

Progetto PDE: MODELLO BVP DI DIFFUSIONE-REAZIONE MONODIMENSIONALE

Introduzione

Utilizzare il metodo alle differenze finite nella risoluzione di problemi al contorno di diffusione-reazione monodimensionali. L'equazione differenziale è la seguente:

$$-\mu y'' + \sigma y = 0 \quad (1)$$

con condizioni al contorno $y(0)=0$, $y(1)=1$, in $0 < x < 1$.

Dove σy è il termine di reazione, μ è la viscosità, μ e σ sono costanti positive. La soluzione esatta del problema è:

$$y(x) = \sinh(\alpha x) / \sinh(x)$$

dove $\alpha = (\sigma/\mu)^{1/2}$.

Se $\sigma/\mu \gg 1$, vi è uno strato limite per $x \rightarrow 1$ con uno spessore dell'ordine di $(\sigma/\mu)^{1/2}$ in cui la derivata prima diventa illimitata per $\mu \rightarrow 0$. È quindi interessante definire un numero di Peclet globale che prende la forma:

$$Pe_g = \sigma L^2 / 6\mu$$

dove L è la dimensione lineare nel dominio, che nel nostro caso è uguale a 1.

Si confronti la soluzione esatta con la soluzione alle differenze finite nei seguenti due casi particolari :

- GAS: alle costanti σ e μ si assegnano i valori di un generico gas. Come ordini di grandezza si ha densità dell'ordine 1 o 1.5 e viscosità nell'ordine 10^{-5} ; scegliere $\sigma = 1.5$ e $\mu = 10^{-5}$.

- LIQUIDO: alle costanti σ e μ si assegnano i valori di un generico idrocarburo. Per i liquidi si hanno densità dell'ordine di 10^3 (1000 è l'acqua e 500-600 sono idrocarburi) e viscosità nell'ordine della 10^{-3} ; scegliere $\sigma = 500$ e $\mu = 10^{-3}$.

Le unità di misura si riferiscono al sistema internazionale ossia kg/m^3 per la densità, $\text{Pa}\cdot\text{s}$ per la viscosità.

Bibliografia

'Modellistica numerica per problemi differenziali'. Alfio Quarteroni