PROGETTO ODE 40

LIVELLI TROFICI IN UN ECOSISTEMA

1. INTRODUZIONE AL PROBLEMA

Il progetto consiste nell'esaminare gli scambi di energia e di biomassa tra i livelli trofici di un particolare ecosistema. L'ecosistema preso in esame è costituito da: produttori primari (PP), carnivori (C),erbivori (H), decompositori (D) e nutrienti (N).

Cos'è un livello trofico?

I livelli trofici sono raggruppamenti di individui,appartenenti a specie diverse, che si nutrono utilizzando la stessa forma di energia e che sono separati dai produttori dallo stesso numero di tappe. Lo stesso individuo può appartenere a differenti livelli trofici, ad esempio gli onnivori, in quanto consumano tutti i tipi di alimenti. Al primo livello trofico si trovano tutti i produttori primari (piante, alghe, batteri,ecc..);al secondo livello i consumatori primari che si nutrono dei produttori (erbivori,ecc..); al terzo livello invece si trovano i consumatori secondari,ovvero i carnivori che si nutrono degli erbivori e così via.

Nella pratica non si riscontrano mai più di cinque livelli trofici.

I decompositori, che di solito sono dei batteri situati nel terreno, trasformano i resti di piante e di animali morti in sali minerali, utili per la crescita di nuove piante.

I produttori primari per produrre biomassa utile al livello trofico successivo, che costituisce la massa totale di organismi vegetali o animali viventi in un determinato volume di terreno o di acqua , hanno bisogno sia di sostante nutritive come l'azoto, che di energia solare, i quali sono trasferiti in una minima parte ai livelli superiori.

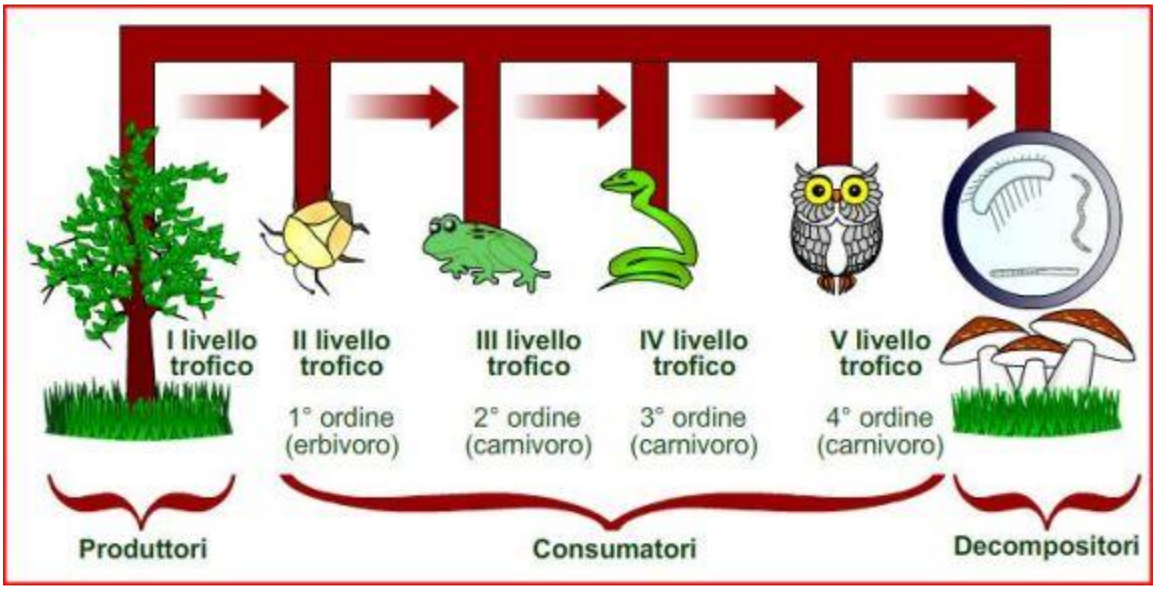
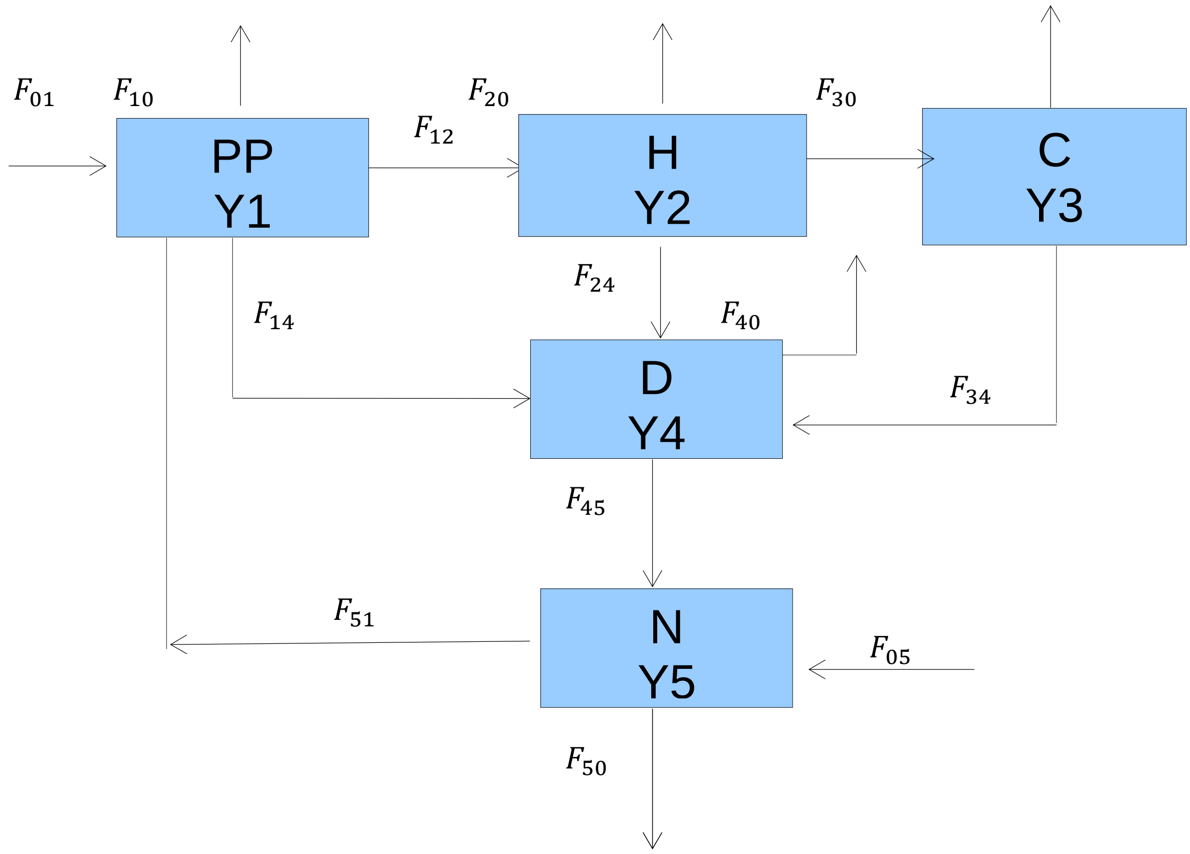


Fig1. Rappresentazione dei livelli trofici.

Per studiare il modello che descrive l'ecosistema in esame, è stato fatto riferimento ai modelli classici di Lotka(1924) e Volterra(1926), utilizzati per analizzare le variazioni delle popolazioni causate da competizioni o interazioni di tipo preda – predatori. In particolare, si considerano modelli che si basano su quelli classici ma sono più realistici, in quanto introducono sia la capacità ambientale(la massima dimensione di popolazione che un ambiente può sopportare)per la popolazione delle prede, sia il fatto che quest'ultima sia limitata, oltre che dai predatori anche dalle risorse di cibo, e sia che i predatori non possono consumare infinite quantità di prede.

2. DESCRIZIONE DEL MODELLO MATEMATICO

Si riporta in maniera schematica l'ecosistema in esame:



Con y_i viene indicata la biomassa del livello trofico rappresentato dal compartimento i-mo e con F_{ij} si indica il flusso di biomassa dal compartimento i-mo al compartimento j-mo. L'indice "0" si riferisce all'ambiente esterno, ossia ad esempio F_{i0} indica il flusso di biomassa dal compartimento i-mo verso l'ambiente.

Le equazioni di bilancio di tale modello sono delle equazioni del primo ordine di tipo ODE.

$$\frac{y_1}{dt} = F_{01} + F_{51} - F_{10} - F_{12} - F_{14}$$
$$\frac{y_2}{dt} = F_{12} - F_{20} - F_{23} - F_{24}$$
$$\frac{y_3}{dt} = F_{23} - F_{30} - F_{34}$$
$$\frac{y_4}{dt} = F_{14} + F_{24} + F_{34} - F_{40} - F_{45}$$
$$\frac{y_5}{dt} = F_{05} + \gamma_4 F_{45} - F_{50} - \gamma_1 F_{51}$$

γi indica il contenuto nutritivo di biomassa del compartimento i-mo; tale contenuto può dipendere dallo stadio di sviluppo dell'organismo e non è necessariamente costante nel tempo.

Come esempio di modello del sistema precedente possiamo considerare le seguenti equazioni differenziali del primo ordine che, come detto, fanno riferimento ai principi che riguardano i fenomeni di accrescimento delle popolazioni, agli effetti di interazioni di tipo preda-predatore, nonché alle leggi fisiche e chimiche che regolano gli scambi con l'ambiente.

(MODELLO ODE 1)

$$\frac{dy_1}{dt} = ry_1(1 - \frac{y_1}{K}) - (\rho_1 + \mu_1)y_1 - \frac{(y_1 y_2 \beta_{12})}{(L_{12} + y_1)}$$

$$\frac{y_2}{dt} = \frac{(y_1 y_2 \beta_{12})}{(L_{12} + y_1)} - (\rho_2 + \mu_2)y_2 - \frac{(y_2 y_3 \beta_{23})}{(L_{23} + y_2)}$$

$$\frac{dy_3}{dt} = \frac{(y_2 y_3 \beta_{23})}{(L_{23} + y_2)} - (\rho_3 + \mu_3)y_3$$

$$\frac{dy_4}{dt} = \Sigma \mu_i y_i - (\rho_4 + \mu_4)y_4$$

$$\frac{dy_5}{dt} = F_{05}(t) - \gamma_1 r y_1 (1 - \frac{y_1}{K}) + \gamma_4 \mu_4 y_4 - k_{50} y_5$$

ove:

1) $r = \frac{(r_{max} y_5)}{(y_5 + C)}$

con opportune condizioni iniziali.

In particolare:

r è il tasso di accrescimento della biomassa ed è funzione (con saturazione di tipo Michaelis-Menten) della concentrazione del nutrientey_5;
μ è il tasso di decadimento dovuto ai decompositori;
ρ costante che tiene conto della biomassa che viene ceduta all'ambiente;
K rappresenta la capacità ambientale;
la biomassa consumata dall'erbivoroy_2e dal carnivoro y_3e l'aumento nella crescita dei predatori sono rappresentati con un tasso di tipo Michaelis-Menten;

L'ultima equazione è un'equazione di bilancio per un nutriente (nel caso in esame è stato preso in considerazione l'azoto).
Il nutriente entra nell'ecosistema con velocità descritta dalla funzione$F_{05}(t)$, è perso per la produzione di biomassa ($\gamma_1 F_{51}$) ed è riciclato dal decadimento degli organismi (γ_4 μ_4 y_4).
$-k_{50} y_5$rappresenta le perdite dovute al trasporto.

3. <u>REALIZZAZIONE IN MATLAB DEL PROGETTO</u>

Per la realizzazione in Matlab del progetto, **distinguere due casi differenti, in base alla scelta di alcuni parametri e per ognuno applicare gli stessi metodi numerici. Considerare la funzione che descrive la velocità di ingresso del nutriente nell'ecosistema $F_{05}(t)$uguale per entrambi i casi.**

<u>PRIMO CASO</u>

Per quanto riguarda il primo caso, il parametro r è costante, e il tasso di consumo della biomassa non di tipo Michaelis- Menten.
Questa scelta è dettata dal fatto che ci si basa su modelli che, facendo riferimento a quelli classici di Lotka e Volterra per quanto riguarda le variazioni delle popolazioni causate da competizioni o interazioni di tipo preda – predatori, sono più realistici e considerano il fattore di crescita costante e il tasso di consumo proporzionale al numero di prede e predatori. Fare un confronto con il caso in esame che invece considera r dipendente dal tempo e il tasso di consumo di tipo Michaelis -Menten.

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = cx(t)y(t) - dy(t)$$

con:
x(t)=prede;
y(t)=predatori;
a è il fattore di crescita che è costante;
bx(t)y(t) è il tasso di consumo;
cx(t)y(t) indica l'aumento nella crescita dei predatori;
d tasso di mortalità dei predatori in assenza delle prede, e quindi **dy(t)** rappresenta il tasso di decrescita (segno meno) della popolazione dei predatori nel tempo.

Le equazioni differenziali del primo ordine sopra scritte, sono le equazioni che descrivono i modelli classici di Lotka e Volterra. Considerando invece un modello più realistico, le equazioni precedentemente scritte diventano:

$$\frac{dx}{dt} = ax(1 - \frac{x}{K}) - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

Basandoci su tali equazioni, il modello da studiare in Matlab, è il seguente:

$$\frac{dy_1}{dt} = ry_1(1 - \frac{y_1}{K}) - (\rho_1 + \mu_1)y_1 - p_1 y_1 y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = p_1 y_1 y_2 - (\rho_2 + \mu_2)y_2 - p_2 y_2 y_3$$

$$\frac{dy_3}{dt} = p_2 y_2 y_3 - (\rho_3 + \mu_3)y_3$$

$$\frac{dy_4}{dt} = \Sigma_{i}^{3} \mu_i y_i - (\rho_4 + \mu_4)y_4$$

$$\frac{dy_5}{dt} = F_{05}(t) - \gamma_1 r y_1(1 - \frac{y_1}{K}) + \gamma_4 \mu_4 y_4 - k_{50} y_5$$

il modello non lineare di Lotka e Volterra modificato non tiene conto della dispersione di biomassa nell'ambiente, come non tiene conto del decadimento dovuto ai decompositori, ma soltanto della

decrescita dei predatori in assenza di prede. Per questo motivo al posto di d*y(t) sono stati considerati i tassi di decadimento e i tassi che tengono conto dell'ambiente, presi con il segno meno in quanto indicano comunque una decrescita dei predatori.
Per la realizzazione del modello si scelgano:
F_{05}andamento a gradino di ampiezza U;
γ4,γ1 costanti, non dipendenti dal tempo e di valore rispettivamente 0.05 e 0.1;
K=20000;
k_{50}=0.3;
r=0.1;
p_1=0.1;
p_2=0.05;
ρ_1,ρ_2,ρ_3,$\rho_{4,}$ sono state poste uguali a 0.6;
μ_1=0.2;
μ_2=0.4;
μ_3=0.5;
μ_4=0.6;
U=$13*10^{12}$
I tassi $\rho_i$non sono scelti a caso, ma considerano che ogni compartimento disperde nell'ambiente la stessa percentuale di biomassa che è circa del 60-70%.
Anche perp_1e $p_2$si considera che i livelli trofici più bassi sono consumati maggiormente per la loro maggiore presenza sulla Terra. Infatti i produttori primari sono in numero maggiore rispetto agli erbivori, gli erbivori sono presenti in numero maggiore rispetto ai carnivori del primo livello e così via...
Per le condizioni iniziali invece si scelga:
$y_1(0) = 200$;
$y_2(0) = 100$;
$y_3(0) = 50$;
$y_4(0) = 50$;
$y_5(0) = 500$;

<u>SECONDO CASO</u>
Si consideri il tasso di crescita r una funzione (con saturazione di tipo Michaelis-Menten) della concentrazione del nutriente $y5$in MODELLO ODE 1, e il tasso di consumo di biomassa da parte dei predatori di tipo Michaelis-Menten. Con tali cambiamenti, il modello risulta MODELLO ODE 1.
Per la realizzazione del caso in esame si scelga:
F_{05}ha un andamento a gradino unitario di ampiezza U.
γ4,γ1 costanti, non dipendenti dal tempo e di valore rispettivamente 0.05 e 0.1;
K= 20000;
ρ_1,ρ_2,ρ_3,ρ_4, sono poste uguali a 0.6;
μ_1=0.2;
μ_2=0.4;
μ_3=0.5;
μ_4=0.6;
U=$13*10^{12}$
k_{50}=0.3;
r_{max}=0.8;
C=50;
L_{12}=70;
L_{23}=40;

β_{12}=1.5;
β_{23}=2;
Le condizioni iniziali sono le stesse del primo caso, per cui:
$y_1(0)$= 200;
$y_2(0)$=100;
$y_3(0)$=50;
$y_4(0)$=50;
$y_5(0)$=500;