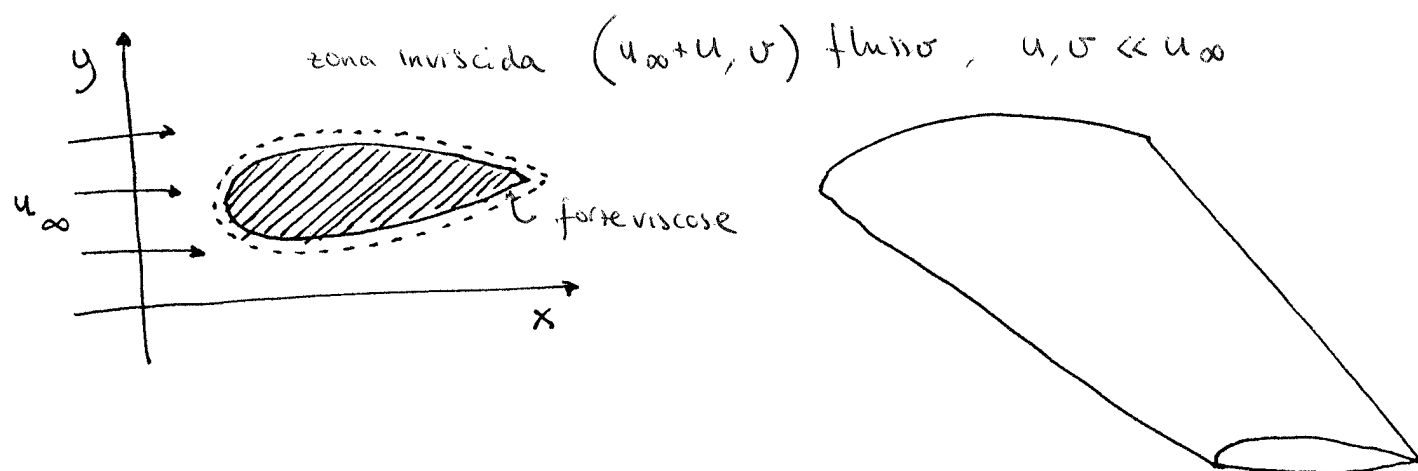


# 1 INTRODUZIONE

## Premessa -

Le equazioni alle derivate parziali (EDP in italiano o PDE in inglese) costituiscono la base di numerosissimi modelli matematici di fenomeni fisici, chimici e biologici e più recentemente il loro utilizzo si è esteso all'economia, alle previsioni finanziarie e ad altri campi - Per analizzare questi modelli è spesso necessario approssimare la soluzione di queste EDP numericamente, in genere in combinazione con l'analisi di casi speciali più semplici -

## ESEMPIO : Progettazione di un'ala di aereo



Fattori importanti: portanza dell'ala e la resistenza nell'aria, per flussi stazionari.

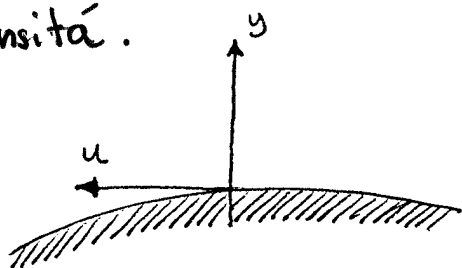
Con buona approssimazione sappiamo che esiste una piccola regione vicino alla superficie dell'ala dove

l'azione di forte viscosità è importante e da altrove possiamo supporre il flusso d'aria inviscido.

In prossimità dell'ala, supponendo che sia piatta, possiamo modellizzare il flusso tramite

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{\rho}, \quad (1)$$

dove  $u$  velocità del flusso nella direzione tangente  $x$ ,  $y$  è normale all'ala,  $\nu$  è la viscosità e  $p$  la pressione e  $\rho$  la densità.



**NOTA:** Non considerano la componente normale della velocità del flusso.

Abbiamo a questo modo una tipica equazione parabolica per  $u$  dove  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$  rappresenta un termine di forza e lontano dall'ala il flusso può essere ancora inviscido e irrotazionale per cui

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

e tramite alcune ipotesi semplificatrici<sup>(\*)</sup> giungere al modello

$$(1 - \Pi_\infty^2) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

dove  $\Pi_\infty$  è il numero di Prandtl all'infinito,  $\Pi_\infty = \frac{u_\infty}{a_\infty}$   $u_\infty$  velocità del flusso all'infinito e  $a_\infty$  velocità suono.

(\*) conservazione di massa e momento per  $u$  in direzione  $x$

a)  $M_\infty < 1$  flussi subsonici, il sistema (2)-(3) è equivalente alle equazioni di Cauchy-Riemann ed è di tipo ellittico.

b)  $M_\infty > 1$  flussi ipersonici, il sistema è di tipo iperbolico.

Derivando (3) rispetto a  $x$  si ha

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

e derivando (2) rispetto a  $y$  si ha moltiplicando per  $-1$

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

sommando si ottiene

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Nel caso a) è equivalente all'equazione di Laplace

$\Delta u = 0$  e nel caso b) è equivalente all'equazione delle onde.

Abbiamo quindi i tre tipi fondamentali di EDP, in cui ci concentreremo durante il corso considerando diversi metodi numerici per la loro soluzione.

OSSERVAZIONE : Quanto detto in precedente può essere valido per aerei ad uso civile dove la progettazione si basa su voli in condizioni stazionarie. Nel caso di aerei militari la manovrabilità diventa essenziale e quindi si dovrà studiare il comportamento dell'ala per flussi non stazionari e le precedenti equazioni (1) (2) e (3) dipenderanno anche del tempo. Mentre la (4) resta parabolica (semplice modello di equazioni di Navier-Stokes) le equazioni (2) e (3) sono iperboliche anche nel caso subsonico (semplice modello di equazioni di Eulero)

In casi realistici va' precisato che intervengono numerosi altri problemi dovuti alle 3 dimensioni e alla geometria degli oggetti in particolare in proximity della punta dell'aereo e delle giunzioni dei vari componenti.

### Referenze

- Morton, K.W., Payers, D.F. Numerical solution of PDEs. An introduction. Cambridge University Press, Cambridge 1964.

## Notazioni

$U$  sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in U$

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - u(x)}{h}$$

$$(ii) \quad u_{x_i} \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$$(iii) \quad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad u_{x_i x_j x_k} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \quad \text{ecc.}$$

(iv) Multi-indici:

(a)  $\alpha$  vettore di interi non negativi  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  e' un multi-indice di ordine  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

(b) Dato un multi-indice  $\alpha$

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u$$

(c) Se  $k$  intero non negativo

$$D^k u(x) := \{ D^\alpha u(x) \text{ t.c. } |\alpha| = k \}$$

insieme di tutte le derivate parziali di ordine  $k$ .

N.B.  $k=1$   $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$  vettore gradiente

$k=2$   $D^2 u = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$  matrice Hessiana

$$(v) \quad \Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = \text{tr}(D^2 u) \quad \text{Laplaciano di } u$$

OSSERVAZIONE : (I) Se  $u = u(x, y)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$

allora  $D_x u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ ,  $D_y u = (u_{y_1}, \dots, u_{y_m})$  e

analogamente per  $D_x^k u$ ,  $D_y^k u$ ,  $k \geq 1$ .

(II) Se  $\vec{u}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{u} = (u^1, \dots, u^m)$  allora

$D^\alpha \vec{u} = (D^\alpha u^1, \dots, D^\alpha u^m)$  e di conseguenza  $D^k \vec{u}$ .

In particolare per  $k=1$ ,  $D\vec{u} = \left( \frac{\partial u^i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$

detto Jacobiano di  $u$ .

Infine se  $m=n$  allora

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{tr}(D\vec{u}) = \sum_{i=1}^n u^i_{x_i} = \underline{\text{divergenza di } \vec{u}}.$$

DEFINIZIONE: Un'espressione della forma

$$(*) \quad F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0$$

$k \geq 1$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $x \in U$ , e' detta

equazione alle derivate parziali di ordine  $k$ .

$F: \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$  assegnata

e  $u: U \rightarrow \mathbb{R}$  e' la funzione incognita.

## DEFINIZIONI:

(1) L'EDP (\*) è detta lineare e ha la forma

$$\sum_{|\alpha| \leq K} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

$a_\alpha, f$  funzioni assegnate - se  $f \equiv 0$  è detta omogenea.

(2) L'EDP (\*) è detta semilineare e ha la forma

$$\sum_{|\alpha| = K} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{K-1}u, \dots, Du, u, x) = 0$$

(3) L'EDP (\*) è detta quasilineare e ha la forma

$$\sum_{|\alpha| = K} a_\alpha(D^{K-1}u, \dots, Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{K-1}u, \dots, Du, u, x) = 0$$

(4) L'EDP (\*) è detta completamente nonlineare e dipende nonlinearmete dalle derivate di ordine più alto.

OSS: Nel caso  $\vec{u}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{u} = (u^1, \dots, u^m)$

parleremo di sistemi di equazioni alle derivate parziali

di ordine  $K$  - Tipicamente il numero di equazioni è uguale

ad  $m$  omica al numero di incognite - la classificazione

preceduta si esente al modo naturale al caso di sistemi.

# ESERCIZI

## a) Equazioni lineari

### 1. Equazione di Laplace

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0$$

### 2. Equazione di Helmholtz

$$-\Delta u = \lambda u$$

### 3. Equazione di trasporto

$$u_t + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} = 0$$

### 4. Equazione di Liouville

$$u_t - \sum_{i=1}^n (b^i u)_{x_i} = 0$$

### 5. Equazione del calore o di diffusione

$$u_t = \Delta u$$

### 6. Equazione di Schrödinger

$$i u_t = \Delta u \quad i \in \mathbb{C}$$

### 7. Equazione di Kolmogorov

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} = 0$$



8. Equazione di Fokker-Planck

$$u_t - \sum_{i,j=1}^m (a^{ij} u)_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^m (b^i u)_{x_i} = 0$$

9. Equazione delle onde

$$u_{tt} = \Delta u$$

10. Equazione di Airy

$$u_t + u_{xxx} = 0$$

11. Equazione

$$u_t + u_{xxxx} = 0$$

b) Equazioni non lineari

1. Equazione eikonale

$$|Du| = 1 \quad , \quad |Du| = \left( \sum_{i=1}^m |u_{x_i}|^2 \right)^{1/2}$$

2. Equazione di Poisson nonlineare

$$-\Delta u = f(u)$$

3. Equazione della superficie minima

$$\operatorname{div} \left( \frac{Du}{(1 + |Du|^2)^{1/2}} \right) = 0$$

4. Equazione di Monge - Ampère

$$\det(D^2 u) = f$$

5. Equazione di Hamilton - Jacobi

$$u_t + H(Du, x) = 0$$

6. Legge di conservazione scalare

$$u_t + \operatorname{div} F(u) = 0$$

7. Equazione di Burgers inviscida

$$u_t + u u_x = 0$$

8. Equazione di reazione - diffusione

$$u_t - \Delta u = f(u)$$

9. Equazione dei vetri porosi

$$u_t - \Delta(u^p) = 0$$

10. Korteweg - de Vries (KdV) equation

$$u_t + u u_x + u_{xxx} = 0.$$

ESERCIZIO: Classificare le precedenti equazioni in lineari, semilineari, quasi-lineari e completamente non lineari.

### c) Sistemi lineari

1. Equazioni dell'elasticità lineare

$$\vec{u}_{tt} - \mu \Delta \vec{u} - (\lambda + \mu) D(\operatorname{div} \vec{u}) = 0$$

2. Equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \operatorname{rot}(\vec{B}) \\ \vec{B}_t = -\operatorname{rot}(\vec{E}) \\ \operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \vec{E} = 0 \end{cases}$$

$$\text{dove } \operatorname{rot}(\vec{u}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

### d) Sistemi non lineari

1. Sistemi di leggi di conservazione

$$\vec{u}_t + \operatorname{div}(\vec{F}(\vec{u})) = 0$$

2. Sistemi di equazioni di reazione-diffusione

$$\vec{u}_t - \Delta \vec{u} = \vec{f}(\vec{u})$$

3. Equazioni di Eulero

$$\begin{cases} \vec{u}_t + \vec{u} \cdot D\vec{u} = -Dp \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \end{cases}$$

4. Equazioni di Navier-Stokes

$$\begin{cases} \vec{u}_t + \vec{u} \cdot D\vec{u} - \mu \Delta \vec{u} = -Dp \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \end{cases}$$

# EDP LINEARI, CLASSIFICAZIONE E FORME CANONICHE IN DUE VARIABILI

## a) Equazione del primo ordine

$$a u_x + b u_y + c u + d = 0 \quad (1)$$

dove  $a, b, c, d$  sono funzioni di  $x$  e  $y$  -

Supporremo  $a, b$  di classe  $C^1$  e non nulli  
contemporaneamente -

Fissato un punto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  in un suo intorno e'  
possibile introdurre nuove coordinate  $\xi$  e  $\eta$  in  
termini delle quali (1) diventi

$$u_\xi + \gamma u + \delta = 0 \quad (2)$$

dove  $\gamma$  e  $\delta$  sono funzioni di  $\xi$  e  $\eta$  -

N.B. Quindi l'EDP diventi una EDO in  $\xi$ , con  $\eta$   
parametro che agisce come una costante -

La (2) è della forma canonica della (1). Sia ora

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad \text{e}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{con } |J| = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$$

ossia il determinante dello Jacobiano non nullo -

Allora le precedenti relazioni possono essere invertite

e si ha

$$x = x(\xi, \eta) \quad y = y(\xi, \eta)$$

e quindi

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y.$$

N.B. Regola della catena per il calcolo delle derivate parziali

Sostituendo le precedenti relazioni nella (1) si ha

$$A u_\xi + B u_\eta + c u + d = 0 \quad (3)$$

$$\text{con } A = a \xi_x + b \xi_y, \quad B = a \eta_x + b \eta_y.$$

$$\text{Ora } B \equiv 0 \Leftrightarrow a \eta_x + b \eta_y = 0. \quad (4)$$

Possiamo cercare  $\xi, \eta$  t.c.  $\eta$  sia soluzione di (4)  
e ci rappresentino una trasformazione di variabili  
(ossia un cambiamento di coordinate invertibile).

$$\text{Fissiamo } \eta(x_0, y) = y \Rightarrow \eta_y(x_0, y_0) = 1.$$

$$\text{Scegliamo } \xi(x, y) = x. \quad \text{Allora in } (x_0, y_0) \text{ si ha}$$

$$\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = 1 \neq 0.$$

b) Equazioni del secondo ordine

$$(1) \quad au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0$$

$a, b, c, d, e, f, g$  funzioni di  $(x, y)$  e supponiamo che  $a, b, c$  siano di classe  $C^2$  e non nulli contemporaneamente.

Definisco il determinante (discriminante) dell'equazione

$$\Delta = b^2 - ac. \quad (2)$$

Introducendo una trasformazione di variabili è possibile riscrivere la (1) nella forma

$$Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + \dots = 0$$

dove .... indicano i termini di derivata di  $u$  di ordine superiore al primo.

Dove

$$\begin{cases} A = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\ B = a\xi_x\eta_x + b\xi_x\eta_y + b\xi_y\eta_x + c\xi_y\eta_y \\ C = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2. \end{cases}$$

Definizione: Sia  $\Delta$  il discriminante dell'equazione (1)

allora:

- (i)  $\Delta > 0$  in  $(x_0, y_0)$  l'equazione è detta iperbolica in tale punto
- (ii)  $\Delta = 0$  in  $(x_0, y_0)$  l'equazione è detta parabolica in tale punto
- (iii)  $\Delta < 0$  in  $(x_0, y_0)$  l'equazione è detta ellittica in tale punto.

Esempi:

- (a)  $u_{xx} - u_{yy} = 0$  eq. onde è iperbolica
- (b)  $u_{xx} - u_y = 0$  eq. calore è parabolica
- (c)  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  eq. Laplace è ellittica
- (d)  $y u_{xx} + u_{yy} = 0$  eq. Tricomi è ellittica per  $y > 0$ , parabolica  $y = 0$  e iperbolica in  $y < 0$ .

ESERCIZIO:

Nel caso di due variabili indipendenti  
identificare i tipi delle equazioni visti come esempi.

## CONDIZIONI INIZIALI E AL CONTORNO

### Equazioni prototipo:

a)  $u_{tt} - u_{xx} = 0$  eq. onde (iperbolica)

b)  $u_t - u_{xx} = 0$  eq. calore (parabolica)

c)  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  eq. Laplace (ellittica)

### Classificazione computazionale:

a) e b) rappresentano problemi evolutivi in cui la soluzione varia al variare del tempo  $t$ .

c) rappresenta un problema statico in cui la soluzione è unica e fissata una volta che si consideri un dato dominio computazionale  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e un dato comportamento sul bordo del dominio.

### Problemi al valore iniziale:

a)  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $u_t(x, 0) = u_{0t}(x)$

b)  $u(x, 0) = u_0(x)$

### Condizioni al contorno: $x \in [0, L]$

$$u(0, t) = \bar{u}_0, \quad u(L, t) = \bar{u}_L \quad 0 \leq x \leq L$$

condizioni di tipo Dirichlet per i problemi a) e b).



$$u_x(0,t) = \bar{u}_{0x}, \quad u_x(L,t) = \bar{u}_{Lx}$$

condizioni di tipo Neumann per i problemi a) e b)

Problemi al contorno :  $(x,y) \in \Omega$

$$c) \quad u(x,y,t) = \phi(x,y) \quad (x,y) \in \partial\Omega$$

condizioni di tipo Dirichlet

$$Du(x,y,t) \cdot n = \bar{\phi}_n(x,y), \quad n \text{ normale}$$

esterna a  $\partial\Omega$ ,  $(x,y) \in \partial\Omega$

condizioni di tipo Neumann.

RIASSUNTO : Per problemi di tipo iperbolico e parabolico si hanno condizioni iniziali ed eventualmente condizioni di tipo Dirichlet o Neumann al bordo. Per problemi di tipo ellittico si hanno solo condizioni al bordo di tipo Dirichlet o Neumann.

NOTA : le condizioni iniziali vanno assegnate anche a tutte le derivate della funzione fatte rispetto al tempo vero e alle derivate temporali di ordine variabile comprese nell'equazione.

Le condizioni al bordo possono essere assegnate di tipo Dirichlet, Neumann oppure di tipo miste dette anche del terzo tipo. Tali condizioni possono essere assegnate vero e alle derivate spaziali di ordine variabile.

## IL METODO DELLE LINEE

Metodo che consente di ricondurre l'approssimazione delle EDP ad un'approssimazione di un sistema di EDO.

L'idea è quella di sostituire alle derivate spaziali degli operatori approssimati in un insieme di punti del dominio spaziale. In questo modo un'equazione evolutiva è ricondotta ad un sistema di EDO nel tempo.

ESEMPIO: (eq. calore)

$$(1) \begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L \\ u(0, t) = \bar{u}_0, \quad u(L, t) = \bar{u}_L \end{cases}$$

Introduciamo una discretizzazione dell'intervallo  $[0, L]$  in  $N$  punti  $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_N = L$ .

Per calcolare la soluzione nei punti sostituiamo la derivata parziale  $u_{xx}(x_i, t)$  con una approssimazione algebrica nel punto  $x_i$  che indichiamo con  $\delta^2 u_i(t)$  e noi  $u_i(t)$  una approssimazione di  $u(x_i, t)$ .

L'equazione (1) in questo modo si trasforma nel sistema di  $N-2$  equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

$$(1)' \begin{cases} (u_i)_t = \delta^2 u_i & i = 2, \dots, N-1 \\ u_i(0) = u_0(x_i) \\ u_1(t) = \bar{u}_0, \quad u_N(t) = \bar{u}_1 \end{cases}$$

che possono essere integrate utilizzando un opportuno metodo per EDO, ad esempio RK esplicite o implicite.

Ovviamente il metodo rimetterà definite e dipendenti della scelta dell'approssimazione di  $u_{xx}$ .

In modo del tutto analogo è possibile procedere per l'equazione delle onde

$$(2) \quad u_{tt} = u_{xx}$$

con le stesse condizioni al contorno e iniziali ed

u' aggiunti con  $u_t(x, 0) = u_{0t}(x)$ .

Otteniamo il sistema di EDO del secondo ordine

$$(2)' \begin{cases} (u_i)_{tt} = \delta^2 u_i & i = 2, \dots, N-1 \\ u_i(0) = u_0(x_i), \quad (u_i)_t(0) = u_{0t}(x_i) \\ u_1(t) = \bar{u}_0, \quad u_N(t) = \bar{u}_1 \end{cases}$$

Ponendo come al solito  $(u_i)_t = w_i$  si riconduce

ad un sistema di  $2(N-2)$  EDO del primo ordine

$$(2)'' \begin{cases} (w_i)_t = \delta^2 u_i \\ (u_i)_t = w_i \\ u_i(0) = u_0(x_i) \\ w_i(0) = u_{0t}(x_i) \\ u_1(t) = \bar{u}_0, \quad u_N(t) = \bar{u}_1 \end{cases}$$

N.B. La stessa cosa poteva essere fatta direttamente sull'equazione delle onde -

Ponendo  $w(t, x) = u_t(t, x)$  abbiamo infatti il nostro

$$\begin{cases} w_t = u_{xx} \\ u_t = w \end{cases}$$

che è del primo ordine in  $t$  -

## DIFFERENZE FINITE

Come costruiamo gli operatori discreti  $\delta u_i \approx u_x(x_i)$ ,

$\delta^2 u_i \approx u_{xx}(x_i)$ ,  $\delta^3 u_i \approx u_{xxx}(x_i)$  ecc... ?

Utilizzando i valori  $u(x_{i+1})$ ,  $u(x_i)$ ,  $u(x_{i-1})$

tramite espansione in serie di Taylor possiamo costruire

diverse approssimazioni di  $u_x(x_i)$  -

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + u_x(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \\ + \frac{1}{2} u_{xx}(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2 + O(\Delta x_i^3)$$

da cui otteniamo con  $\Delta x_i = (x_{i+1} - x_i)$

$$u_x(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x_i} + O(\Delta x_i)$$

detta approssimazione in avanti di ordine uno.

Analogamente abbiamo anche

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) + u_x(x_i)(x_{i-1} - x_i) + \\ + \frac{1}{2} u_{xx}(x_i)(x_{i-1} - x_i)^2 + O(\Delta x_{i-1}^3)$$

da cui con  $\Delta x_{i-1} = (x_i - x_{i-1})$  si ottiene

$$u_x(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{\Delta x_{i-1}} + O(\Delta x_{i-1})$$

detta approssimazione all'indietro di ordine uno.

Se i punti sono equidistanti  $\Delta x_i = \Delta x_{i-1}$

e sottraendo la seconda espansione dalla prima si ha

$$u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) = 2\Delta x u_x(x_i) + O(\Delta x^3)$$

ovvero

$$u_x(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

dette differenze centrali di ordine due.

sempre nel caso di nodi equidistanti somando le precedenti due espansioni otteniamo

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + u_{xx}(x_i) \Delta x^2 + O(\Delta x^4)$$

da cui

$$u_{xx}(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) - 2u(x_i)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)$$

dette  differenze centrali  di ordine due per la derivata seconda -

NOTAZIONI :

$\delta_A$  differenze in avanti per la derivata prima

$\delta_B$  differenze all'indietro " " "

$\delta_C$  differenze centrali " " "

$\delta_C^2$  differenze centrali per la derivata seconda

vale

$$\delta_C^2 = \delta_A \delta_B = \delta_B \delta_A$$

OSS: Come nel caso delle equazioni differenziali ordinarie la derivazione numerica tramite differenze finite presenta una soglia di accuratezza per  $\Delta x$  al di sotto della quale, a causa dell'errore di arrotondamento, si ha un deterioramento dell'accuratezza -

# APPLICAZIONI A PROBLEMI DI TIPO DIFFUSIVO

Il metodo delle linee applicato all'equazione del calore ci fornisce il sistema

$$(1) \begin{cases} (u_i)_t = \Delta_c^2 u_i & i=2, \dots, N-1 \\ u_i(0) = u_0(x_i) \\ u_1(t) = \bar{u}_0, \quad u_N(t) = \bar{u}_L \end{cases}$$

dove per la derivata seconda abbiamo utilizzato le differenze centrali ed il problema lo abbiamo considerato per  $x \in [0, L]$  dopo aver introdotto una discretizzazione

$$0 = x_1 < x_2 < \dots < x_N = L$$

Supponiamo anche  $\Delta x$  di passo costante,  $x_i - x_{i-1} = \Delta x$   $i=2, \dots, N$ . In particolare ho che l'errore che commetto sostituendo all'equazione originale il sistema di EDO (1) è di ordine due in  $\Delta x$ .

## a) METODO ESPlicito

Utilizzo Euler esplicito per discretizzare (1) ottengo

$$\boxed{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \Delta_c^2 u_i^n = \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n}{(\Delta x)^2}, \quad i=2, \dots, N.}$$

dove, come al solito, ho indicato con  $u_i^n$  il valore approssimato di  $u_i(t^n)$ ,  $t^n = n \Delta t$ .

In sostanza il metodo descrive l'evoluzione di un vettore soluzione  $U^n = (u_1^n, \dots, u_N^n)$  nel tempo in accordo con il sistema lineare

$$U^{n+1} = A U^n$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & & & \\ \lambda & 1-2\lambda & & & & \\ & \lambda & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1-2\lambda & \lambda & \\ & 0 & & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e  $\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  con  $u_1^n = \bar{u}_0$ ,  $u_N^n = \bar{u}_L$ .

Il metodo può quindi essere implementato in MATLAB utilizzando un prodotto matrice vettore. Essendo la matrice tri-diagonale risulta più vantaggiosa l'implementazione diretta utilizzando un ciclo for sul vettore

$$u_i^{n+1} = u_i^n (1-2\lambda) + \lambda (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) \quad i=2, \dots, N-1$$

con  $u_1^{n+1} = \bar{u}_0$ ,  $u_N^{n+1} = \bar{u}_L$ .



## b) METODO IMPLICITO

Utilizzando Eulero implicita per discretizzare (1) ho

$$\boxed{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \lambda_c u_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1}}{(\Delta x)^2}} \quad i=2, \dots, N-1$$

che posso riscrivere come

$$u_i^{n+1} \left( 1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) = u_i^n$$

in questo caso abbiamo il sistema lineare

$$A U^{n+1} = U^n$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & & \emptyset \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & & \\ 0 & -\lambda & & & \\ & & & -\lambda & 0 \\ \emptyset & & & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda \\ & & & & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con  $\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  e  $u_1^n = u_0$ ,  $u_N^n = \bar{u}_L$ .

Il metodo può quindi essere realizzato in MATLAB risolvendo il sistema lineare precedente tramite l'operatore \ " che utilizza l'algoritmo di Gauss con pivoting.

Le coste computazionali di tale algoritmo e' però elevate  $O(N^3)$  e non sfrutta la struttura tridiagonale della matrice.

Nel caso infatti di matrici tridiagonali del tipo

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & & & \\ & & & & c_{N-1} \\ & & & a_N & b_N \end{bmatrix}$$

e' possibile risolvere il corrispondente sistema lineare con solo  $O(N)$  operazioni.

## STABILITA'

Consideriamo il metodo esplicito per l'equazione del calore

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left( u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n \right), \quad i=2, \dots, N-1$$

con condizioni al bordo  $u_1^n = \bar{u}_0$ ,  $u_N^n = \bar{u}_L$ .

Supponiamo inoltre che al bordo  $i$  ha l'ulteriore condizione

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0. \quad \text{Tale condizione numerica}$$

può essere tradotta in

$$\frac{u_2^n - u_1^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$\text{da cui} \quad u_2^n = u_1^n = \bar{u}_0 \quad \text{e} \quad u_N^n = u_{N-1}^n = \bar{u}_L.$$

Definiamo

$$p^n = \sum_{i=1}^N u_i^n.$$

Vale allora  $p^{n+1} = p^n$ . Infatti

$$\sum_{i=2}^{N-1} u_i^{n+1} = \sum_{i=2}^{N-1} u_i^n \left( 1 - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sum_{i=2}^{N-1} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)$$

da cui

$$p^{n+1} = p^n \left( 1 - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \right) + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} p^n - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_2^n + u_{N-1}^n - u_1^n - u_N^n) = p^n$$

Quindi 
$$\sum_{i=1}^N u_i^{n+1} = \sum_{i=1}^N u_i^n -$$

Supponiamo ora  $u_i^n \geq 0$  -

$$u_i^{n+1} = u_i^n \left( 1 - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)$$

è  $1 - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$  ossia  $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2}$

allora  $u_i^{n+1} \geq 0$  -

Ne consegue la stabilità del metodo in quanto la norma  $L^1$  discreta della successione è inalterata nel tempo -

$$\|u\|_1^{n+1} = \sum_{i=1}^N |u_i^{n+1}| = \sum_{i=1}^N u_i^{n+1} = \sum_{i=1}^N u_i^n = \sum_{i=1}^N |u_i^n| = \|u\|_1^n -$$

## ANALISI DI VON NEUMANN

Analisi di stabilità più generale di tipo locale -

Si suppone che la soluzione  $u_i^n$  sia della forma

$$u_i^n = \xi^n e^{ik_i \Delta x}, \quad \xi = \xi(k)$$

con  $I$  unità immaginaria  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$  -

Dove  $\kappa$  può essere considerato un indice di caratterizza-

la rappresentazione in serie di Fourier in  $x$  di  $u(x, t)$  -

la dipendere temporale viene invece rappresentata da potenze

successive intere di  $\xi$ , variabile complessa -

$\xi$  è detto fattore di amplificazione relativo a  $\kappa$  -

Il metodo si basa sulla sostituzione di  $u_i^n$  con la precedente

espressione e nell'osservare che  $u_i^n$  può crescere solo

se  $|\xi(\kappa)| > 1$  per un qualche  $\kappa$  - Quindi i

metodi sono detti instabili se  $|\xi(\kappa)| > 1$  per qualche  $\kappa$

e stabili se  $|\xi(\kappa)| < 1 \quad \forall \kappa$  -

Per l'equazione del calore il metodo explicit fornisce

$$\xi = 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2\left(\frac{\kappa \Delta x}{2}\right)$$

$$|\xi| \leq 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1$$

Per il metodo implicit abbiamo invece

$$\xi = \frac{1}{1 + 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\kappa \Delta x}{2}\right)}$$

da cui  $|\xi| \leq 1$  per ogni valore di  $\Delta t$  -

ESERCIZIO: Applicare la precedente analisi agli schemi  
espliciti per l'equazione

$$u_t + \alpha u_x = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

con  $u_x$  approssimate rispettivamente da differenze centrali,  
differente in avanti e differente all'indietro.

OSS: Di fatto l'analisi di Fourier dell'errore, o analisi  
di Von Neumann, determina una soluzione esatta  
dell'equazione alle differenze nella forma  $u_i^n = \xi^n e^{i\kappa i \Delta x}$   
dove  $\xi = \xi(\kappa)$  viene determinata per sostituzione.

Essenzialmente la stabilità è collegata al potere controllare  
in un tempo finito la <sup>crescita della</sup>  $\mathcal{V}$  differenza tra due soluzioni dell'equazione  
alle differenze indipendentemente dalla scelta di  $\Delta x$ .

Questo è evidentemente garantito se  $|\xi(\kappa)| \leq 1 \quad \forall \kappa$ .

## CONVERGENZA DELLO SCHEMA ESPlicito

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n}{(\Delta x)^2}$$

In particolare ricordiamo che possiamo riscrivere le precedenti equazioni come

$$\delta_t^A u_i^n = \delta_x^{2,c} u_i^n$$

dove abbiamo posto in evidenza il h.p.d. di variabile rispetto alla quale applichiamo le differenze in avanti e centrali.

Per le differenze centrali sappiamo che

$$u_{xx}(x_i, t^n) = \delta_x^{2,c} u(x_i, t^n) + \frac{1}{12} (\Delta x)^2 u_{xxxx}(x_i, t^n) + O(\Delta x^4)$$

per le differenze in avanti

$$u_t(x_i, t^n) = \delta_t^A u(x_i, t^n) + \frac{\Delta t}{2} u_{tt}(x_i, t^n) + O(\Delta t^2)$$

Abbiamo quindi che l'errore di troncamento commesso sostituito

all'equazione  $u_t = u_{xx}$  la sua approssimazione esplicita e'

$$\begin{aligned} T_i^n = T(x_i, t^n) &:= \delta_t^A u(x_i, t^n) - \delta_x^{2,c} u(x_i, t^n) = (u_t(x_i, t^n) - u_{xx}(x_i, t^n)) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \Delta t u_{tt}(x_i, t^n) - \frac{\Delta x^2}{6} u_{xxxx}(x_i, t^n) \right) + O(\Delta t^2 + \Delta x^4) \end{aligned}$$

Si noti che essendo  $u_t = u_{xx}$  avremo

$$u_{tt} = (u_{xx})_t = (u_t)_{xx} = u_{xxxx} \quad \text{e quindi}$$

$$T(x, t) = (u_t - u_{xx}) + \frac{1}{2} \Delta t u_{xxxx} \left(1 - \frac{1}{6\lambda}\right) + O(\Delta t^2)$$

dove  $\lambda = \Delta t / (\Delta x)^2$  valore fissato -

Quindi per  $\Delta t \rightarrow 0$  con  $\lambda$  fissato lo schema si comporta asintoticamente come  $O(\Delta t)$ , questo supponendo che tutte le derivate fino all'ordine 4 della soluzione siano limitate -

N.B. Se ora  $\lambda = 1/6$  il primo termine si annulla e lo schema diventa del secondo ordine - Caso particolare.

Definizione: Per un dato vincolo fissato ed un valore  $\lambda = \Delta t / \Delta x^2$  fissato, diciamo che lo schema numerico è convergente se per ogni punto  $(x^*, t^*)$  nel dominio  $[0, L] \times [0, \bar{T}]$  vale per  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$x_i \rightarrow x^*, \quad t^n \rightarrow t^* \Rightarrow u_i^n \rightarrow u(x^*, t^*).$$

Dimostriamo che lo schema esplicito converge per  $\lambda \leq 1/2$  -



Sia  $e_i^n = u_i^n - u(x_i, t^n)$  e supponiamo che l'errore di troncamento sia t.c.  $|T_i^n| \leq C \quad \forall i, n$ .

Abbiamo

$$e_i^{n+1} = e_i^n + \lambda \delta_c^2 e_i^n - T_i^n \Delta t$$

ossia

$$e_i^{n+1} = (1 - 2\lambda) e_i^n + \lambda(e_{i+1}^n + e_{i-1}^n) - T_i^n \Delta t$$

Sia ora  $E^n := \max \{|e_i^n|, i = 1, \dots, N\}$

$$|e_i^{n+1}| \leq (1 - 2\lambda) |e_i^n| + \lambda(|e_{i+1}^n| + |e_{i-1}^n|) + |T_i^n| \Delta t$$

$$|e_i^{n+1}| \leq (1 - 2\lambda) E^n + \lambda 2 E^n + C \Delta t$$

$$E^{n+1} \leq E^n + C \Delta t \leq E^{n-1} + 2C \Delta t$$

$$\leq \dots \leq E^0 + (n+1)C \Delta t$$

ma  $E^0 = 0$  da cui  $E^n \leq n C \Delta t$ .

Ora  $C = \frac{1}{2} \Delta t \left( \eta_{tt} + \frac{1}{6\lambda} \eta_{xxxx} \right)$

con  $|u_{tt}| \leq \eta_{tt}$ ,  $|u_{xxxx}| \leq \eta_{xxxx} \quad \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, T]$

e  $E^n \leq \frac{1}{2} \Delta t \left( \eta_{tt} + \frac{1}{6\lambda} \eta_{xxxx} \right) T \rightarrow 0$

per  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Definizione: Un raffinamento e' una successione di coppie di passi griglia,  $\Delta x$  e  $\Delta t$ , agno di quali tende a zero:

$$\left\{ ((\Delta x)_i, (\Delta t)_i) \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots ; (\Delta t)_i, (\Delta x)_i \rightarrow 0 \right\}$$

Definiremo inoltre:  $\lambda_i = \frac{(\Delta t)_i}{(\Delta x)_i^2}$

TEOREMA: Se un raffinamento soddisfa a  $\lambda_i \leq \frac{1}{2}$  per  $i$  sufficientemente grande ed i mesh

$$n_i (\Delta t)_i \rightarrow t \quad , \quad i_i (\Delta x)_i \rightarrow x \in [0, L]$$

con  $|u_{xxxx}| \leq \eta_{xxxx}$  uniformi in  $[0, L] \times [0, T]$

allora l'approssimazione  $u_{i,i}^{n_i}$  generata dallo schema esplicito

per  $i = 0, 1, 2, \dots$  converge alla soluzione  $u(x, t)$

dell'eq. differenziale uniformemente nella regione.