Introduzione

Serena Morigi

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Bologna

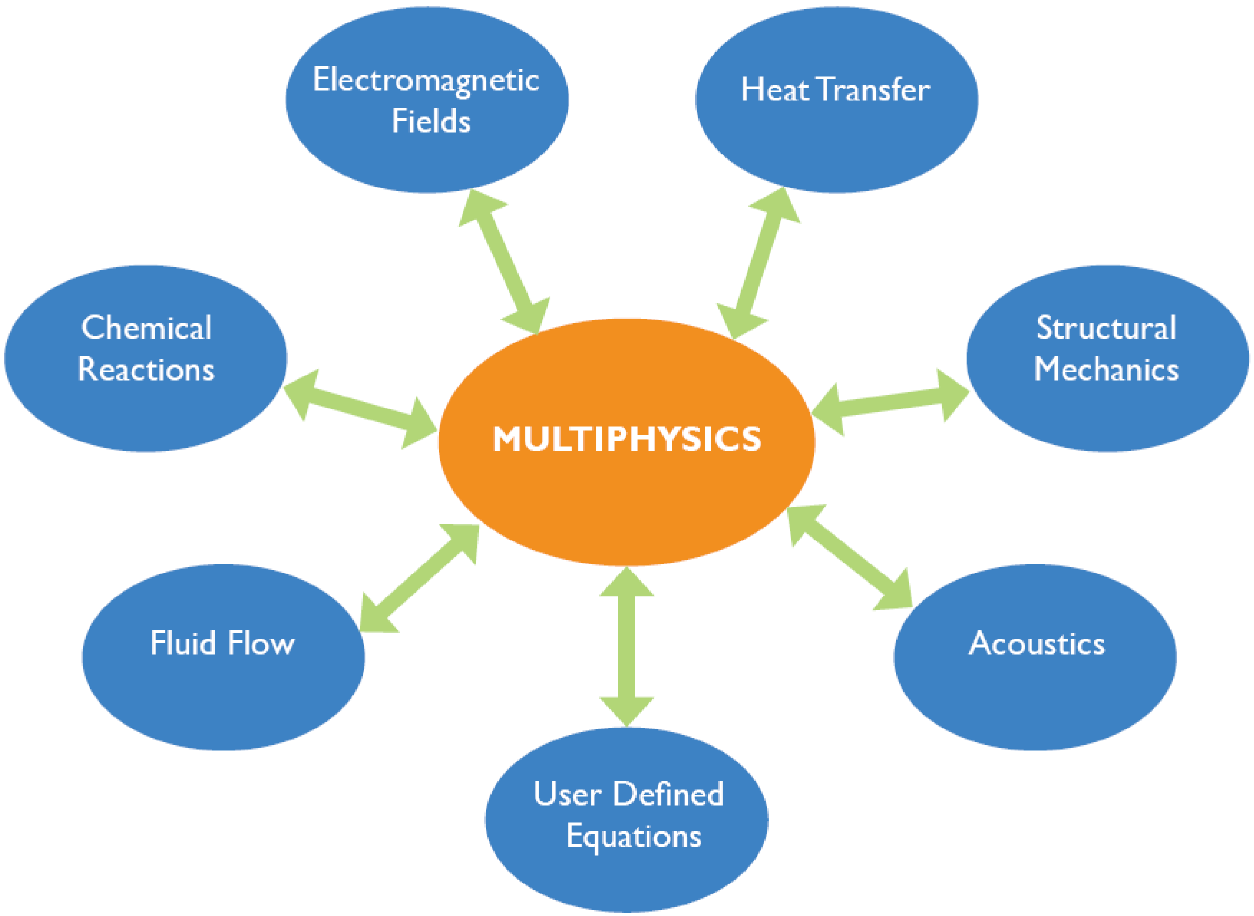
COMSOL Multiphysics

- Strumento software per la soluzione di problemi 1D,2D e 3D descritti da modelli di Equazioni a Derivate Parziali + condizioni al bordo/iniziali.

- Per la discretizzazione del problema si adotta il metodo agli Elementi Finiti (FEM)

- Il sw può essere utilizzato sia in modalità interattiva sia sia mediante script COMSOL/MATLAB.
- Tramite l'ambiente grafico è possibile utilizzare i numerosi modelli predisposti per i principali campi di applicazione.

L’approccio COMSOL alla multifisica

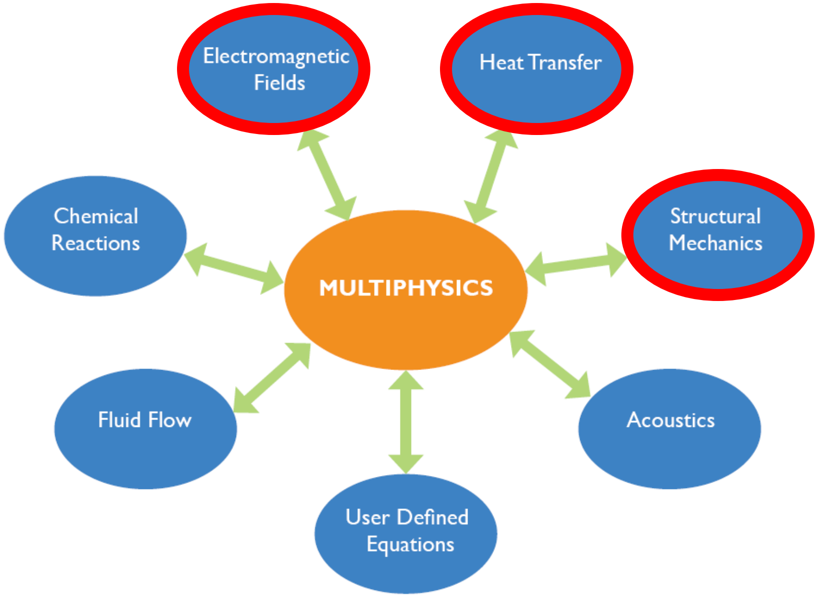


Nessun limite all’accoppiamento tra le fisiche:

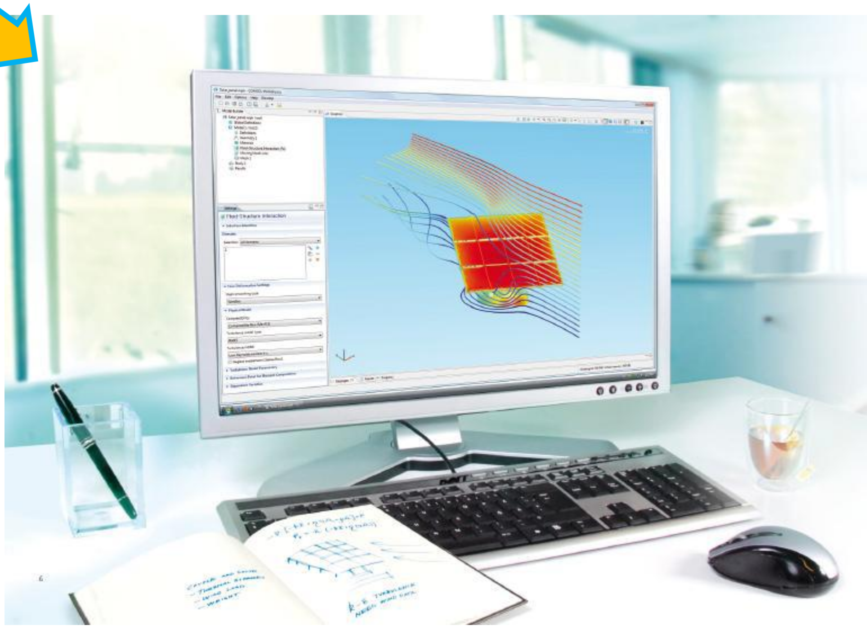
Interazione, Flessibilità, Sinergia e Apertura

Analisi Multifisiche

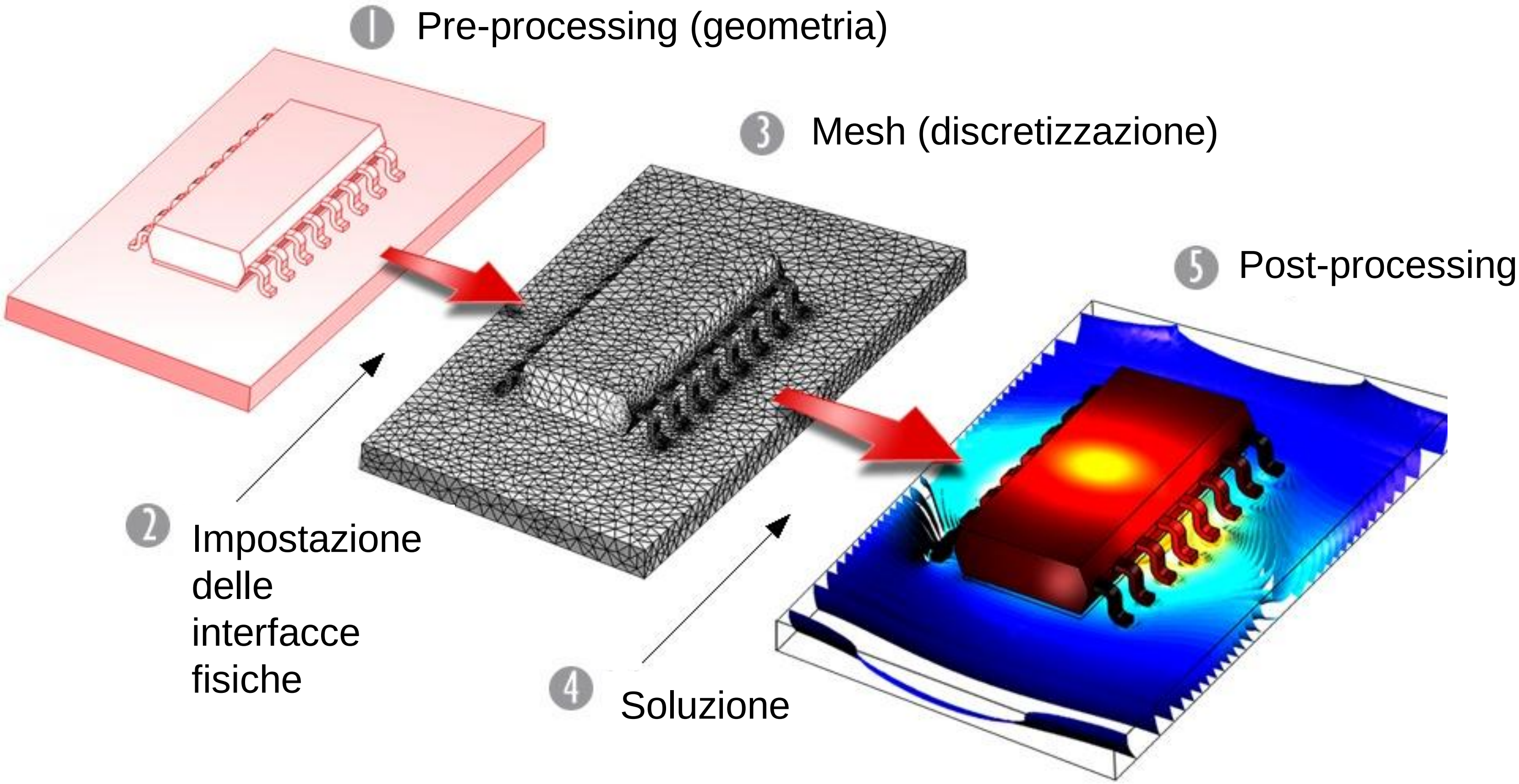
Il mondo reale è multifisico



La modellazione in COMSOL è multifisica!

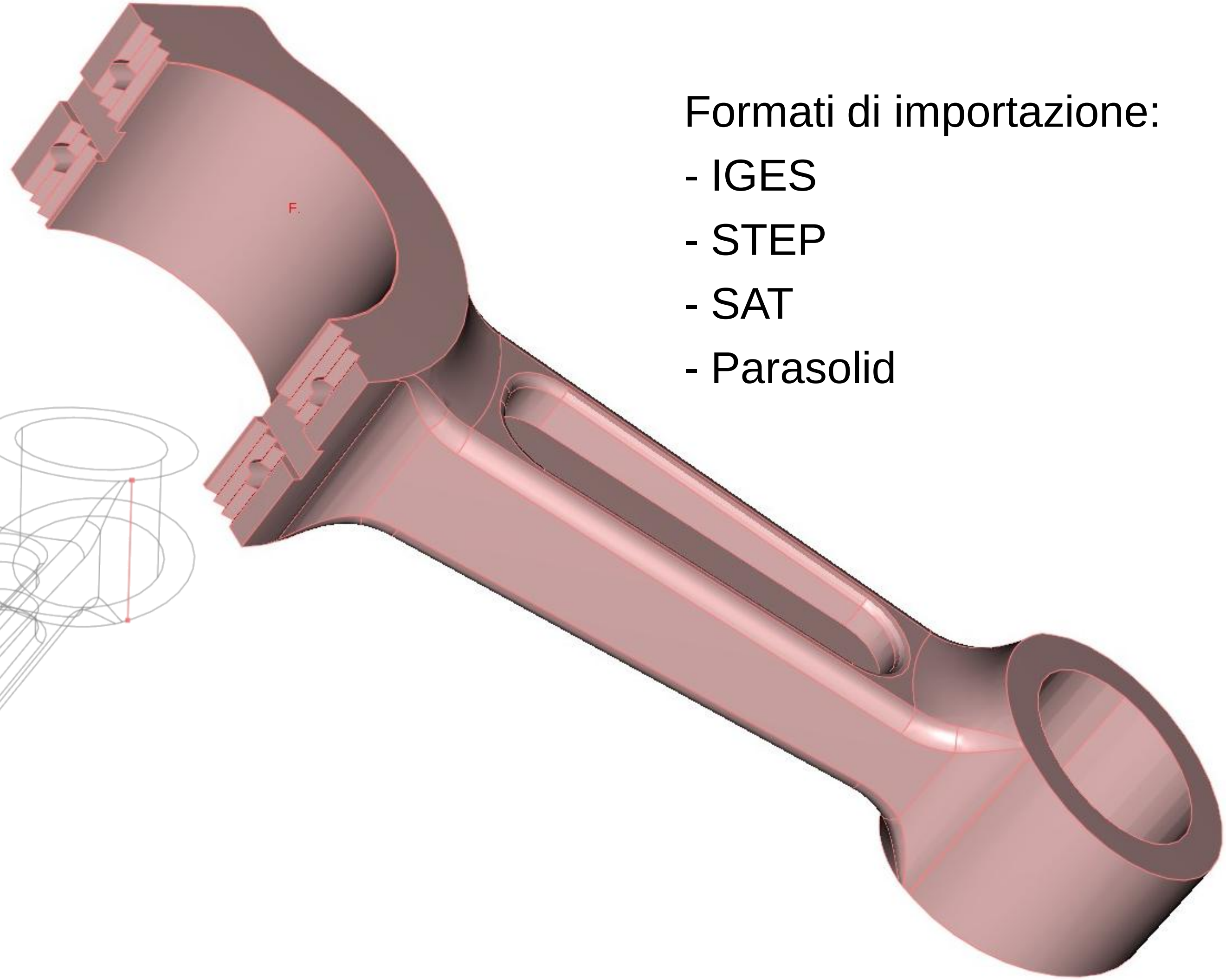


Il Processo di Modellazione & Simulazione



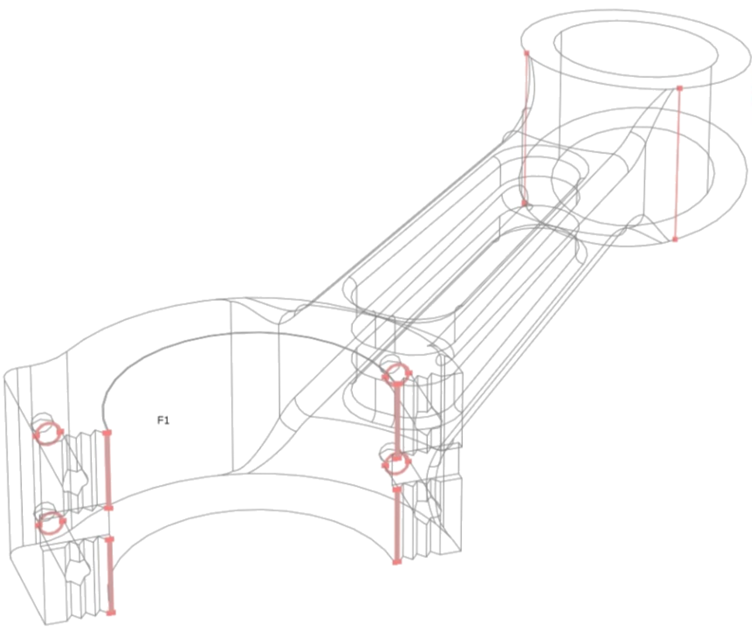
COMSOL

Geometria



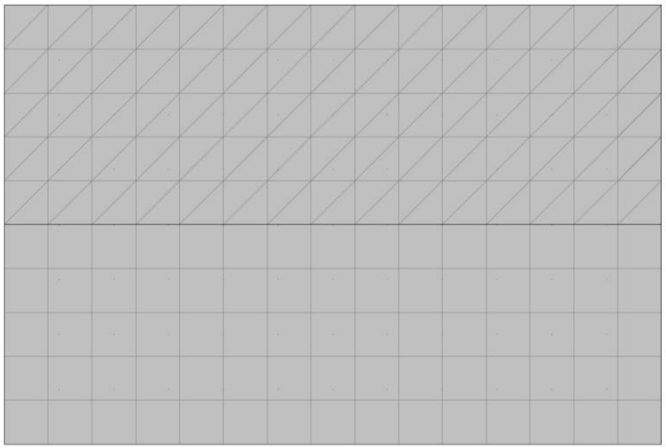
Formati di importazione:

- IGES
- STEP
- SAT
- Parasolid

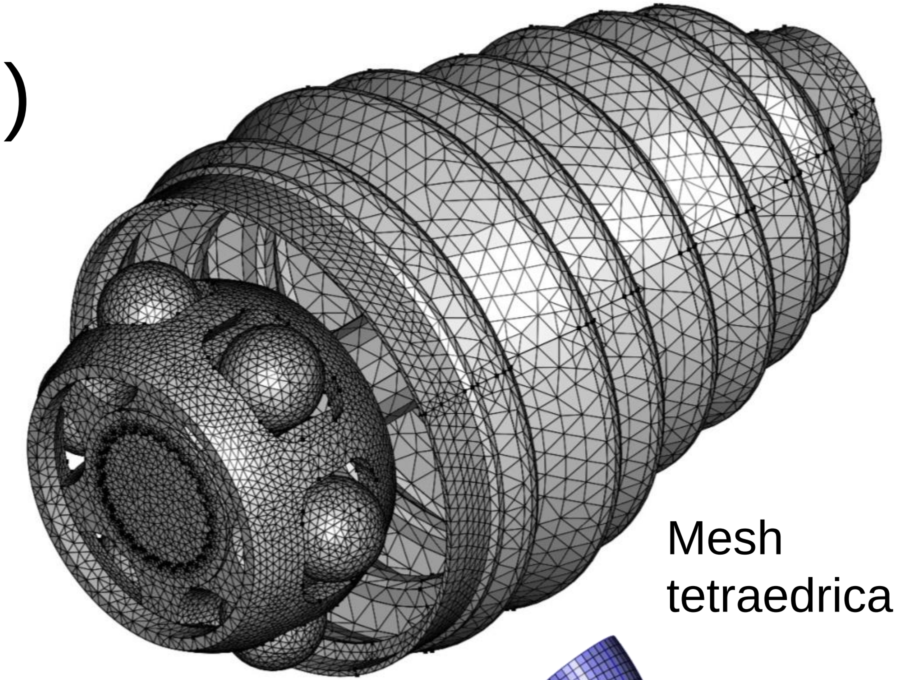


Riparazione e semplificazione dei dettagli della geometria

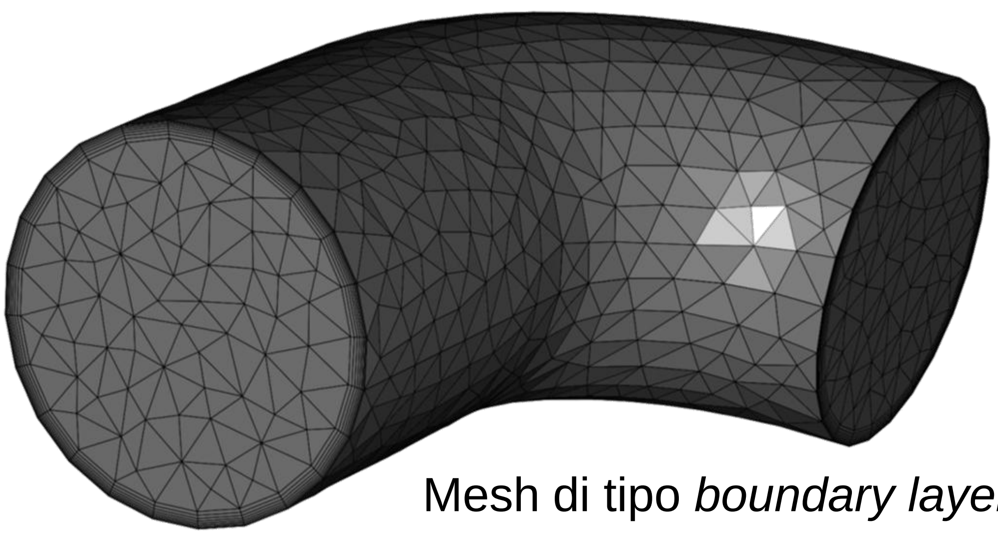
Mesh (discretizzazione)



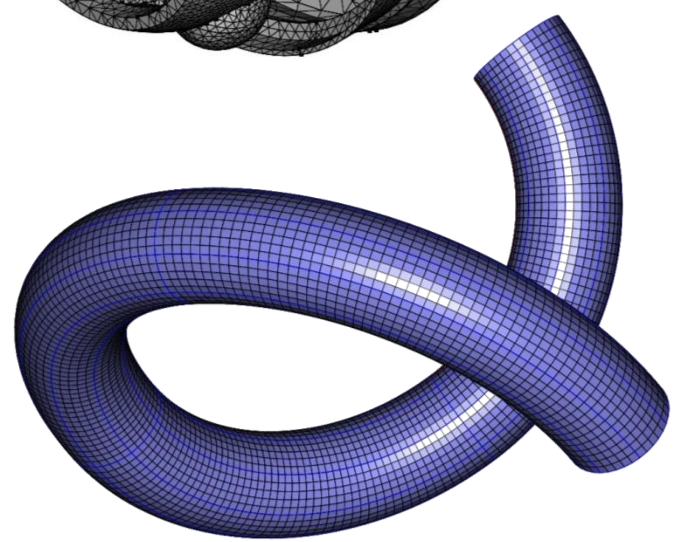
Mesh mappata



Mesh tetraedrica



Mesh di tipo *boundary layer*



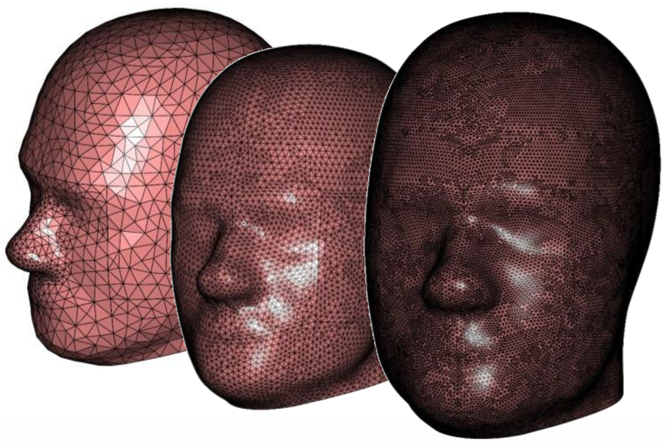
Mesh di tipo *swept*

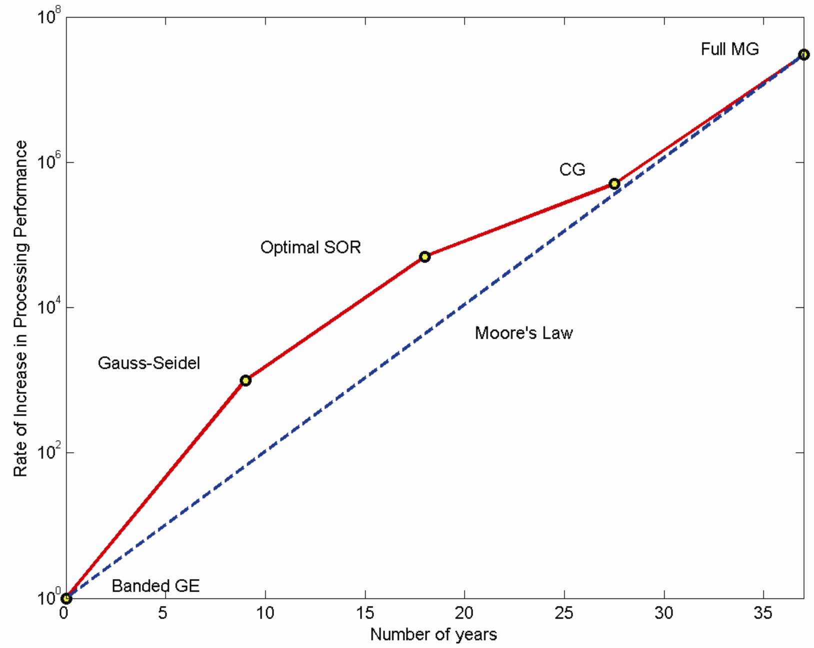
Soluzione

- Solutori:
  - diretti
  - Iterativi

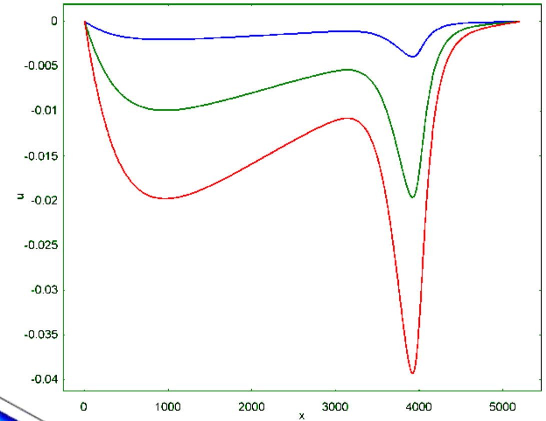
- Tipo di soluzione:
  - stazionaria
  - transitoria
  - agli autovalori
  - parametrica
  - adattativa
  - di sensitività
  - di ottimizzazione

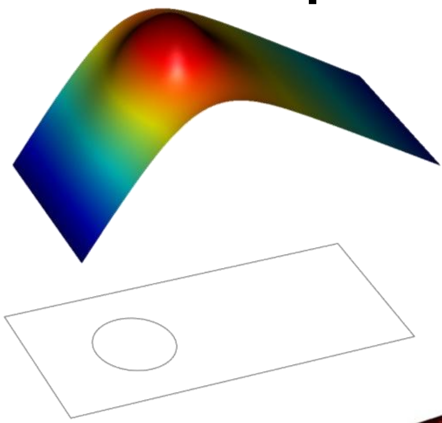
- Calcolo parallelo su:
  - macchine a memoria condivisa
  - su sistemi a memoria distribuita (cluster)

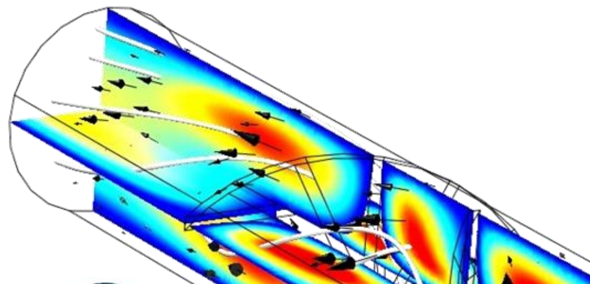


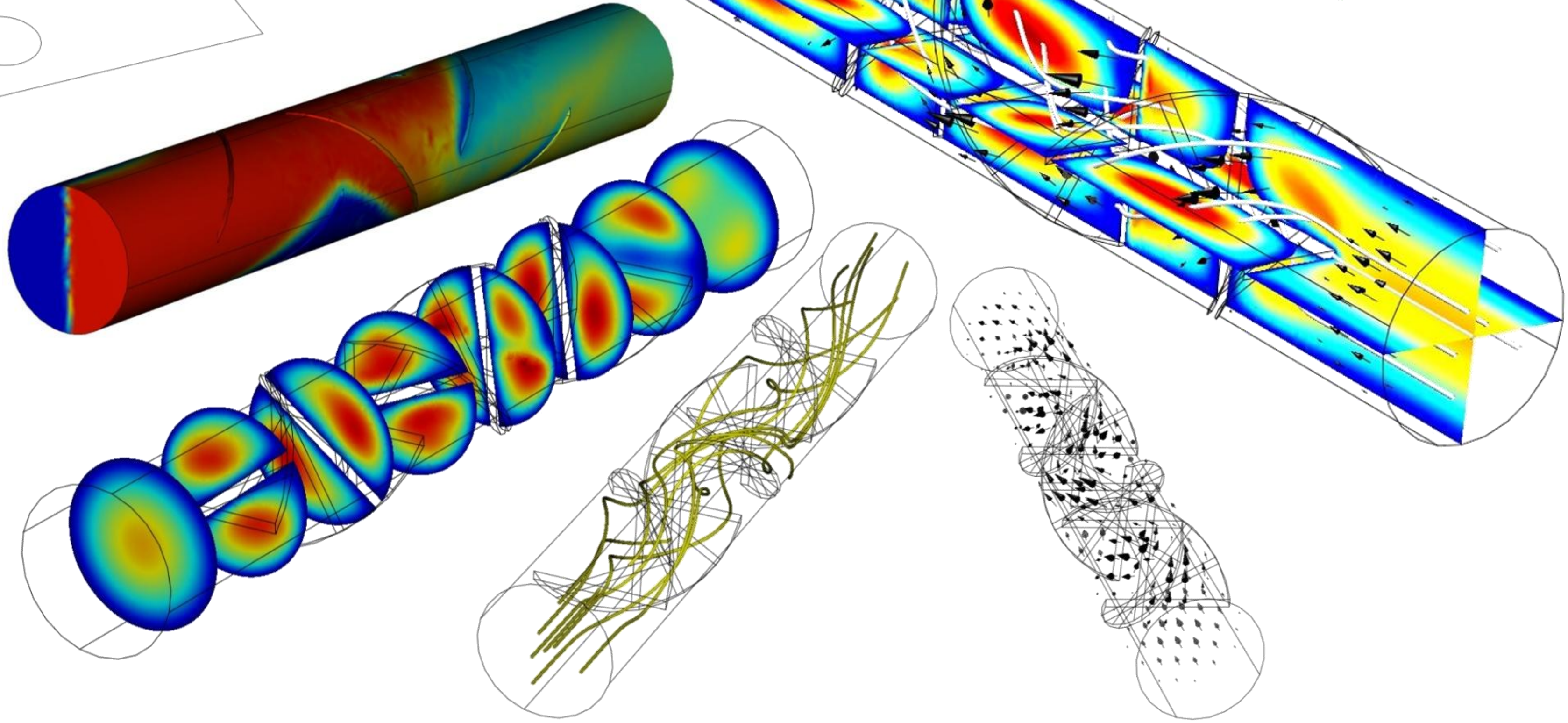


Post-processing



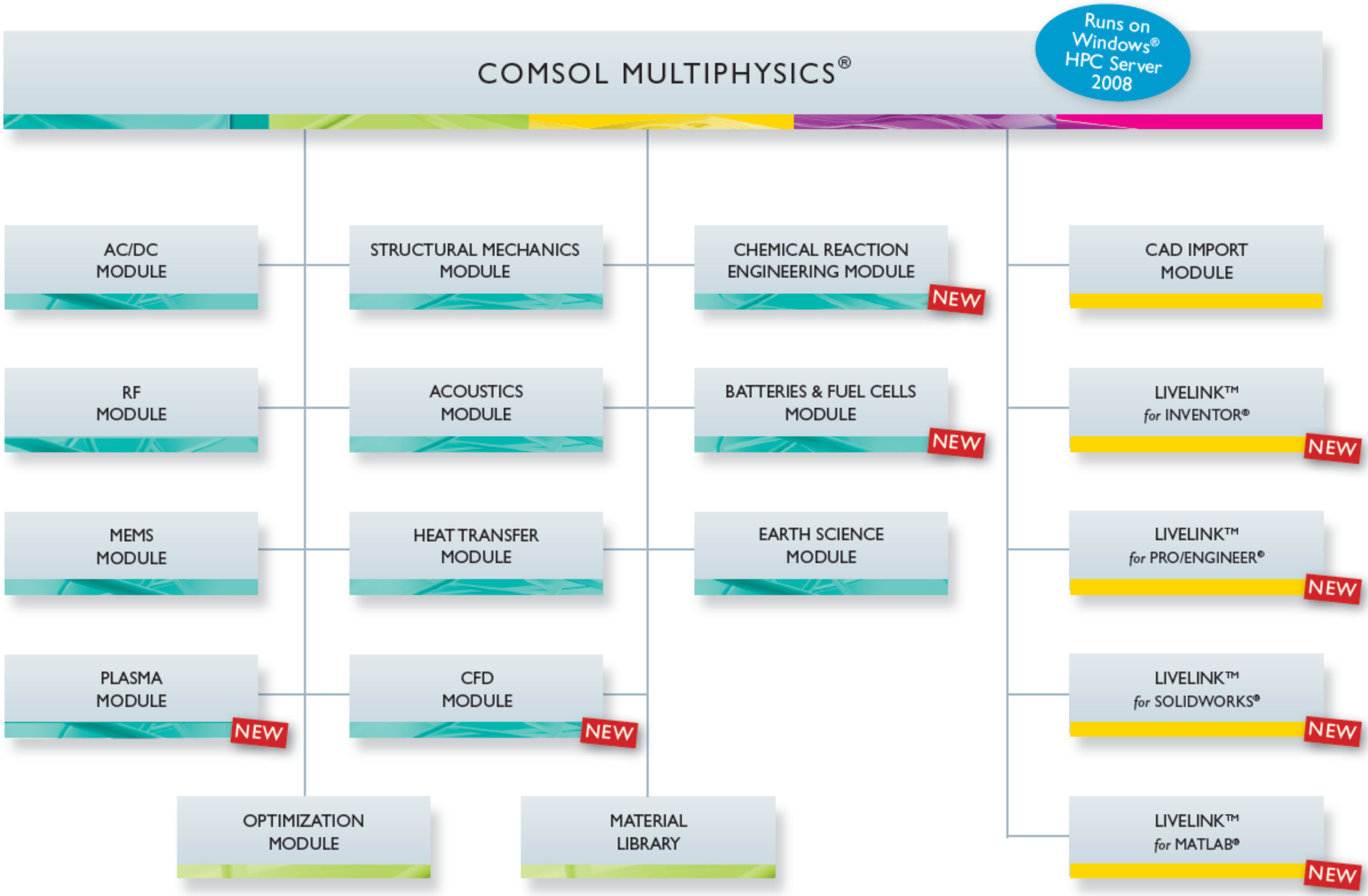






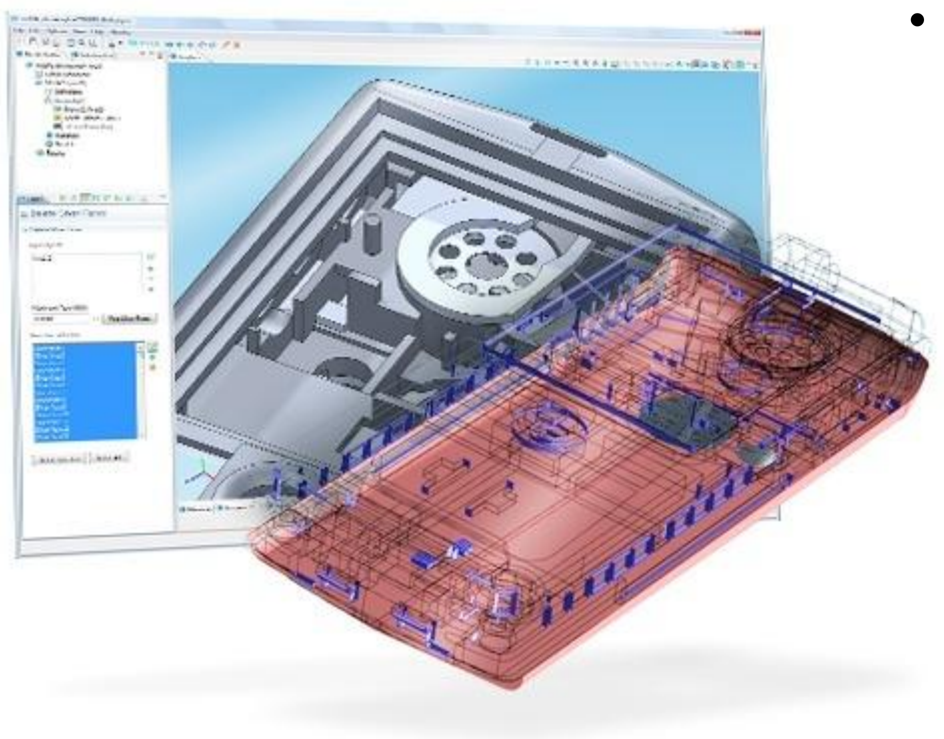
COMSOL

Prodotti COMSOL – Versione 4



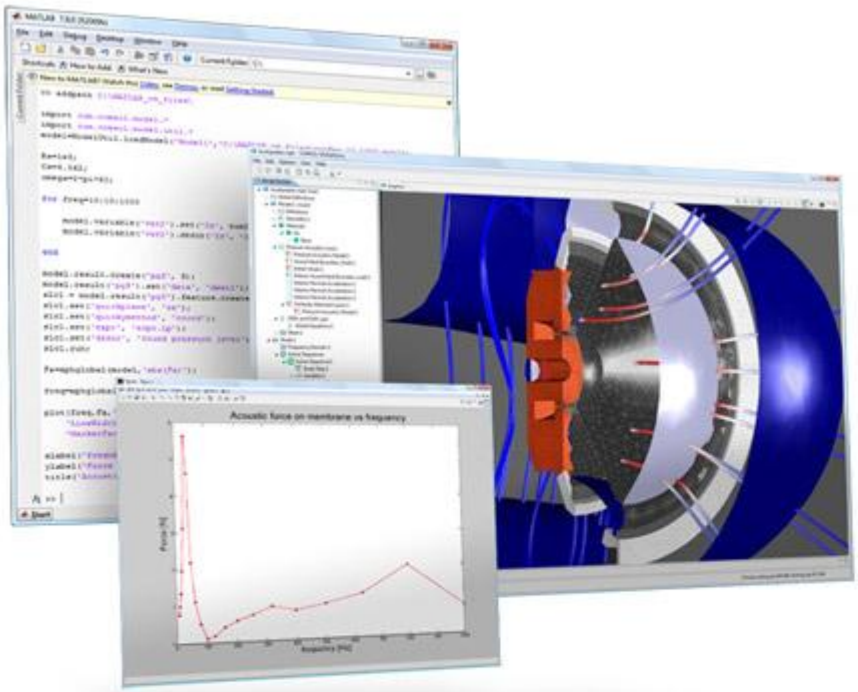
COMSOL

CAD Import Module



- Brings in all major CAD formats directly into the COMSOL Desktop:
  - ACIS® (.sat, .sab)
  - Parasolid® (.x_t, .x_b, .xmt_bin)
  - STEP (.step)
  - IGES (.igs)

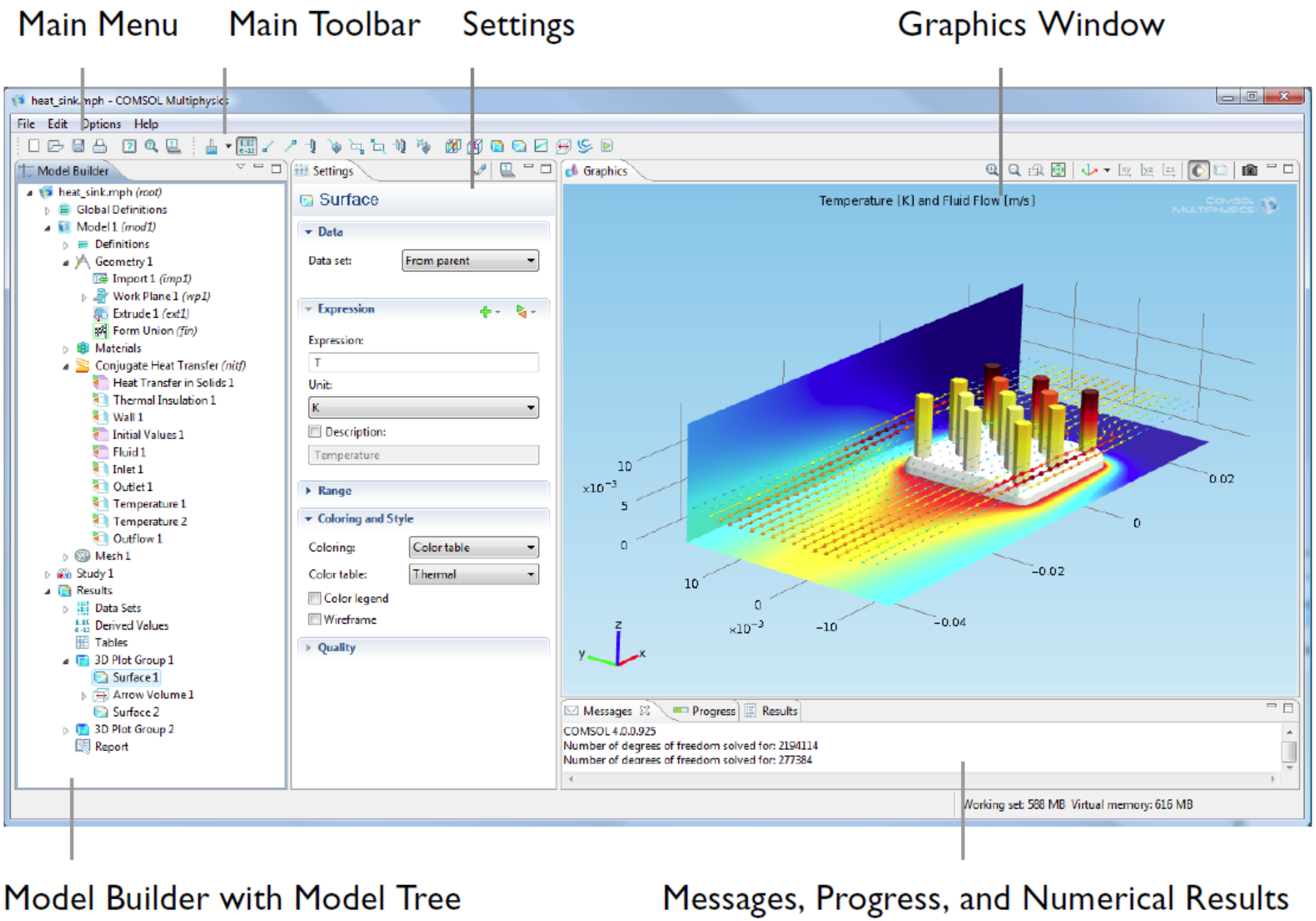
LiveLink™ for MATLAB®



- Enables scripting.
- Save your COMSOL files as MATLAB M-files.
- Manipulate the M-file and call your own functions.
- Interface COMSOL Multiphysics simulations to computations performed in other simulators.

File Format	Read	Write
MATLAB®: Model M-File (.m)	Yes	Yes
MATLAB®: Function (.m)	Yes	No

COMSOL Multiphysics V4: COMSOL Desktop



New è usato per definire un nuovo problema.

Model Library è usato per esplorare problemi già risolti in COMSOL.

Come risolvere un modello PDE con COMSOL

1. **Definizione del problema (classe di equazioni e dim. dominio)**
2. **Definire la geometria 2D/3D del dominio (GEOMETRY)**
3. **Definire le condizioni al contorno/iniziali (PDE)**
4. **Definire il modello o i coefficienti della PDE (PDE)**

   specificare i coefficienti della PDE. E' possibile specificare una diversa PDE per ogni sottodomio, rendendo in questo modo possibile specificare per esempio differenti proprietà del materiale in un modello PDE; questa modalità permette inoltre l'inserimento di condizioni iniziali per un problema time-dependent.
5. **Discretizzazione del dominio (MESH)**
6. **Risolvere la PDE (STUDY)**
7. **Visualizzare la soluzione ed altre proprietà fisiche calcolate dalla soluzione (RESULTS)**

   possibilità di visualizzazione diversi grafici, mesh, contorni, superfici e , per problemi parabolici ed iperbolici, le relative animazioni della soluzione che cambia nel tempo.

Una sessione di lavoro : START

- Finestra di dialogo usata per definire i parametri di una sessione di lavoro COMSOL **(PDE)**

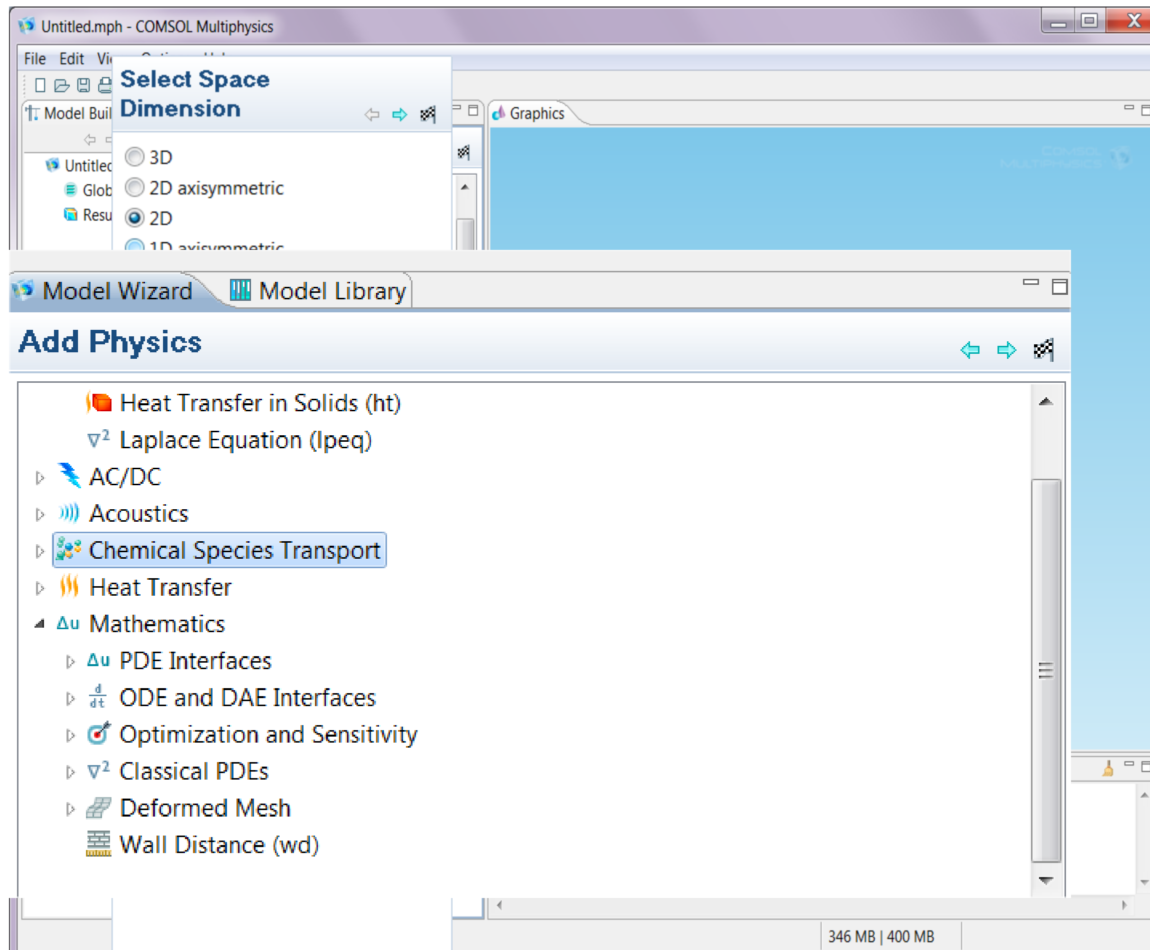
1) Definizione del problema:

-Dimensione

-Add physics

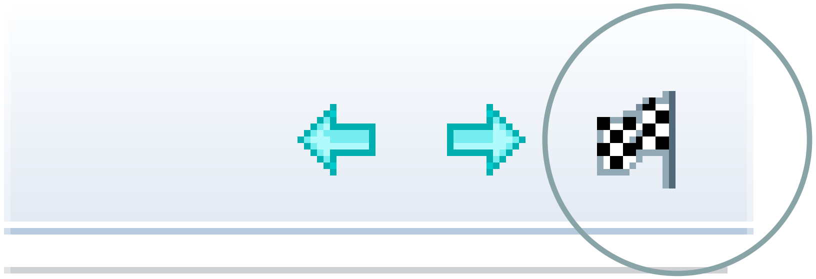
Mathematics/

PDE interface



- Ogni sessione di lavoro (elaborazione di un modello) propone la sequenza delle modalita’ in successione (GEOMETRIA, PROBLEMA; CONDIZIONI AL CONTORNO,..)
- Si passa da una modalita’ all’altra tramite frecce

- Alla fine dell’inserimento dei dati sul modello PDE da analizzare click sull’icona bandiera



PDE Modes

Modelli di PDE possono essere dati nelle seguenti 3 forme:

1) forma dei coefficienti,
2) forma generale,
3) forma debole

PDE Modes: Forma dei Coefficienti

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c\nabla u + \alpha u - \gamma) + \beta \cdot \nabla u + au = f \qquad in\,\Omega$$

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{n} \cdot (c\nabla u + \alpha u - \gamma) + qu = g - h^T \mu \\ hu = r \end{array}\right\} \quad in\,\partial\Omega$$

boundary

Dominio di interesse Ω , la prima equazione è la PDE, la seconda e la terza rappresentano le condizioni di Neumann (o miste) e Dirichlet rispettivamente sul contorno.

h,c,r,q,g,f sono vettori e matrici nel caso di sistemi di PDE.

PDE Modes: Forma dei Coefficienti

- PDE stazionaria (Steady-State Equation)

$$\cancel{e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t}} - \nabla \cdot (c\nabla u + \alpha u - \gamma) + \beta \cdot \nabla u + au = f \qquad in\,\Omega$$

Esempio: Equazione di Poisson

$$-\nabla \cdot \nabla u = 1 \quad in\,\Omega \quad u = 0 \quad in\,\partial\Omega$$

Implica c=f=h=1 e tutti gli altri coefficienti sono 0.

- PDE che dipende dal tempo

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c\nabla u + \alpha u - \gamma) + \beta \cdot \nabla u + au = f \qquad in\,\Omega$$

- **Equazioni ellittiche:** $$-\nabla\cdot(c\nabla u)+au=f \quad in \quad \Omega$$
  non lineari
  $$-\nabla\cdot(c(u)\nabla u)+a(u)u=f(u) \quad in \quad \Omega$$
- **Equazioni paraboliche** $$d\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla\cdot(c\nabla u)+au=f \quad in \quad \Omega$$
- **Equazioni iperboliche** $$d\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\nabla\cdot(c\nabla u)+au=f \quad in \quad \Omega$$
- **Problema agli autovalori** $$-\nabla\cdot(c\nabla u)+au=\lambda du \quad in \quad \Omega$$
  Si possono anche gestire sistemi di dimensioni arbitrarie, esempio sistema di dimensione 2:

$$-\nabla\cdot(c_{11}\nabla u_1)-\nabla\cdot(c_{12}\nabla u_2)+a_{11}u_1+a_{12}u_2=f_1 \quad in \quad \Omega$$
$$-\nabla\cdot(c_{21}\nabla u_1)-\nabla\cdot(c_{22}\nabla u_2)+a_{21}u_1+a_{22}u_2=f_2 \quad in \quad \Omega$$

- **Condizioni al contorno per funzioni incognite scalari u**
  Dirichlet e Neumann e miste:h,c,u,r,q,g saranno vettori e matrici nel caso di un sistema di 2 equazioni

COMSOL

Forma dei Coefficienti: Interpretazione

diffusion

source

absorption

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u + \alpha u - \gamma) + \beta \cdot \nabla u + a u = f$$

convection

convection

source

mass

damped mass

PDE Modes: Forma Generale
Una formulazione più compatta

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma = F \quad in\, \Omega$$

$$\left.\begin{aligned} -\mathbf{n} \cdot \Gamma &= G + \left(\frac{\partial R}{\partial u} \right)^T \mu \\ 0 &= R \end{aligned}\right\} \quad in\, \partial\Omega$$

boundary

Equazione di Poisson espressa in forma generale:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -ux & -uy \end{bmatrix} \qquad F = 1$$

$$R = u.$$

Tutti gli altri coefficienti sono 0. (Notiamo: $\mu = -\mathbf{n} \cdot \Gamma$)

COMSOL

PDE Modes: Forma debole (Weak Form) (Stazionaria)

- Forma generale

$$\nabla \cdot \Gamma = F$$

- Moltiplicare test function v e integrare

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot \Gamma \, dA = \int_{\Omega} v F \, dA$$

- Th. Divergenza e Integrazione per parti nella parte sx

$$\int_{\partial\Omega} (v \Gamma \cdot \mathbf{n}) ds - \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \Gamma) dA = \int_{\Omega} v F \, dA$$

- Riscrivere

$$\boxed{0 = \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \Gamma + v F) dA + \int_{\partial\Omega} (-v \Gamma \cdot \mathbf{n}) ds}$$

- Subdomain, weak: **`-ux_test*ux-uy_test*uy+u_test*F`** Boundary, constr: **`u`**

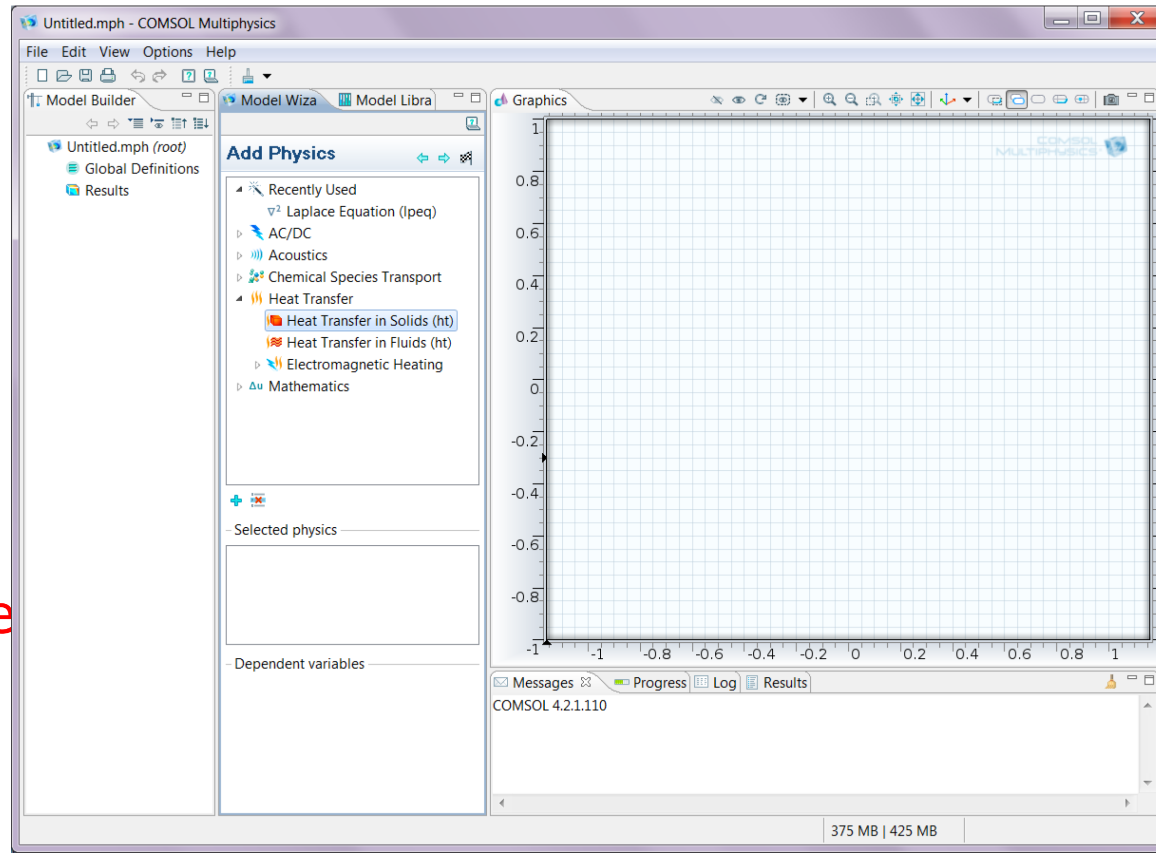
COMSOL

Esempio 1 Problema parabolico 1D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1+x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right); \quad -1 < x < 1, \;\; 0 \le t \le 0.2$$

$$u(x,0) = 100\left(1-|x|\right),$$

$$\begin{cases} u(-1,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases},$$



Select Space dimension

1D

Add Physics

(Scelta del modello):

Mathematics/PDE Interface

Coefficient Form PDE

Select study type

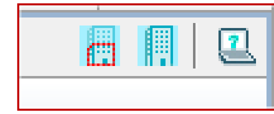
Time dependent

Esempio 1

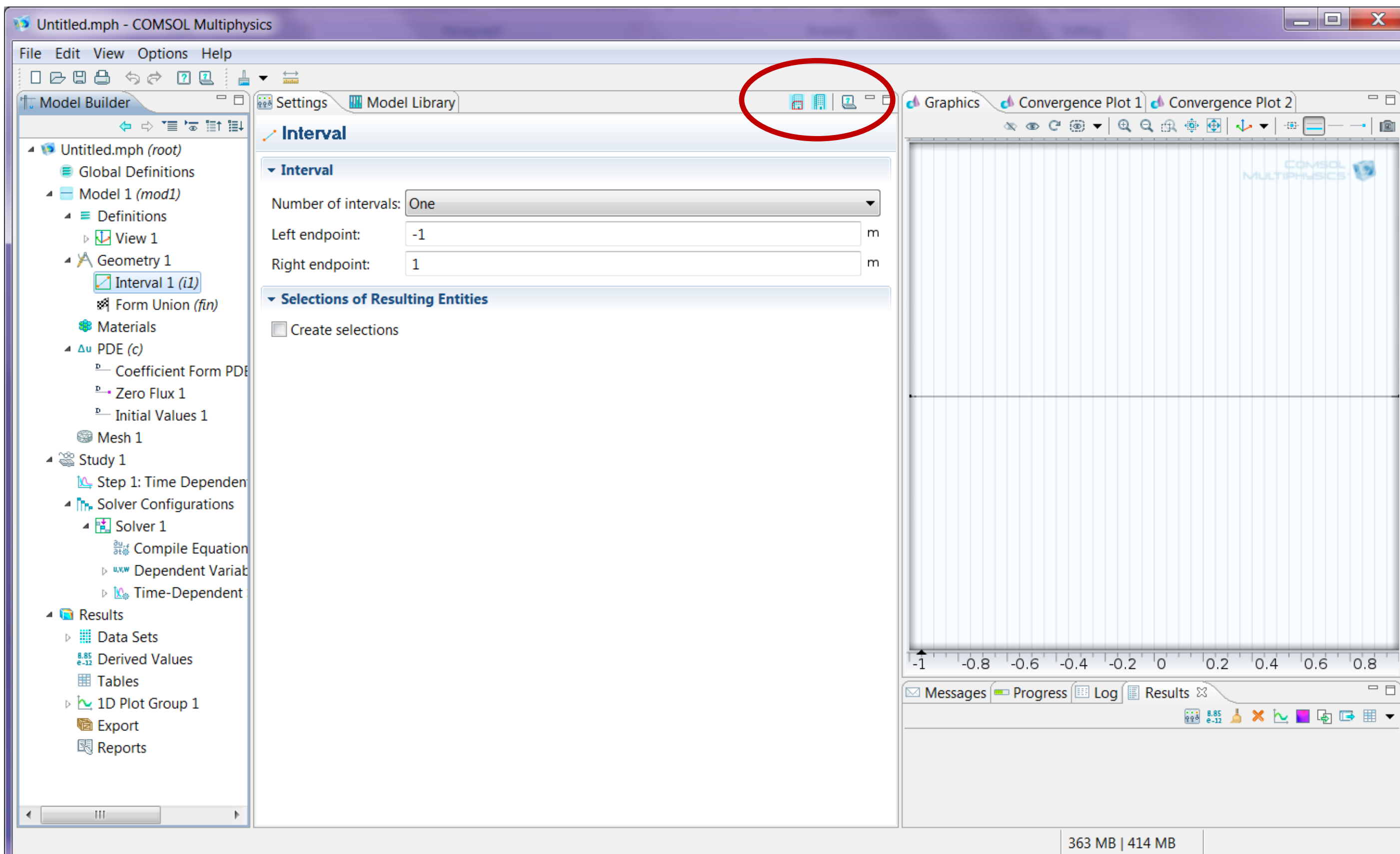
Geometry

Disegna un segmento Right-Click su **Interval/Setting**

Impostare gli estremi desiderati [-1,1] e click su build



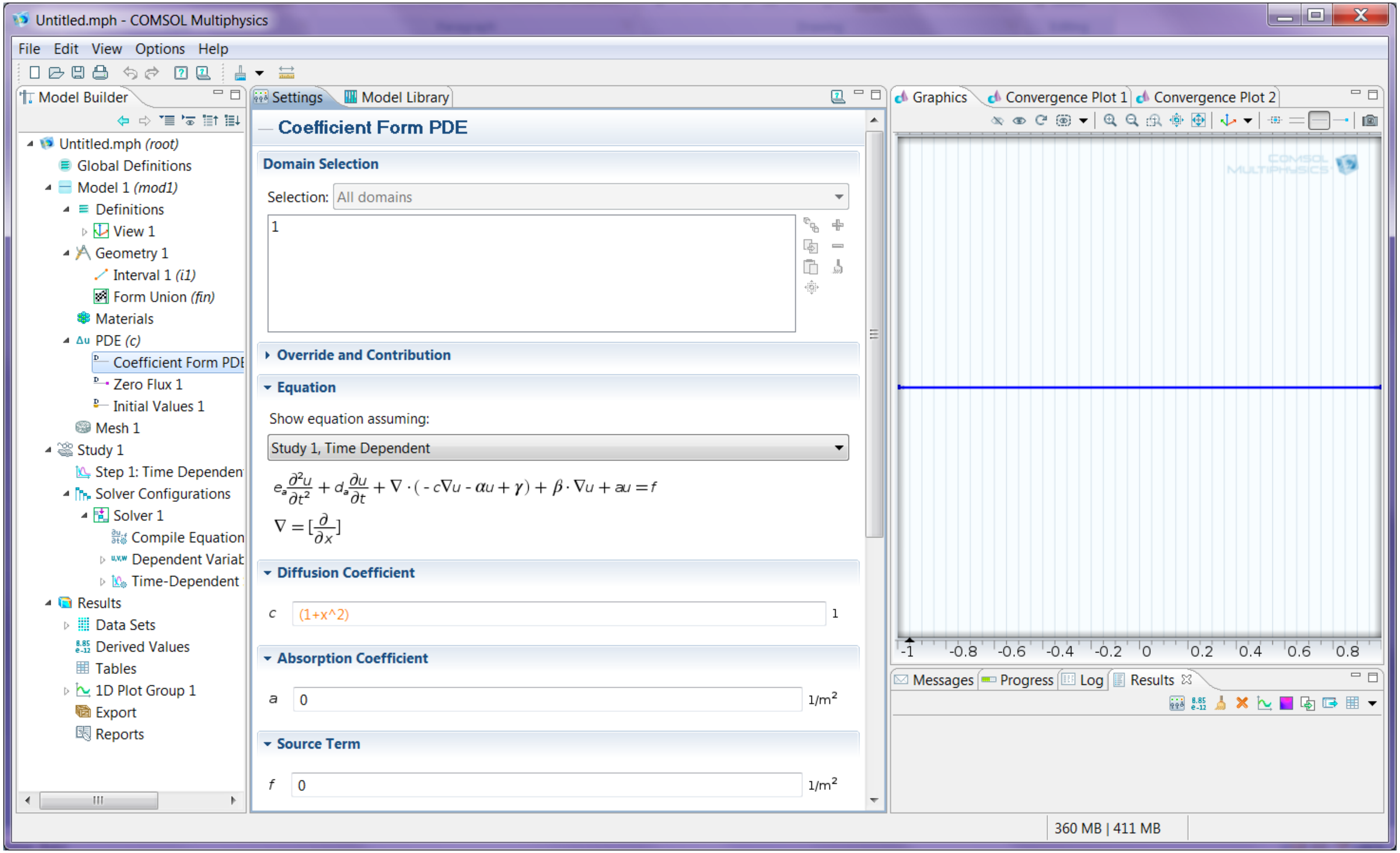
Impostare gli assi in finestra grafica **Definitions/View/Axis**



Esempio 1

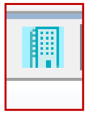
Setting Physics:

Boundary conditions, Initial conditions, Eq.Coefficients



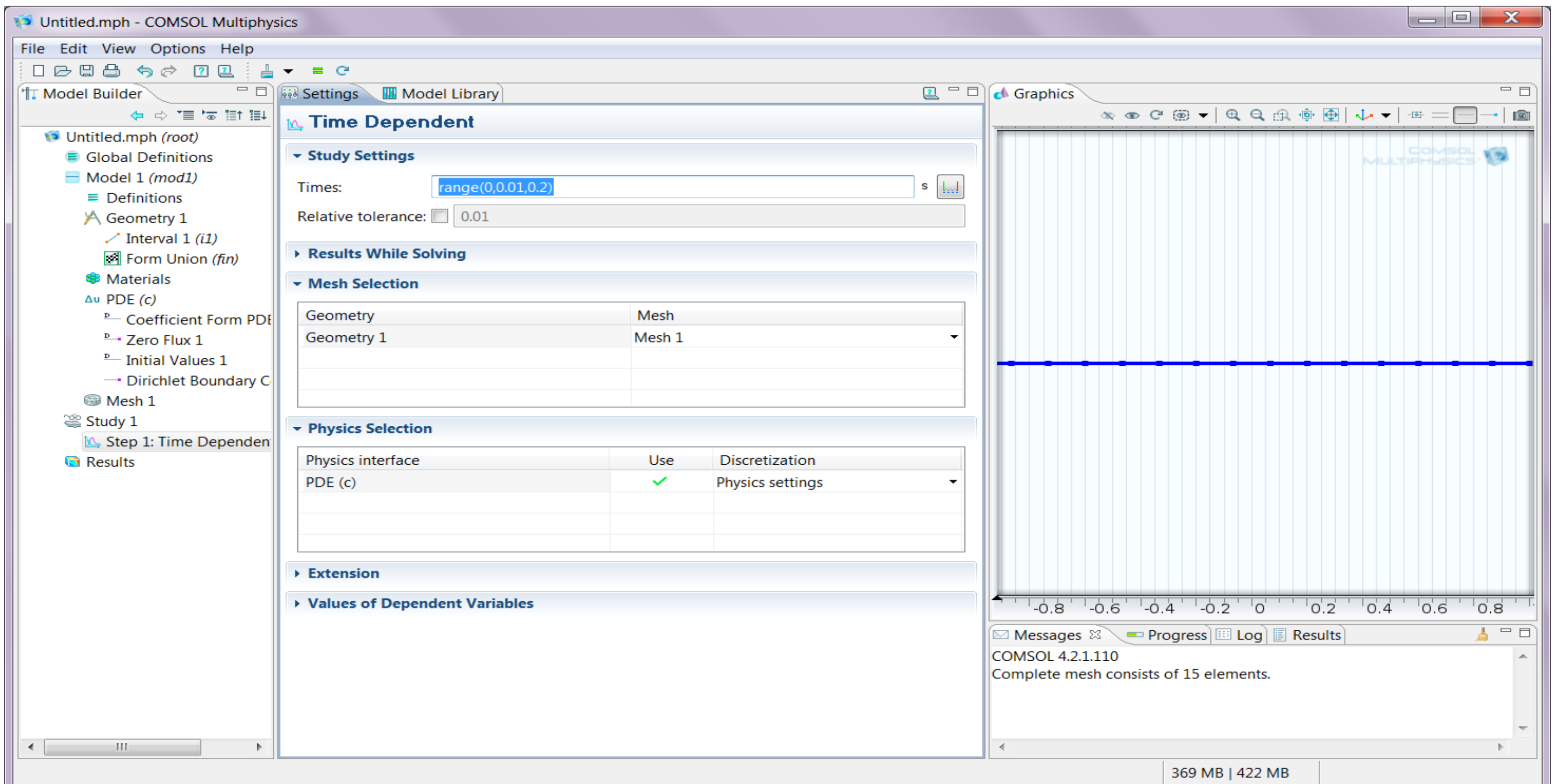
Esempio 1

Discretizzazione del dominio

- MESH / build all 

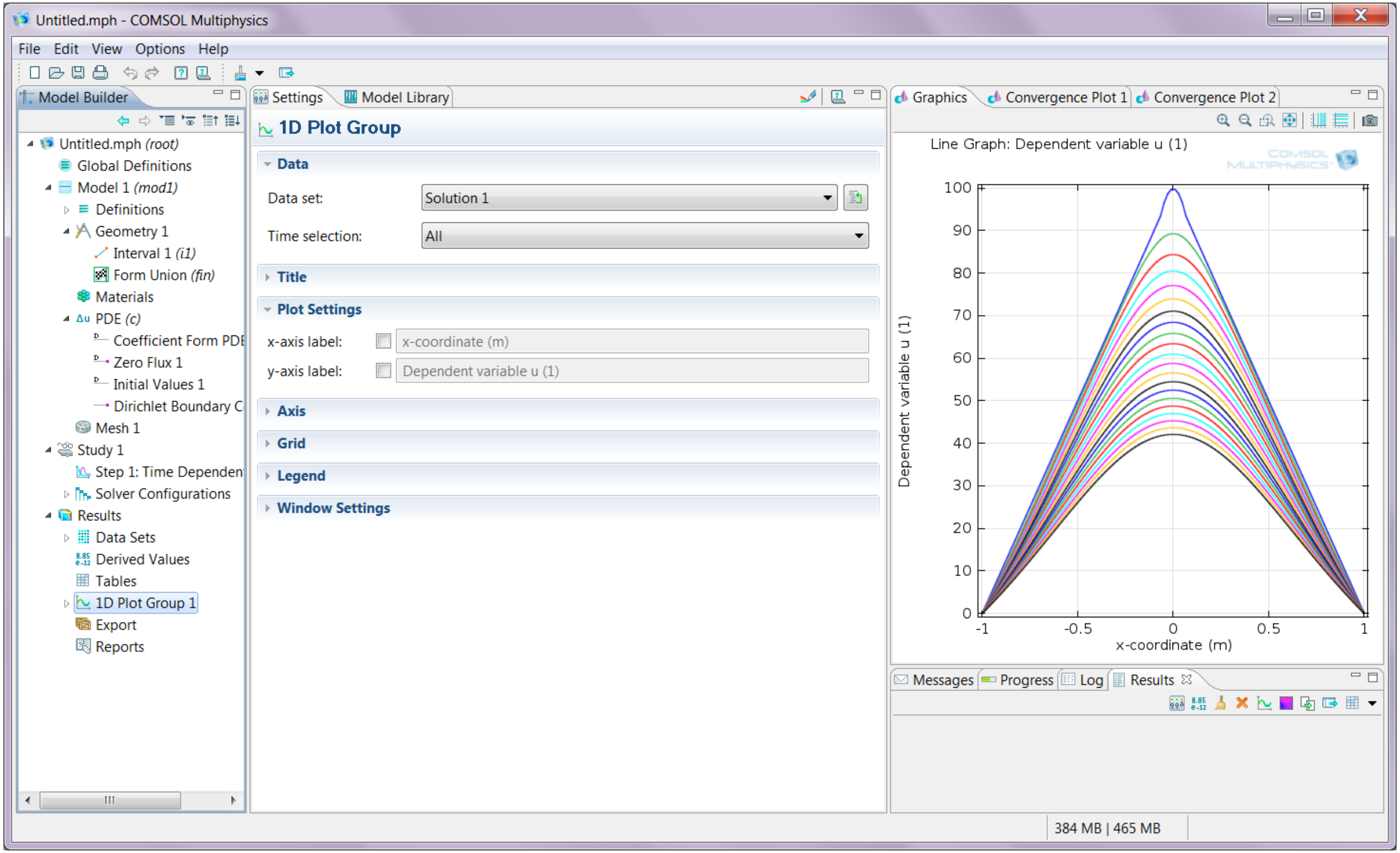
Definizione dominio temporale

- Study / Time dependent



Risolvere il modello PDE :

Study / Compute



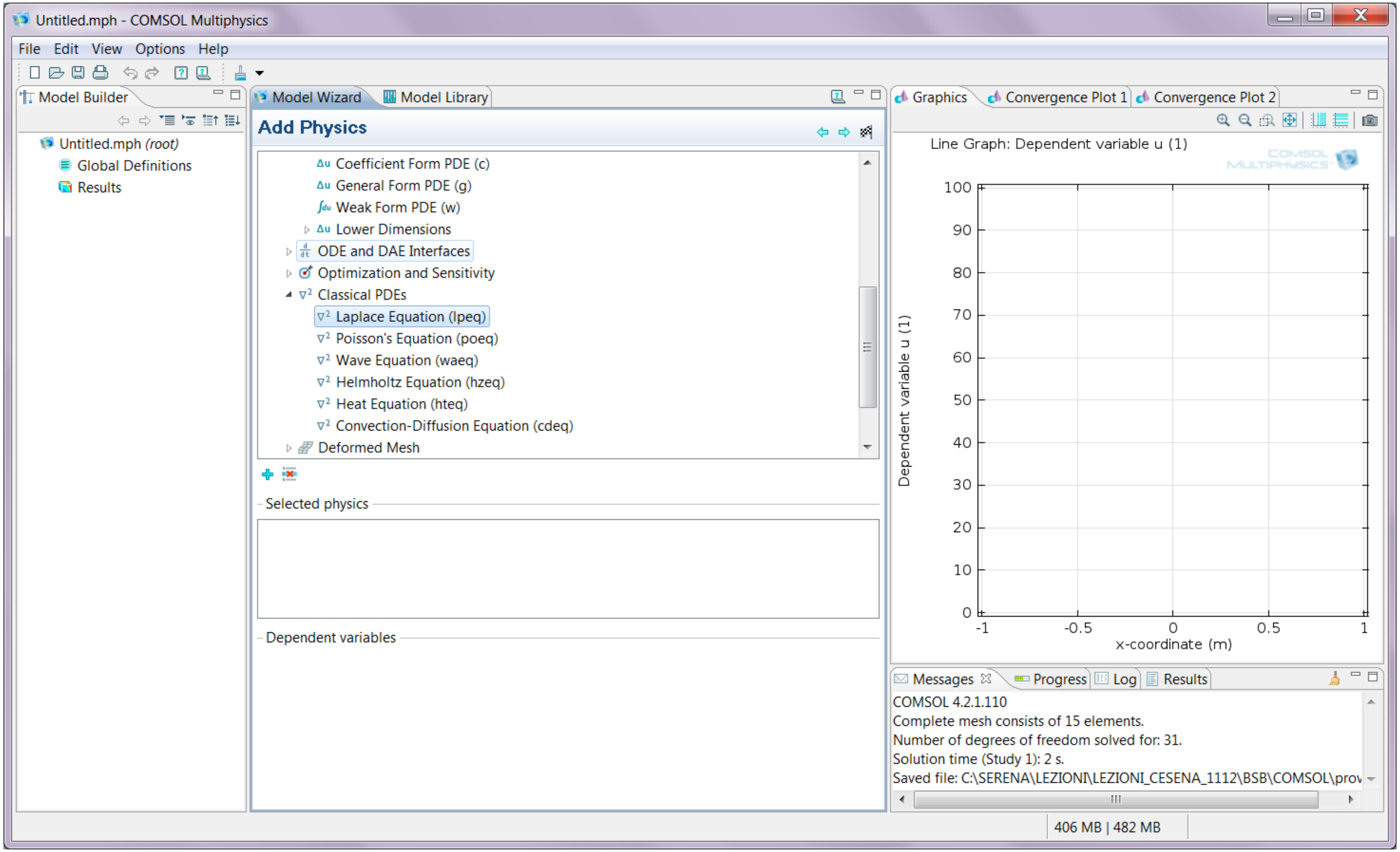
1. **Cambiare le condizioni al contorno in Neumann omogenee e risolvere nuovamente**

2. **File/Save Model as m file**

   Ex1.m

1. **Riaprire in COMSOL with MATLAB e rieseguire rilanciandolo da command window**

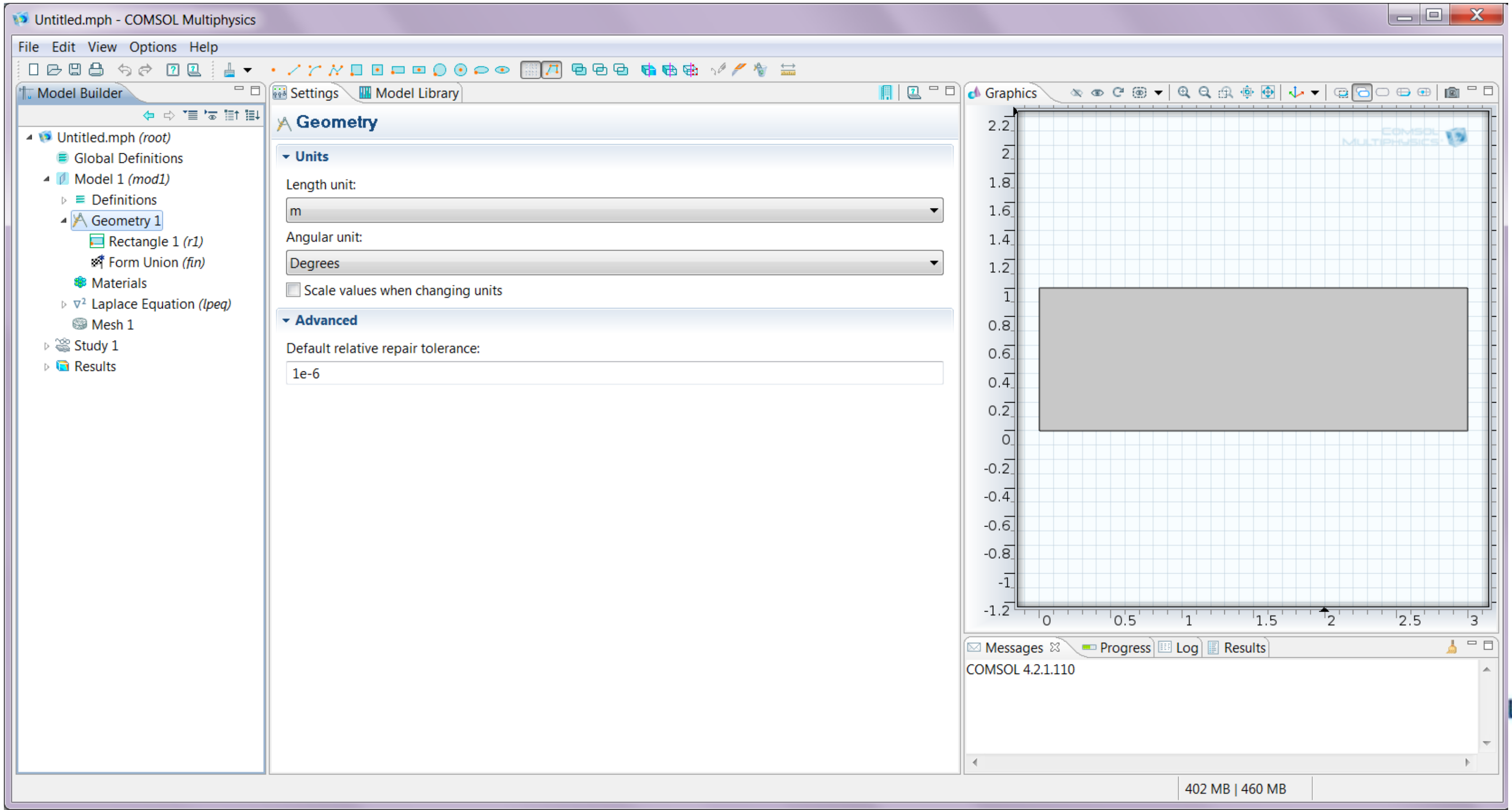
Esempio 2 Equazione di Laplace in 2D



Geometry

Dominio: rettangolo (x,y) = [0, 3] X [0, 1]

Click mouse destro su Geometry/**Rectangle/Settings**
La regione apparirà marcata grigia.



Setting Physics

Right-Click su Laplace Equation/Dirichlet boundary conditions

u =+1 lungo i lati orizzontali

u =-1 lungo quelli verticali.

Boundary selection

+ per aggiungere i lati selezionati nella finestra boundary selection

shift +click mouse dx per selezione multipla dei lati

Boundary conditions

Inserire un valore per la variabile dipendente sul contorno. Attivare **Dirichlet Boundary conditions** e selezionare la corrispondente check box (**Prescribed value for u**) Poi inserire il valore o espressione.

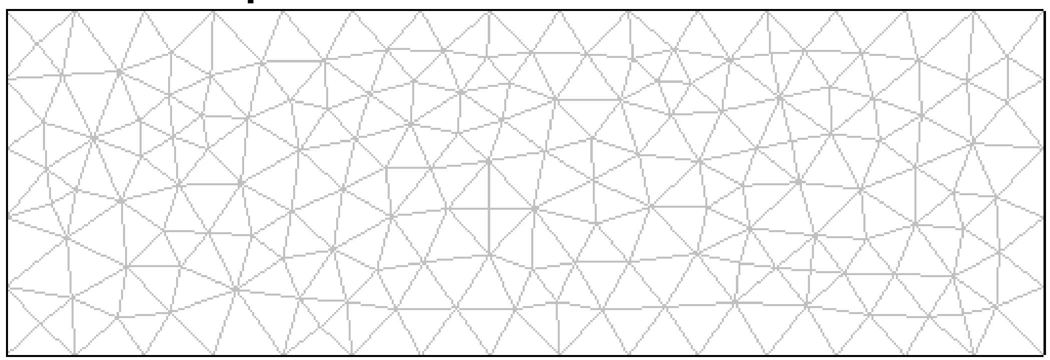
Inserire differenti DBC per differenti valori

Nulla da fare invece per i coefficienti della PDE poichè l’equazione è già impostata inizialmente in questo esempio

Generare la Mesh

Generare la mesh: nel menu Mesh selezionare

Built all. Useremo questa volta la mesh di default.



Compute: Risolvere la PDE:

Nel menu **Study**, right click **Compute**.

Results: Postprocessing dei risultati:

Generare altri plots: esplorare i differenti tipi di visualizzazione 2D e 3D. (es. Surface, **Contour**; per un grafico 3D cliccare l'icona **Height Expression**).

– Per migliorare l'accuratezza del plot, ritornare al menu **Mesh** /**Size** **/Extra Fine;** poi nuovamente **Study/Compute**; e si può chiaramente ripetere il raffinamento.

- Risolviamo ora un problema simile sullo stesso rettangolo ma con differenti condizioni al contorno.
- Modificare le boundary conditions (coefficiente r).

Lati verticali: *u=4*sin(pi*y)^2.*

Lati orizzontali: in basso *u=-0.05*x^4*(3 - x)^2;*

in alto *u=-0.05*x^2*(3 - x)^4.*

Poi risolvere e visualizzare avendo ora fissato i parametri di plot a contour, ed height in surface.

Salvataggio in uno script MATLAB

- E’ possible salvare il lavoro svolto in una sessione: File/Save As m file... Salvare ad esempio con il nome pdeintro.m

- Poi si può uscire da COMSOL, e riprendere in un secondo momento digitando pdeintro nel prompt di Comsol with MATLAB

- Per creare una nuova sessione di lavoro e quindi un nuovo esempio selezionare File/New

Esercizio 1
Equazione di Poisson 2D, forma coefficienti

$$\boxed{-\nabla\cdot(c\nabla u) = f \qquad in\,\Omega}$$

- Inserire l'equazione a partire dalla forma coefficienti dando opportuni coefficienti. **File/New** nella finestra **Model Builder** selezionare quindi **Mathematics/PDE/ Coefficient Form.**
- GEOMETRY

COMSOL utilizza il paradigma CSG (Constructive Solid Geometry) per la modellazione del dominio delle PDE. A partire quindi da semplici geometrie (cerchio, poligono, rettangolo, ellisse) alle quali vengono associati nomi unici, gli operatori +,*, e – permettono di comporre gli oggetti per ottenere il dominio dell'equazione.

Definire ora il seguente dominio formato dall'unione degli oggetti solidi meno gli oggetti delimitati da tratteggio.

Geometry: Creare il dominio spaziale

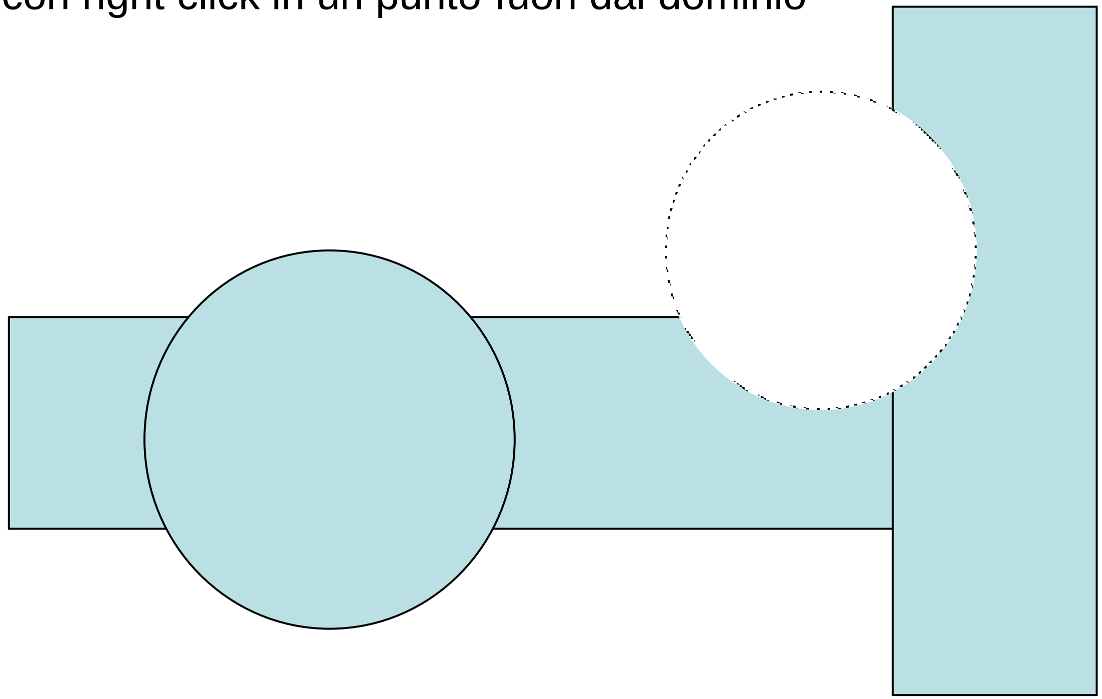
Creare prima tutti gli oggetti elementari, ognuno avra' associato un'etichetta r1,r2,c1,c2

Geometry/Boolean Operation/Compose/Set formula

- Rimuovere infine tutti i bordi dei sottodomini dalla figura risultante **deselezionando Keep internal border** nella finestra **Compose**.

Boundary Settings

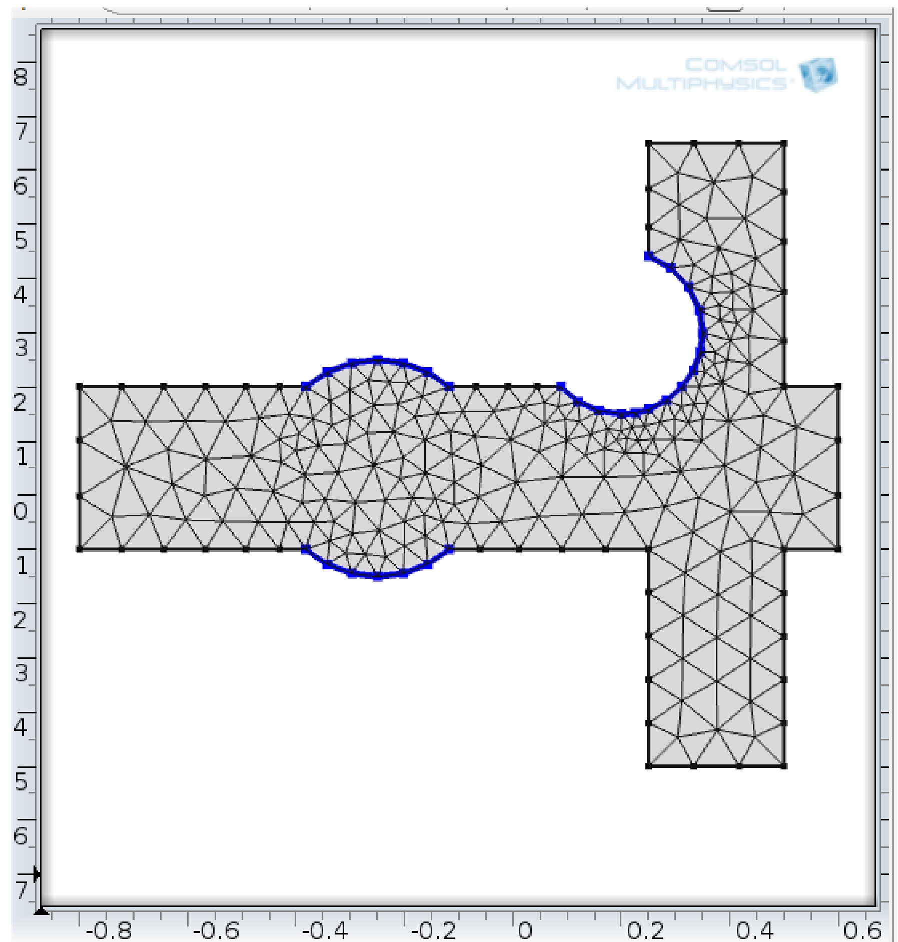
- Condizioni al contorno di Dirichlet nulle nei segmenti e Neumann solo per gli archi di cerchio (q=0). Selezione boundary da settare con left click (diventa verde) e rimozione con right click in un punto fuori dal dominio



COMSOL

PDE Coefficient form

Modificare i coefficienti della PDE da **PDE Coefficient form** (avendo prima selezionato tutto il dominio disegnato) in c=1, f=10, tutti gli altri parametri 0.



Costruzione della griglia

Mesh/ Build all

Risolvere

Study/Compute

Visualizzare la soluzione

Right click Results/Plot2D/ select a data set (solution1)

Aggiungere **Height Expression**

COMSOL

Esercizio 2

Equazione ellittica sul cerchio in forma coefficienti

$$-\Delta u + 2u = 0 \quad su \quad \Omega, \quad u = e^{x+y} \quad su \quad \partial\Omega,$$
$$\Omega \text{ cerchio di centro l'origine e raggio } 3$$

- Soluzione analitica esatta $u(x,y) = e^{x+y}$

- Risolvere e visualizzare la soluzione analitica ed approssimata
  (Surface/Expression), e l'**errore** u-exp(x+y)
commesso nella soluzione approssimata per differenti raffinamenti della mesh.

COMSOL

Esercizio 3

Problema di superficie minima equazione ellittica in forma generale

- L'area della superficie

$$\{z = u(x, y) / (x, y) \in \Omega\}$$

è data da

$$A[u] = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, d\Omega$$

- Dati i valori della funzione u nel contorno determinare u dentro il dominio omega in modo tale che l'area sia minimizzata.

- Applicata l'equazione di Eulero-Lagrange si ottiene il modello per il problema di superficie minima:

Esercizio 3

Problema di superficie minima equazione ellittica in forma generale

$$-\nabla \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \nabla u\right) = 0 \quad su \quad \Omega = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\},$$

$$u = x^2 \quad su \quad \partial\Omega,$$

- In questo caso il problema è non lineare e quindi deve essere risolto con un solutore non lineare. Attenzione: in General Form PDE, specificare Γ:

$$\Gamma = 1/sqrt(1+ux\wedge 2+uy\wedge 2)*\left[-ux \quad -uy\right]$$

- Risolvere e visualizzare la soluzione approssimata mediante l'ambiente COMSOL.

Esercizio 4

Equazione del calore (problema parabolico) in forma coefficienti

Problema della diffusione del calore all'interno di un corpo:

$$d\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad su \quad \Omega$$

$$u = 100 \quad \text{sul lato sinistro di} \quad \partial\Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -10 \quad \text{sul lato destro di} \quad \partial\Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sugli altri lati di} \quad \partial\Omega$$

- Dominio: blocco di metallo rettangolare con una cavità rettangolare nel mezzo. La temperatura iniziale del blocco di metallo sia di zero gradi al momento iniziale t0 in cui si inizia ad applicare calore.
- Studiare il comportamento del sistema nei primi 5 secondi di tempo. Selezionare **Study/Time dependent**.
- Risolvere e visualizzare la dinamica della soluzione approssimata mediante creazione di un movie .avi (visibile poi con Window Media Player) **Export/Animation.**

Esercizio 5

L'equazione delle onde (problema iperbolico) in forma coefficienti (time dependent wave extension)

$$\boxed{\frac{\partial u^2}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad su \quad \Omega}$$

- Dominio: quadrato di vertici (-1,-1),(-1,1),(1,-1), e (1,1).
- La membrana è fissata ai lati destro e sinistro (u=0), ed è invece libera ($\frac{\partial u}{\partial n} = 0$) nei lati in alto e in basso.
- Le condizioni inziali al tempo t=0, sono

$$u(0) = \arctan(\cos(\frac{\pi}{2}x)), \qquad \frac{\partial u(0)}{\partial t} = 3\sin(\pi x)e^{\sin(\frac{\pi}{2}y)}$$

- Risolvere in un intervallo temporale [0,5] sec. e visualizzare la dinamica della soluzione utilizzando l'opzione **Export/Animation.**

Esercizio 6
Un problema di Elettrostatica

in modalità Electromagnetics/Electrostatics

- Determinare il potenziale elettrostatico v in una struttura quadrata con una cavità quadrata al suo interno. Questo porta al problema di risolvere l'equazione di Laplace

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta v = 0 \quad su \quad \Omega,\\ &v = 1000 \quad su \quad \partial\Omega \ \text{ interno},\\ &v = 0 \quad su \quad \partial\Omega \ \text{ esterno},\end{aligned}}$$

- Dominio: due quadrati concentrici con lati di lunghezza 0.2 e 0.5.
- Risolvere il problema e visualizzare il potenziale elettrostatico v, il campo elettrico E e il campo di spostamento D, equazione di Maxwell:

$$\nabla D = r, D = \varepsilon E, \quad Poisson \quad -\nabla\cdot(\varepsilon\nabla v)0r$$

- Per una migliore visualizzazione delle linee di equipotenziale (esempio ogni 100 volt), selezionare un **contour plot** e porre 0:100:1000 nel campo **contour plot levels.**

COMSOL

Esercizio 7

Un problema di Diffusione (problema parabolico) in modalità Heat Transfer

- Poichè la conduzione di calore è un processo diffusivo, l'equazione generale di diffusione ha la stessa struttura dell'equazione del calore:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = Q \quad su \quad \Omega}$$

- dove T rapresenta la concentrazione, k è il coefficiente di diffusione e Q è una sorgente. Il procedimento di diffusione può essere anisotropico, in tal caso k è una matrice 2x2.
- Risolvere in T su un dominio quadrato di lato 2, con condizioni di Dirichlet (concentrazione sul boundary) specificate.
- Risolvere e visualizzare la dinamica della soluzione approssimata mediante creazione di un movie .avi con **Export/Animation.**