

Laboratorio di Analisi Numerica BSB

A.A. 2012/2013 – I Ciclo

Esercitazione 4

Soluzione numerica di Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali con metodi alle differenze finite

1. Equazione del Potenziale

Realizzare lo script MATLAB **ex1.m** per trovare la soluzione numerica al seguente problema della determinazione del potenziale su di un quadrato unitario $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{su } \Omega \\ u(x, y) = g(x, y) & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

u continua sulla frontiera, utilizzando $N=18$, stesso passo per entrambe le variabili, $h=k$.

Il metodo utilizza un ordinamento naturale delle incognite e il metodo di Gauss-Seidel per risolvere il sistema lineare.

Si realizzi la function **gfun.m** come $g(x,y)$ per sperimentare le seguenti funzioni

(a) Si consideri la seguente funzione per i punti sulla frontiera del quadrato unitario:

$$g(x, y) = 10^{-4} \sinh(3\pi x) \sin(3\pi y).$$

(b) Si consideri la seguente funzione per i punti sulla frontiera del quadrato unitario:

$$g(x, y) = 4xy(x - y)(x + y).$$

Poichè g è anche soluzione al problema, è quindi possibile confrontare la soluzione $u(x_i, y_j)$ calcolata con la soluzione esatta $g(x_i, y_j)$. Calcolare inoltre l'errore che si commette nell'approssimazione.

2. Equazione del trasporto

Realizzare lo script MATLAB **ex2.m** per trovare la soluzione numerica dell'equazione del trasporto in un dominio monodimensionale con metodi alle differenze finite utilizzando gli schemi:

- a) metodo esplicito
- b) metodo implicito
- c) metodo esplicito upwind

$$\begin{cases} u_t + c(x)u_x = 0 & c(x) \text{ velocità di diffusione} \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ -3 < x < 3, \quad 0 < t \leq 1 \\ BC : u(-3, t) = 0 \\ u(x, t) = u_0(x - c(x)t) \end{cases}$$

Studiare il comportamento con la propagazione di un'onda sinusoidale ($u_0(x) = \sin(\pi x)$) per x in

[-1,1], 0 altrimenti) e di un'onda a gradino. Verificare le condizioni di stabilità, fenomeni di dissipazione (riduzione di ampiezza della sinusoide) e dispersione (ritardo rispetto alla soluzione esatta).

3. Risoluzione di PDE modello su differenti domini bidimensionali (**pdegui.m**)

(a) Sperimentare le PDE di Poisson, calore e onde fornite dal programma **pdegui.m** su diversi domini bidimensionali

(b) modificare l'output prodotto dal programma per visualizzare anche in una finestra separata la superficie soluzione del problema PDE.

(c) verificare le condizioni di stabilità CFL per l'equazione del calore e delle onde.

(d) Modificare le condizioni iniziali per esempio in $u(x,y)=\sin(x).\cos(y)$

(e) Creare lo script MATLAB **mano_dati.m** per disegnare il contorno della propria mano.

Inizializzare il file con i seguenti comandi:

```
figure('position',get(0,'screensize'))  
axes('position',[0 0 1 1])  
[x,y]=input;
```

poi appoggiare la mano sullo schermo e utilizzando il mouse selezionare una trentina di punti lungo il profilo della mano. Premere quindi il tasto Enter per salvare ascisse e ordinate dei punti selezionati.

Aggiungere il profilo della propria mano memorizzato precedentemente nel file **mano.dat** come un'ulteriore dominio gestito dal **pdegui.m**