Progetto 15 PDE
Studio dell'equazione delle onde (mono- e bi-dimensionale) su corda e membrana fissate

Equazione delle onde monodimensionale

L'equazione differenziale alle derivate parziali (2.1) che è presentata in questo problema rappresenta il modello di una corda elastica vibrante di lunghezza *L* fissata agli estremi, con *c* coefficiente dipendente dalla massa specifica della corda e dalla sua tensione. La soluzione *u* rappresenta lo spostamento verticale.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{2.1}$$

Per risolvere l'equazione è necessario imporre le condizioni iniziali e le condizioni al contorno. Nell'equazione (2.1) appare una derivata seconda rispetto al tempo, ed è quindi appropriato assegnare oltre alla posizione della corda, anche la sua velocità iniziale.

$$u(x,0) = \sin(3\pi x) \tag{2.2}$$

$$u_t(x,0) = 0 \tag{2.3}$$

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, vengono bloccati gli estremi della corda.

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \tag{2.4}$$

Il processo fisico descritto è di tipo conservativo, che ovvero non si evolve verso una forma stazionaria (l'energia è conservata nel tempo); ecco perché si parla di PDE *iperbolica*.

Risolvere mediante differenze finite metodo esplicito ed implicito.

OPZIONALE (da svolgere con PDEtoolbox)
Equazione delle onde bidimensionale

Il problema è analogo al precedente, con l'unica differenza di trovarsi in un dominio bidimensionale: l'equazione differenziale alle derivate parziali (2.12) rappresenta quindi il modello di una membrana elastica vibrante quadrata avente lato pari a *L*=2 m, con *c* coefficiente dipendente dalla massa specifica della membrana e dalla sua tensione. La soluzione *u* rappresenta lo spostamento verticale.

$$u_{tt} = c^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \tag{2.12}$$

Il dominio è quadrato di vertici (-1,-1), (-1,1), (1,1) e (1,-1), e le condizioni iniziali sono rappresentate rispettivamente dalle equazioni (2.13) e (2.14). Analogamente al caso monodimensionale, è appropriato assegnare oltre alla posizione della membrana, anche la sua velocità iniziale.

$$u(x,y,0) = \arctan(\cos(\pi x/2)) \tag{2.13}$$

$$u_t(x,y,0) = 3\sin(\pi x)e^{\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)} \tag{2.14}$$

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, la membrana è fissata sul bordo.

$$u(-1,-1,t) = u(-1,1,t) = u(1,1,t) = u(1,-1,t) = 0 \tag{2.15}$$

Si utilizzi per la risoluzione numerica MatLab per caso 1D e il toolbox PDEtool di MATLAB o Comsol Multiphysics per caso 2D.