del calore (1) se $g()$ è una costante. Se invece il coefficiente $g()$ è funzione del

modulo del gradiente della funzione di luminosità: $g(\|\nabla I\|)$ il modello differenziale mette in risalto la luminosità dei

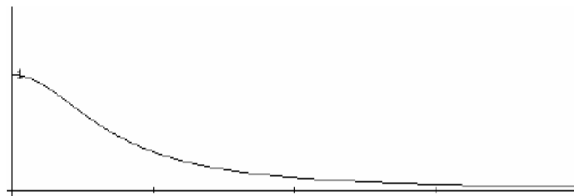
bordi, evidenziandoli, nel caso in cui la funzione $g(\cdot)$ venga scelta in modo appropriato. Si considerino condizioni al contorno di Neumann omogenee.

Con la diffusione lineare (1) il oltre all'eliminazione del rumore si ottiene uno sfocamento degli edge. Questo rende difficile la loro individuazione e localizzazione. L'azione invece del modello differenziale di Perona-Malik (2) tende a eliminare il rumore preservando i contorni dell'immagine.

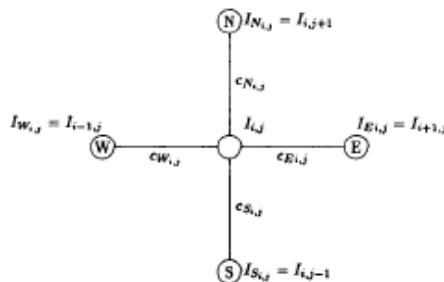
Le due scelte più appropriate del coefficiente di diffusività $g()$ sono:

$$g(\|\nabla I\|) = e^{-\left(\frac{\|\nabla I\|^2}{K}\right)} \quad g(\|\nabla I\|) = \frac{1}{1 + \frac{\|\nabla I\|^2}{K}}$$

dove $K > 0$ è una costante opportuna che dipende dalle caratteristiche dell'immagine e $\|\cdot\|$ è una norma, ad esempio la norma 2 del vettore. Le due funzioni hanno andamento monotono decrescente simile, per valori alti del gradiente (che indicano la presenza di edge) il valore di g tende a zero, ovvero attenua la diffusione.



Secondo l'idea originale di Perona-Malik l'equazione di diffusione anisotropica viene discretizzata con schemi alle differenze finite, utilizzando la maschera sottostante:



La discretizzazione temporale con passo λ segue uno schema esplicito ed è indicata con n , la discretizzazione spaziale risulta:

$$I_{ij}^{n+1} = I_{ij}^n + \lambda [c_N \nabla_N I + c_S \nabla_S I + c_O \nabla_O I + c_E \nabla_E I],$$

in cui λ è un valore che, ai fini della stabilità del modello, deve essere compreso fra 0 e $\frac{1}{4}$, N, S, E e O sono i pedici per indicare Nord, Sud, Est ed Ovest. Per la discretizzazione spaziale si avrà:

$$\nabla_N I = I_{i-1j} - I_{ij}$$

$$\nabla_S I = I_{i+1j} - I_{ij}$$

$$\nabla_E I = I_{ij+1} - I_{ij}$$

$$\nabla_O I = I_{ij-1} - I_{ij}$$

I coefficienti di diffusività sono aggiornati ad ogni passo temporale come funzione del gradiente dell'intensità luminosa, approssimandoli con le seguenti formule:

$$c_{N,ij}^n = g(|\nabla_{N,ij}|), c_{S,ij}^n = g(|\nabla_{S,ij}|), c_{E,ij}^n = g(|\nabla_{E,ij}|), c_{O,ij}^n = g(|\nabla_{O,ij}|)$$

Si estenda la formula per uno stencil più complesso, che considera 8 nodi vicini che oltre alle 4 direzioni N-S-O-E, tenga in considerazione anche le posizioni intermedie NE-SE-NO-SO agli angoli del quadrato dello stencil.