

EQUAZIONI IPERBOLICHE

Caratteristiche

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$u = u(x, t)$ equazione lineare del primo ordine,

con $a = a(x, t)$.

Nonostante sia la più semplice tra tutte le PDEs la sua approssimazione non è per nulla un problema banale. Le direzioni caratteristiche dell'equazione precedente sono le soluzioni dell'equazione diff. ordinaria

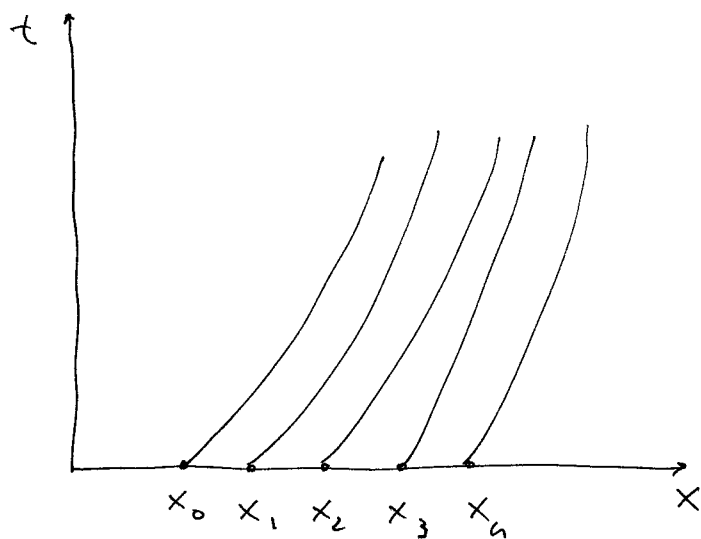
$$\frac{dx}{dt} = a(x, t)$$

e lungo queste direzioni la soluzione $u(x, t)$ soddisfa

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0.$$

Considerato quindi il dato iniziale $u_0(x)$ possiamo costruire un'approssimazione dell'equazione scegliendo un insieme di punti x_0, x_1, \dots , e determinando la curva caratteristica in $(x_i, 0)$ risolvendo l'EDO con condizione iniziale $x(0) = x_i$.

Oss: Abbiamo un'EDO per ogni punto, cambia solo la condizione iniziale.



In tutti i punti di queste curve si ha $u(x, t) = u^0(x_i)$.

Questo modo di procedere è detto metodo delle caratteristiche.

Si noti che le caratteristiche non possono intersecarsi in un problema lineare con $a(x, t)$ funzione regolare continua in t e lipschitziana in x .

oss: Se $a(x, t) = \text{cost} = a$, allora l'EDO fornisce le soluzioni esatte $x - at = x_i$ e di conseguenza le soluzioni

$$u(x, t) = u^0(x - at).$$

oss: Se $a = a(u)$, ancora le direzioni caratteristiche sono linee rette poiché u è costante lungo le direzioni caratteristiche, anche se non sono più parallele. Abbiamo

$$u(x, t) = u^0(x - a(u(x, t))t)$$

questi almeno fino a quando le direzioni caratteristiche non si intersecano in qualche modo (vedremo in seguito).

le direzioni caratteristiche non essenziali nella costruzione di metodi numerici per equazioni iperboliche.

Leggi di conservazione

Nella maggior parte delle applicazioni si ha le seguenti sistemi di leggi di conservazione nella forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) = 0$$

dove $U = U(x, t) \in \mathbb{R}^n$, $F(U) \in \mathbb{R}^n$ vettore flusso.

Esempio: $n = 2$, $F(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u, v) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} g(u, v) = 0 \end{cases}$$

o in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{poich\'e } \frac{\partial}{\partial x} g(u, v) = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

Se definisco le variabili precedenti (nel caso generale)

$$A(U) := \frac{\partial F}{\partial U}$$

ossia lo Jacobiano formato dalle derivate parziali di F in U

$$U_t + A(U) U_x = 0$$

e le velocità caratteristiche del sistema sono gli autovalori

della matrice A .

Il sistema si dice iperbolico se A ha autovalori reali ed ha un insieme completo di autovettori.

Se indichiamo con Λ l'insieme degli autovalori e con S l'insieme degli autovettori di sinistra si ha

$$SA = \Lambda S$$

$$\text{da } A = S^{-1} \Lambda S.$$

Moltiplicando allora l'eq. precedente per S otteniamo

$$S U_t + S A U_x = S U_t + \Lambda S U_x = 0$$

detto forma normale caratteristica.

Se è possibile definire il

vettore R t.c. $R_t = S U_t$, $R_x = S U_x$ allora

$$R_t + \Lambda R_x = 0$$

dove R è detto vettore degli invarianti di Riemann e

l'equazione risultante e' un generalizzato dell'equazione
scalare di abbinamento considerata all'inizio dove $\alpha = \alpha(u)$.

Oss: Ogni componente di Λ ora dipendera' da tutte
le componenti di R per cui le caratteristiche non
sono rette o curve. La determinazione degli
invarianti di Riemann non e' sempre possibile se $n > 2$.

Oss: In pratica il metodo delle caratteristiche e' basato
sull'integrazione simultanea di $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_i(R) & i = 1, \dots, n \\ x(0) = x_j & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

e l'equazione

$$S U_t + \Lambda S U_x = 0$$

Ovviamente la procedura e' abbastanza complicata e
fornisce un metodo numerico molto preciso.

In due dimensioni va detto che le diverse caratteristiche
determinano superfici caratteristiche e la risoluzione del
metodo diventa troppo costosa e complicata in generale.

Si noti inoltre che ad ogni punto Δt cambia la
distribuzione iniziale dei punti di abbinamento nelle
iniziali. Nel proseguo ci limiteremo a considerare metodi
basati su discretizzazioni finite nello spazio.

DOMINIO DI DIPENDENZA

L'equazione

$$u_t + a u_x = 0$$

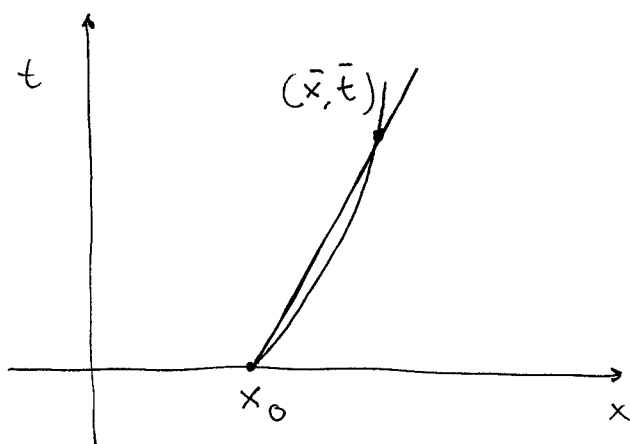
con $a = a(x)$ ha le seguenti proprietà:

La soluzione $u(x, t)$ in ogni punto (\bar{x}, \bar{t})

dipende solo dal dato iniziale u_0 in un punto

precisato. Ovvero il punto x_0 t.c. (\bar{x}, \bar{t})

appartiene alla curva caratteristica per x_0 .

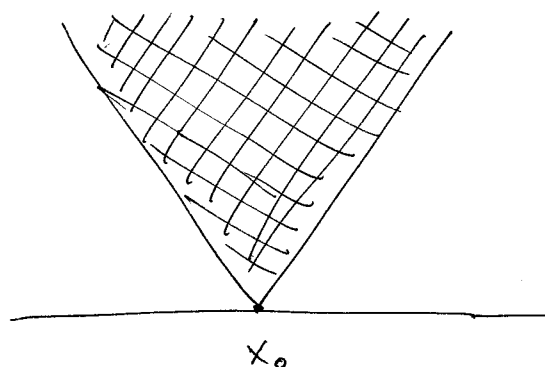
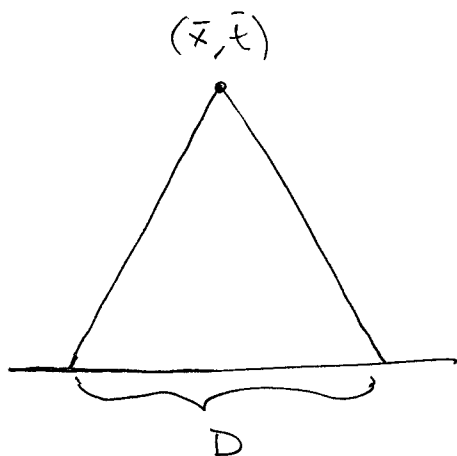


L'insieme $\{x_0\}$ è detto il dominio di dipendenza

del punto (\bar{x}, \bar{t}) . Tipicamente nel caso di sistemi tali
dominio di dipendenza non sarà un punto ma un intervallo.

In particolare, per l'iperbolicità, tale intervallo
sarà sempre limitato. Analogamente un dato iniziale
assegnato in un punto x_0 può influenzare la soluzione

solo all'interno di un cono, detto intervallo d'influenza,
con vertice in x_0 .



Oss.: Tali proprietà dovranno essere verificate anche dagli
schemi numerici.

METODI UPWIND E CONDIZIONE CFL

$$u_t + a u_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

con a costante e $u(x, 0) = u_0(x)$

$$x_i = i \Delta x \quad i = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$t^n = n \Delta t \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

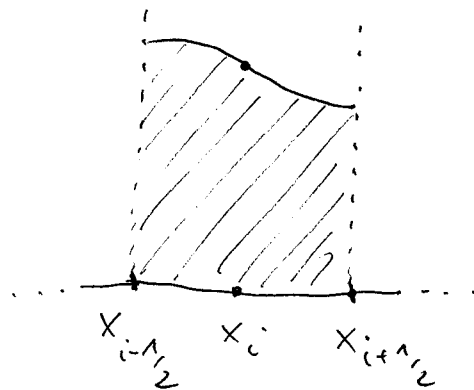
$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{\Delta x}{2} = \left(i + \frac{1}{2}\right) \Delta x$$

$$u_i^n = u(x_i, t^n) \quad \text{definito negli e vertici di}$$

cella

$$\bar{u}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^n) dx$$

Spero i metodi numerici sono basati sull'utilizzo della media di celle invece che dei valori puntuali.



Il numero r di integrazioni precedenti equazione 12 a $x_{i-1/2}$ e $x_{i+1/2}$ si ottiene

$$(\bar{u}_i^0)_t^+ + A \frac{u(x_{i+1/2}, t) - u(x_{i-1/2}, t)}{\Delta x} = 0$$

$$\text{con } \bar{u}_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t) dx$$

Avendo quindi naturale considerare l'evoluzione di tali medie di celle.

Supponiamo di discretizzare l'equazione utilizzando un metodo esplicito sul sistema

$$(\dot{u}_i)_t + a \delta_B u_i = 0$$

omk

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

da cui

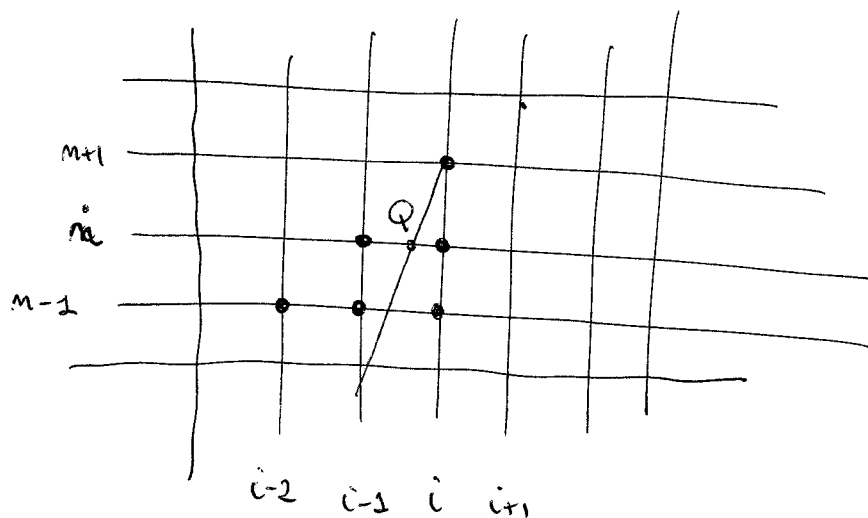
$$u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + \frac{a \Delta t}{\Delta x} u_{i-1}^n$$

$$= u_i^n (1 - \tau) + \tau u_{i-1}^n$$

con $\tau = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Il valore di u_i^{n+1} dipende dai valori u_i^n e u_{i-1}^n .

Questi a loro volta dipendono dai valori u_i^{n-1} , u_{i-1}^{n-1} , u_{i-2}^{n-1} .



Se $\tau \leq 1$ la soluzione è calcolata con interpolazione lineare fra u_i^n e u_{i-1}^n in accordo con le direzioni caratteristiche per $a > 0$.

In modo analogo per $a < 0$ si ottiene

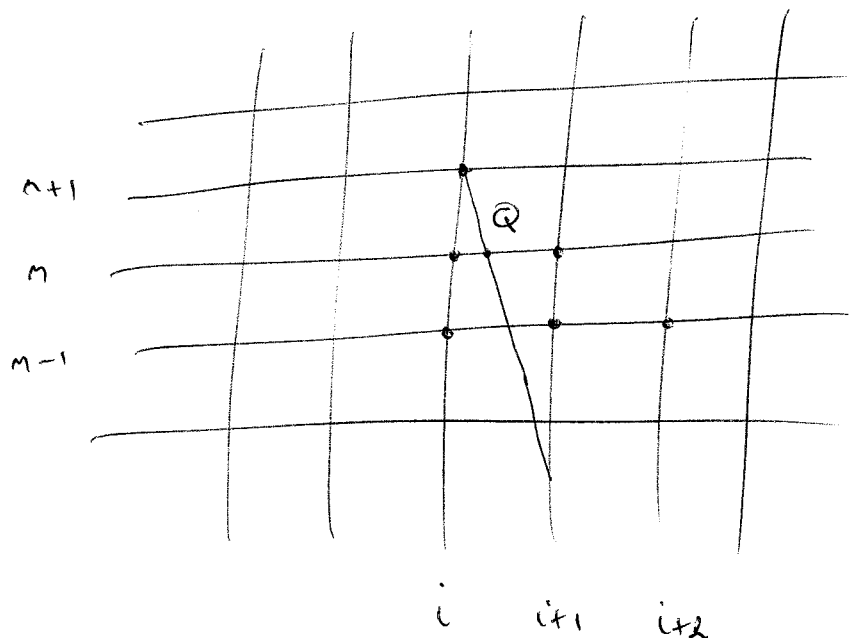
$$(u_i)_t + a \delta_A u_i = 0$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n \left(1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) - \frac{a \Delta t}{\Delta x} u_{i+1}^n$$

$$= u_i^n (1 - \delta) + \delta u_{i+1}^n$$

$$\delta = |a| \frac{\Delta t}{\Delta x}$$



Per $\delta \leq 1$ (condizione CFL) la soluzione rispetta le direzioni caratteristiche.

N.B. CFL acronimo di Courant, Friedrichs e Levy

METODO UPWIND: Analisi di Fourier

$$u_i^{n+1} = \begin{cases} u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n), & a < 0 \\ u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n), & a > 0 \end{cases}$$

condizione CFL: $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|a|}$

Posto ora $\lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$ l'analisi di Fourier fornisce
per $a > 0$

$$\xi = 1 - \lambda (1 - e^{-i\kappa \Delta x})$$

$$|\xi|^2 = \left[(1 - \lambda) + \lambda \cos \kappa \Delta x \right]^2 + \left[\lambda \sin \kappa \Delta x \right]^2$$

$$= (1 - \lambda)^2 + \lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \cos \kappa \Delta x$$

$$= 1 - 2\lambda(1 - \lambda) (1 - \cos \kappa \Delta x)$$

$$|\xi|^2 = 1 - 4\lambda(1 - \lambda) \sin^2 \frac{\kappa \Delta x}{2}$$

ossia $|\xi| \leq 1$ per ogni κ e $0 \leq \lambda \leq 1$.

Lo stesso risultato vale (esercizio) nel caso $a < 0$,

con a sostituito da $|a|$.

Per l'errore di troncatura del metodo upwind
sappiamo che è $O(\Delta t + \Delta x)$.

In particolare avremo ($a > 0$ per semplicità)

$$T_i^n = \frac{1}{2} (\Delta t u_{tt} - a \Delta x u_{xx}) + \dots$$

$$\text{poiché } u_t + a u_x = 0 \quad u_{tt} + a(u_t)_x = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

quindi

$$T_i^n = -\frac{1}{2} (1 - \nu) a \Delta x u_{xx}$$

$$\text{con } \nu = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Per l'errore in particolare avremo

$$e_i^{n+1} = (1 - \nu) e_i^n + \nu e_{i-1}^n - \Delta t T_i^n$$

$$\text{con } e_0^n = 0 \quad \text{quindi se } 0 \leq \nu \leq 1$$

$$E^n = \max_i |e_i^n|$$

$$\begin{aligned} E^{n+1} &\leq E^n + \Delta t \max_i |T_i^n| \leq E^n + \Delta t T \\ &\leq (n+1) \Delta t T \end{aligned}$$

$$E^n \leq n \Delta t T = t_f T$$

da cui la convergenza dello schema nel caso

dell'equazione del calore se la soluzione ha derivati
secondo l'initiale e se $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ soddisfacendo
la condizione CFL.

METODO DI LAX o LAX-FRIEDRICHS

Abbiamo visto che al secondo ordine abbiamo una sola
condizione necessaria con le differenze centrali (esercizio)
L'uso di metodi upwind non è però necessario visto
che il metodo upwind è stabile del tipo $\Delta t \propto \Delta x$
e quindi un metodo al secondo ordine in Δt e Δx
con la stessa restrizione andrebbe bene.

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

e ora sostituiamo $u_i^n \rightarrow \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)$

che è una buona approssimazione di ordine due in Δx

otteniamo la soluzione

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) -$$

Tale soluzione avrà ovviamente la stessa accuratezza della
soluzione centrale e in più la condizione sul dominio
di dipendenza non è costrittiva $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|a|}$ con
a di segno qualunque.

OSS: Nel caso di leggi di conservazione le condizioni

CFL dipende dalla cella in generale poiché

$$a = f'(u) \quad \text{avremo}$$

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|f'(u_i^n)|}$$

in ogni cella.

Le indichiamo con $\bar{f} = \max_{i,n} |f'(u_i^n)|$ allora se

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\bar{f}}$$

il metodo risulta stabile.

Esercizio: Verificare che lo schema numerico basato sulle differenze centrali e Eulero esplicito

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

risulta incondizionatamente instabile, ossia non è possibile determinare un relazione tra Δt e Δx in modo che l'analisi di Von Neumann porti ad un metodo stabile.

METODO DI LAX-FRIEDRICHS : Analisi di Fourier

Sappiamo che

$$u(x_{i+1})^n = u(x_i)^n + \Delta x u'(x_i)^n + \frac{(\Delta x)^2}{2} u''(x_i)^n$$

$$u(x_{i-1})^n = u(x_i)^n - \Delta x u'(x_i)^n + \frac{(\Delta x)^2}{2} u''(x_i)^n$$

da cui

$$u(x_i)^n = \frac{1}{2} (u(x_{i+1})^n + u(x_{i-1})^n) + O(\Delta x^2)$$

di conseguenza la precedente modifica non altera l'ordine complessivo della schema $O(\Delta t + \Delta x^2)$.

Vediamo la stabilità della schema modificata

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - a \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

da cui posto $u_i^n = \xi^n e^{IK_i \Delta x}$ si ha

$$\xi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{IK \Delta x} & -IK \Delta x \\ e^{-IK \Delta x} & -IK \Delta x \end{pmatrix} - a \frac{\Delta t}{2 \Delta x} \begin{pmatrix} e^{IK \Delta x} & -IK \Delta x \\ e^{-IK \Delta x} & -IK \Delta x \end{pmatrix}$$

$$= \cos(K \Delta x) - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \mp \sin(K \Delta x)$$

$$\xi^2 = \cos^2(K \Delta x) + a^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2(K \Delta x)$$

da cui se $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|a|}$ il metodo

risulta stabile.

METODO EQUAZIONE MODIFICATA

Tale tecnica si basa sullo scrivere una serie alle differenze finite utilizzando solo gli operatori alle differenze centrali per le derivate spaziali ed Eulero esplicito per il tempo.

Lo schema precedentemente può essere riscritto come

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n) -$$

$$- a \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

$$= \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \left(\frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n}{(\Delta x)^2} \right) -$$

$$- a \frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

che corrisponde a discretizzare tramite operatori
centrali l'equazione alle derivate parziali

$$u_t + a u_x = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} u_{xx}$$

ovvero un'equazione che contiene un termine
derivato aggiunto con coefficiente di diffusione

$$\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \quad \text{Poiché} \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x}{|a|} \quad \text{abbiamo}$$

$$\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \geq \frac{\Delta x}{2} |a|$$

OSS: l'effetto del termine diffusivo sarà tanto
più evidente quanto più Δt è piccolo.
La scelta $\Delta t = \frac{\Delta x}{|a|}$ quindi minimizza gli
effetti "indesiderati" ovvero non necessari alla
stabilità del metodo.

OSS: se effettuiamo lo stesso tipo di analisi per
il metodo upwind otteniamo, ad esempio se $a > 0$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + a \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n}{2\Delta x}$$

ossia

$$u_t + a u_x = \frac{a}{2} \Delta x u_{xx}$$

ossia in questo caso il termine di diffusione
ha coefficiente $a \frac{\Delta x}{2}$, ossia il minimo richiesto
dallo schema Lax-Friedrichs. In generale per
il metodo upwind la parte diffusiva ha coefficiente
 $\frac{|a|}{2} \Delta x$.

Abbiamo quindi un errore di ordine più elevato
 $O(\Delta t + \Delta x^2)$ lo schema Lax-Friedrichs

contiene un termine di flusso "artificiale" maggiore
di quello upwind.

Questo caso richiede comporta una perdita d'accuratezza
nelle soluzioni, visto che di fronte a un
fenomeno completamente nuovo.

Abbiamo un metodo più accurato del quello
però ci aspettiamo che il dato iniziale
per effetto delle differenze finite

verga in qualche modo "smussato"
raggiungendo che non vi metodi upwind.

Oss: Nel caso in cui $\Delta t = \frac{\Delta x}{|a|}$ i metodi

vergono a coincidere ed otteniamo un

particolare

$$u_i^{n+1} = \begin{cases} u_{i-1}^n & a > 0 \\ u_{i+1}^n & a < 0 \end{cases}$$

ovvia la rappresentazione delle soluzioni esatte

$$u(x, t) = u_0(x - a t)$$

sui punti griglia, infatti nell'intervallo $[t^{n+1}, t^n]$

$$u(x_i, t^{n+1}) = u(x_i - a \Delta t, t^n) -$$

Quarta e' un caso particolare dovuto alle proprietà
del problema prototipo - se $\Delta t < \frac{\Delta x}{|a|}$ valgono
anche le conclusioni precedenti

OSS: Vedremo che il problema nel caso delle equazioni iperboliche non quello di avere metodi si accurati ma nei quali l'effetto della diffusione artificiale necessaria a rendere il metodo stabile risulta minimo.

NOTA: Abbiamo costruito un metodo per l'equazione

$$u_t + a u_x = b u_{xx}$$

della diffusione - convezione, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$.

Tale metodo è

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \Delta t \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 \Delta x} + b \Delta t \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n}{(\Delta x)^2}$$

e le analisi di stabilità fornisce

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2b} \quad \text{con} \quad \frac{b}{\Delta x} \geq \frac{|a|}{2}$$

$$\text{da cui} \quad \Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2b} \leq \frac{\Delta x}{|a|} -$$

OSS: Otteniamo ad una relazione tra Δt e Δx che abbiamo

$$\Delta x \leq \frac{2b}{|a|} - \text{L'ordine è } O(\Delta t + \Delta x^2) -$$

In molti problemi pratici b è molto più piccola di a e quindi la restrizione

$$\Delta x \leq \frac{2b}{|a|}$$

è molto forte.

Possono pensare di utilizzare il metodo upwind al posto delle differenze centrali. Otteniamo così per $a > 0$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \Delta t + b \Delta t \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n}{(\Delta x)^2}$$

ed in questo caso l'analisi di stabilità fornisce

$$2 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} b + \frac{\Delta t}{\Delta x} a \leq 1$$

da cui abbiamo

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2b + a \Delta x}$$

condizione più forte su Δt ma senza condizione su Δx . Ovviamente è' ordine $\mathcal{O}(\Delta t + \Delta x)$.

OSS: Lo schema di Lax-Friedrichs presenta un notevole vantaggio rispetto ai metodi upwind nel caso di leggi di conservazione non lineari

$$U_t + F(U)_x = 0$$

con $U \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$.

In fatti ad esempio per $m=1$ si ha

$$u_t + f(u)_x = 0$$

e lo schema LxF risulta esplicito

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n))$$

Al contrario il metodo upwind richiede il calcolo di $f'(u)$ e la conoscenza del segno di questo, infatti

$$u_t + f'(u) u_x = 0$$

$$u_i^{n+1} = \begin{cases} u_i^n - f'(u_i^n) (u_i^n - u_{i-1}^n), & f'(u_i^n) > 0 \\ u_i^n - f'(u_i^n) (u_{i+1}^n - u_i^n), & f'(u_i^n) < 0 \end{cases}$$

Per sistemi

è quindi necessario il calcolo della Jacobiana
ossia della matrice $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)$ di risulta si genera

espressioni costose -

Un altro metodo di rendere stabile l'uso delle differenze centrali è dato dallo schem LEAPFROG.

In questo caso vice centrati & discretizzazione temporale nelle for

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Lo schem ha quindi ordine $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ ma

utilizza tre livelli temporali, $n-1, n, n+1$.

L'analisi di Fourier fornisce spontaneamente un'equazione quadratica in ξ

$$\xi^2 - 1 + 2i\sqrt{\xi} \sin(K\Delta x) = 0, \quad \sqrt{\xi} = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

de la radici:

$$\xi_{\pm} = -i\sqrt{\xi} \sin(K\Delta x) \pm \left[1 - \sqrt{\xi}^2 \sin^2(K\Delta x)\right]^{1/2}$$

con $\xi_+ \cdot \xi_- = -1$, e quindi $\xi_+ = -\bar{\xi}_-$.

Se $|\sqrt{\xi}| \leq 1$ è possibile provare che sia ξ_+ che ξ_- sono radici complesse ed in questo caso

$|\xi_+| \leq 1, |\xi_-| \leq 1$ e lo schem è stabile.

PROBLEMA: La presenza di due radici reali e la presenza di due soluzioni per lo stesso. Una avrà senso fisico, l'altra invece è una soluzione "spuria" ossia un artefatto numerico. Tale artefatto numerico crea vedere in maniera in oscillazioni presenti nello schema, o onde che si propagano a velocità sbagliate.

Lo schema LEAPFROG è però interessante nel caso di sistemi del tipo

$$u_t + a u_x = 0$$

$$v_t + a u_x = 0$$

che corrispondono all'equazione delle onde $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

È possibile in questo caso distinguere le false soluzioni dello schema del tipo

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} - v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\Delta x} = 0$$

dove abbiamo indicato nei nodi $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{\Delta x}{2}$.

Eliminando v si ottiene la soluzione centrale per l'eq. delle onde.

N.B. Lo schema risulta stabile ed il precedente modo spurio non è presente.

LAX-WENDROFF

$$u_t + a u_x = 0$$

$$u_t = -a u_x$$

$$u_{tt} = -a(u_x)_t = a^2 u_{xx}$$

$$u(x, t+\Delta t) = u(x, t) + \Delta t u_t(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}(x, t) + \dots$$

$$u(x, t+\Delta t) = u(x, t) - \Delta t a u_x(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2} a^2 u_{xx}(x, t)$$

a queste punti si approssimano u_x e u_{xx} tramite differenze centrali ottenendo così lo schema

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \Delta t \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + a^2 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n}{(\Delta x)^2}$$

che può essere anche visto come le differenze centrali con una diffusione numerica aggiunta con coefficiente di diffusione $D = a^2 \frac{\Delta t}{2}$.

Per costruzione il metodo è di ordine $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$. L'analisi di Fourier fornisce

$$|\xi|^2 = 1 - 4\nu^2(1-\nu^2)\sin^4\left(\frac{\kappa\Delta x}{2}\right)$$

da cui ancora se $|\nu| \leq 1$ lo schema risulta stabile.

Osserviamo che lo stesso h ordine due è stabile con $L \times F$, in realtà u $L \times F$ è diffusione numerica in ragione delle diffusive numerica del metodo upwind in questo caso poiché $|a| \Delta t \leq \Delta x$ in h

$$a^2 \frac{\Delta t}{2} \leq a \frac{\Delta x}{2}$$

ossia la diffusive numerica è anche minore rispetto a quella del metodo upwind.

Nel caso in cui $a = a(x, t)$ o nel caso di leggi di conservazione

$$u_t + f(u)_x = 0$$

la derivazione del metodo è leggermente diversa.

Nella precedente serie di Taylor potremo scrivere

$$u_t = -f(u)_x$$

$$u_{tt} = -f(u)_{tx} = -(f'(u)u_t)_x = (f'(u)f(u)_x)_x$$

$$u(t + \Delta t) = u(x, t) - \Delta t f(u)_x + \frac{\Delta t^2}{2} (f'(u)f(u)_x)_x$$

discretizzando ora

$$f(u)_x = \frac{f(u_{i+1}) - f(u_{i-1}))}{\Delta x}$$

$$[f'(u)f(u)_x]_x = -\frac{1}{\Delta x} \left[f'(u_{i+1/2}) \frac{f(u_i) - f(u_{i-1}))}{\Delta x} - f'(u_{i-1/2}) \frac{f(u_i) - f(u_{i-1}))}{\Delta x} \right]$$

$$u_{i \pm 1/2} = \frac{1}{2} (u_i + u_{i \pm 1})$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

Tipicamente un'equazione della forma

$$u_t + a u_x = 0, \quad x \in [0, L]$$

viene corredata con condizioni al contorno in

$x=0$ se $a > 0$, $x=L$ se $a < 0$.

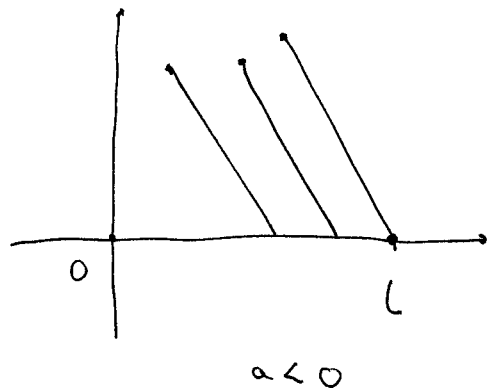
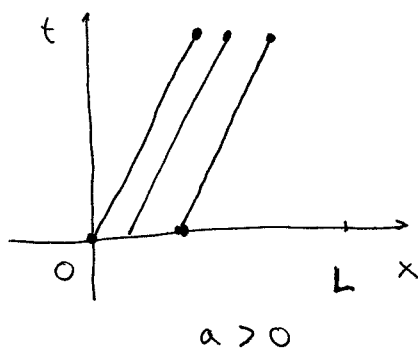
In fatti poiché la soluzione esatta è

$$u(x, t) = u_0(x - at)$$

con $u_0(x)$ dato iniziale, si vede bene come

se $a > 0$ la soluzione in (x, t) dipende solo

da quella in $(x - at, 0)$.



A questo proposito va detto che i metodi centrali,

ovvia l'ulti meno di l'upwind, presentano lo svantaggio

di richiedere una condizione aggiuntiva anche in $x=L$

se $a > 0$ ed in $x=0$ se $a < 0$.

In fatti u_i^{n+1} è dato in funzione di u_i^n , u_{i+1}^n , u_{i-1}^n

quindi se $a > 0$ in $i=1$ avremo il valore al contorno assegnato, ma per calcolare la soluzione in $i=N$ abbiamo

bisogna del valore in $N+1$. Analogamente se $a < 0$

è necessario un valore in 0 .

Una possibilità è quella di usare il metodo upwind per quest'ultimo punto (ma l'ordine si abbassa) -

Un'altra tecnica è quella di assumere u_{N+1} come valore interpolato utilizzando un'espansione in serie di Taylor

$$u(x_{N+1}, t) = u(x_N, t) + 2\Delta x u_x(x_N, t) + O(\Delta x^2)$$

da cui

$$u_{N+1} = u_{N-1} + 2\Delta x \frac{u_N - u_{N-2}}{2\Delta x} = u_{N-1} + u_N - u_{N-2}$$

○ negli sviluppi u_N a sinistra e a destra si ha

$$u_{N-1} = \frac{1}{2} (u_{N+1} + u_{N-1}) \Rightarrow u_{N+1} = 2u_N - u_{N-1}$$

analogamente

$$u_1 = \frac{1}{2} (u_0 + u_2) \Rightarrow u_0 = 2u_1 - u_2$$

Altre scelte sono $u_{N+1} = u_N$ e $u_0 = u_1 -$

ESTENSIONE A PIÙ DIMENSIONI

Se considero una semplice equazione lineare in due dimensioni

$$u_t + a u_x + b u_y = 0$$

con dato iniziale $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ si vede

che la soluzione esatta è $u(x, y, t) = u_0(x - at, y - bt)$.

I metodi precedenti possono essere estesi in modo naturale semplicemente operando in modo separato su ogni variabile.

Ad esempio il metodo upwind fornisce

$$\begin{cases} u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n - a (u_{ij}^n - u_{i-1,j}^n) - b (u_{ij}^n - u_{i,j-1}^n), & a > 0, b > 0 \\ \text{Analogamente si ricavano i restanti casi } a > 0, b < 0, \\ a < 0, b > 0 \text{ e } a < 0, b < 0. \end{cases}$$

il metodo è stabile se $|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} + |b| \frac{\Delta t}{\Delta y} \leq 1$.

Analogamente si può estendere i metodi di Lax-Friedrichs, ed il metodo Lax-Frog.

In particolare osservando che si può risolvere il problema precedente risolvendo in due passi il sistema

$$1) \begin{cases} u_t^* + a u_x^* = 0 \\ u^*(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases}$$

ottenendo $u^*(x, y, t)$ e poi risolvere $\left(u^*(x, y, t) = u_0(x - at, y) \right)$

$$2) \begin{cases} u_t^{**} + b u_y^{**} = 0 \\ u^{**}(x, y, 0) = u^*(x, y, t) \end{cases}$$

otteniamo $u^{**}(x, y, t) = u_0(x - at, y - bt)$ ossia la

soluzione esatta. Questo significa che possiamo risolvere il problema risolvendo separatamente divenendo per divenire una serie di problemi monodimensionali.

Se invece ora consideriamo il caso generale di un sistema di leggi di conservazione in 2d

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0$$

con $U \in \mathbb{R}^m$, $F(U), G(U) \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$.

Nel caso di un'equazione singola $m = 1$ abbiamo,

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0.$$

Anche in questo caso è possibile applicare gli schemi precedenti.

Va però detto che nel caso di interie abbe:

$$U_t + A(U)U_x + B(U)U_y = 0$$

$$\text{con } A = \frac{\partial F}{\partial U}, \quad B = \frac{\partial G}{\partial U}.$$

Ora A e B non saranno in generale diagonalizzabili mediante le stesse matrici di autovettori, ne deriva che l'applicazione dei metodi upwind basati nel sistema in forma normale risulta molto difficile in generale.

In particolare in questo caso si dimostra che lo splitting proceduto non fornisce più la soluzione esatta ma solo una sua approssimazione di ordine $O(\Delta t)$.

Un metodo per ovviare a questo problema è dato dalla

Splitting di Strang

$$u_t^* + f(u^*)_x = 0 \quad \text{in } [0, t/2]$$

$$u_t^{**} + g(u^{**})_y = 0 \quad \text{in } [0, t]$$

$$u_t^{***} + g(u^{***})_x = 0 \quad \text{in } [0, t/2]$$

in questo caso la soluzione finale $u^{***}(x, t)$ ha ordine

$O(\Delta t^2)$. Numerici devono risolvere ogni passo con un

metodo di ordine almeno due in t .