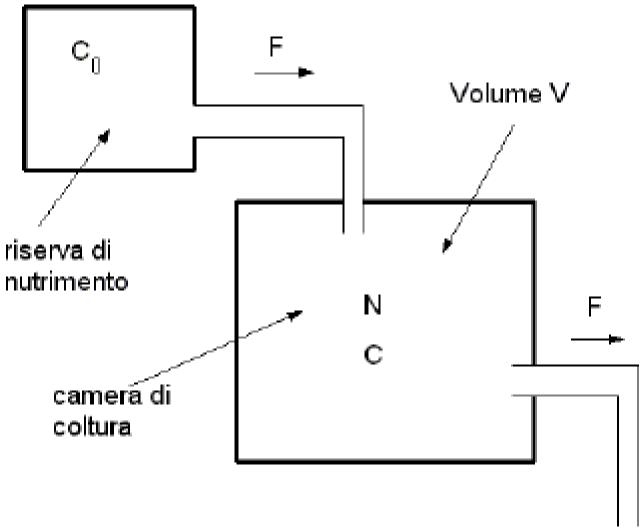
Progetto ODE:
CRESCITA DI UNA POPOLAZIONE DI BATTERI IN UN CHEMOSTATO

1. INTRODUZIONE AL PROBLEMA

Una problematica comune nei laboratori è quella di mantenere una popolazione di batteri vivi in condizioni ottimali ed in numero tale da poterne permettere un prelievo costante. Per fare ciò è stata studiata un'apparecchiatura in grado di apportare alla colonia batterica il giusto quantitativo di nutrienti ed allo stesso tempo consentire l'uscita del prodotto di accrescimento. Tale apparecchiatura, illustrata nella figura sottostante, è chiamata chemostato.



Come si può osservare è presente una camera che funge da riserva di nutrimento (C_0) dalla quale parte un flusso F che trasporta i nutrienti nella camera di coltura. In questa sono contenuti i batteri che hanno una certa densità di popolazione (N) e che consumano il nutrimento variandone quindi la concentrazione (C) rispetto a quella in ingresso alla camera. Il prodotto di accrescimento viene poi fatto uscire alla stessa velocità del flusso F in modo che il volume (V) nella camera di coltura rimanga costante.
Perché il sistema funzioni in modo efficace il flusso F non deve essere troppo forte, per non disturbare o addirittura "lavare" via la coltura batterica ed allo stesso tempo deve esserci un apporto di nutrienti sufficiente a consentire l'accrescimento della popolazione.

2. DESCRIZIONE MODELLO MATEMATICO

Data N la densità dei batteri nel chemostato ed assunto il fatto che questa vari al variare dell'apporto di nutrimento C e dalla velocità del flusso d'uscita F si può scrivere:

$$\frac{dN}{dt} = KN - FC$$

Ovvero la variazione di densità della popolazione batterica è data dalla velocità di accrescimento KN a cui bisogna sottrarre il flusso d'uscita FC.
Per modellizzare la variazione di concentrazione del nutrimento si potrà inoltre ipotizzare che i batteri si accrescano consumando un'unità α di nutriente per ogni nuova unità di popolazione, si avrà quindi che la variazione di concentrazione è data dal flusso per la concentrazione iniziale entrante a cui si sottrae quella uscente e quella consumata dai batteri.

$$\frac{dC}{dt} = -\alpha K(C)N - FC + FCo$$

La velocità di riproduzione K dei batteri dipende dalla concentrazione di nutrimento C e si può esprimere come $K(C) = \frac{K\max \cdot C}{Kn + C}$ che viene ottenuta dall'osservazione empirica del sistema.

Tramite opportune semplificazioni le equazioni del sistema possono essere riscritte (i passaggi non sono riportati per brevità, eventualmente rifarsi a Valeriano Comincioli, "Modelli matematici, elementi introduttivi") per ottenere il sistema:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1 \left(\frac{C}{1+C} \right) N - N$$

$$\frac{dC}{dt} = -\left(\frac{C}{1+C} \right) N - C + \alpha_2$$

Risolvere numericamente il sistema di ODE sopra presentato con metodi ad un passo (one step) ovvero: metodo di Eulero implicito, metodo di Eulero esplicito, il metodo di Heun e due metodi a passo adattivo forniti direttamente da Matlab: ode45 e ode32.

Poiché il sistema presentato può essere analizzato in varie fasi della "vita" dello stesso si studi il modello di un chemostato nuovo, ovvero mai utilizzato. Il reattore risulta quindi vuoto, la popolazione batterica e la concentrazione di nutrienti sono inizialmente al minimo e si avranno quindi le <u>condizioni iniziali:</u>

N(0)=0.1

C(0)=0.1

α_1= 2

α_2= 4

Si faccia riferimento anche al libro biomatematica2.pdf, a pag.8.