

# Progetto 20 PDE

## I modelli parabolici non lineari di Variazione Totale (TV) e Perona Malik (PM) nell'elaborazione digitale di immagini

### INTRODUZIONE AL PROBLEMA

Nelle immagini ottenute od elaborate in formato digitale è possibile riscontrare la presenza di rumore che ne altera l'aspetto originale. La problematica risulta tanto più grave nelle immagini diagnostiche dove, dal momento della generazione dell'immagine a quella della visualizzazione, i dati devono attraversare svariati processi che inevitabilmente tendono a degradarle.

Una prima soluzione che si vuole analizzare in questo progetto è l'utilizzo come filtro di rimozione del rumore nelle immagini dell'equazione differenziale (lineare) del calore.

Una seconda soluzione invece considera un filtro più sofisticato (introdotto da Perona e Malik) che permette di preservare le caratteristiche strutturali dell'immagine (edge) utilizzando il principio di diffusione anisotropica.

Sulla base di questo lavoro sono poi stati sviluppati ulteriori tecniche di filtraggio sempre più performanti che hanno permesso grandi sviluppi nel mondo dell'elaborazione digitale delle immagini.

Nel presente progetto si richiede di realizzare e poi mettere a confronto l'applicazione su un'immagine digitale del filtro lineare realizzato dall'equazione del calore, del filtro di Perona-Malik e del filtro di Variazione Totale (TV).

### DESCRIZIONE MODELLO MATEMATICO

Sia  $I_0$  l'immagine perturbata originale rappresentata come una funzione bivariata che caratterizza i livelli di grigio dell'immagine definita in un dominio rettangolare  $D$ . In una serie di immagini derivate ottenute convolvendo con una curva gaussiana  $G(x, y; t)$ :

$$I(x, y, t) = I_0(x, y) * G(x, y; t)$$

valori più grandi di  $t$ , corrispondono a immagini di risoluzione maggiore ma meno dettagliata.

Sia  $I(x, y, t)$  una famiglia di immagini che può essere vista come soluzione dell'equazione conduzione/diffusione del calore:

$$I_t = c \Delta I = I_{xx} + I_{yy} \quad (1)$$

con condizione iniziale  $I(x, y, 0) = I_0(x, y)$  e  $c$  coefficiente di diffusione. Si consideri l'equazione di diffusione anisotropica in dimensione due

$$I_t = \nabla \cdot (g(x, y, t) \nabla I), \quad (2)$$

dove  $g(x, y, t)$  è il coefficiente di diffusione anisotropa e gli operatori  $\Delta I$ ,  $\nabla I$  indicano rispettivamente il Laplaciano e il gradiente di  $I$ . Questa si riduce all'equazione di diffusione isotropa del calore (1) se  $g(x, y, t)$  è una costante.

Se invece il coefficiente  $g(x, y, t)$  è funzione del modulo del gradiente della funzione di luminosità:

$$g(\|\nabla I\|)$$

il modello differenziale mette in risalto la luminosità dei bordi, evidenziandoli, nel caso in cui la funzione  $g(\cdot)$  venga scelta in modo appropriato.

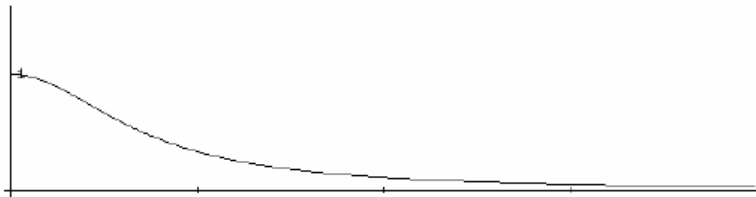
Con la diffusione lineare (1) il prezzo pagato per l'eliminazione del rumore è l'offuscamento degli edge. Questo rende difficile la loro individuazione e localizzazione. L'azione invece del modello differenziale di Perona-Malik (2) tende a eliminare il rumore preservando i contorni dell'immagine.

Le due scelte più appropriate del coefficiente di diffusività  $g()$  nel modello PM sono:

$$g(\|\nabla I\|) = e^{-\left(\frac{\|\nabla I\|^2}{K}\right)} \quad g(\|\nabla I\|) = \frac{1}{1 + \frac{\|\nabla I\|^2}{K}}$$

dove  $K > 0$  è una costante opportuna che dipende dalle caratteristiche dell'immagine e  $\|\cdot\|$  è una norma, ad esempio la norma 2 del vettore.

Le due funzioni hanno andamento monotono decrescente simile, per valori alti del gradiente (che indicano la presenza di edge) il valore di  $g$  tende a zero, ovvero smorza la diffusione.

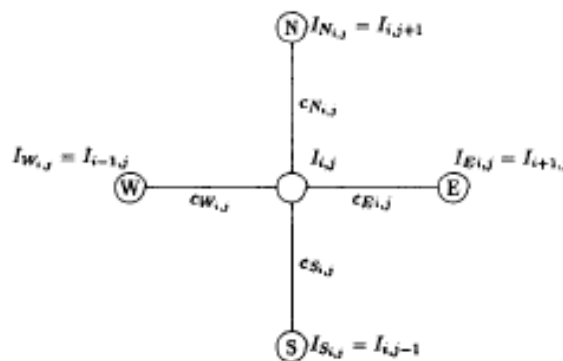


Il modello a variazione totale (TV) utilizza in (2):

$$g_{TV}(\|\nabla I\|) = \frac{1}{\|\nabla I\|^2 + \varepsilon}$$

dove  $\varepsilon > 0$  è un parametro molto piccolo che serve nei punti in cui il gradiente si annulla.

Secondo l'idea originale di Perona-Malik l'equazione di diffusione anisotropica viene discretizzata con schemi alle differenze finite, utilizzando la maschera sottostante:



La discretizzazione temporale con passo  $\lambda$  segue uno schema esplicito ed è indicata con  $n$ , la discretizzazione spaziale risulta:

$$I_{ij}^{n+1} = I_{ij}^n + \lambda [c_N \nabla_N I + c_S \nabla_S I + c_O \nabla_O I + c_E \nabla_E I],$$

in cui  $\lambda$  è un valore che, ai fini della stabilità del modello, deve essere compreso fra 0 e  $1/4$ ,  $N$ ,  $S$ ,  $E$  e  $O$  sono i pedici per indicare Nord, Sud, Est ed Ovest.

Per la discretizzazione dell'operatore gradiente, si avrà:

$$\nabla_N I = I_{i-1,j} - I_{ij}$$

$$\nabla_S I = I_{i+1,j} - I_{ij}$$

$$\nabla_E I = I_{ij+1} - I_{ij}$$

$$\nabla_O I = I_{ij-1} - I_{ij}$$

I coefficienti di diffusività sono aggiornati ad ogni passo temporale come funzione del gradiente dell'intensità luminosa:

$$c_{N,ij}^n = g(\|\nabla I_{i+1/2,j}^n\|)$$

$$c_{Sij}^n = g(\|\nabla I_{i-1/2,j}^n\|)$$

$$c_{E,ij}^n = g(\|\nabla I_{ij+1/2}^n\|)$$

$$c_{O,ij}^n = g(\|\nabla I_{ij-1/2}^n\|)$$

Inserire all'interno del framework per l'elaborazione di immagini fornito in laboratorio un metodo numerico alle differenze finite che risolva il modello di PM a 4 vicini e il modello di TV.

Si estenda la formula PM per uno stencil più complesso, che considera 8 neighboring nodes, che oltre alle 4 direzioni N-S-O-E, tenga in considerazione anche le posizione intermedie NE-SE-NO-SO agli angoli del quadrato dello stencil.

Confrontare i vari metodi con la risoluzione della equazione lineare del calore 2D eq. (1). Applicare i metodi a diverse immagini in scala di grigio e commentare i risultati ottenuti.