

Progetto6: (PDE) –

EQUAZIONE DEL TRASPORTO 2D

Descrizione del problema

Una curva su un piano può essere definita come livello di zero di una funzione implicita $\phi:(x,y) \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione $z = \phi(x,y)$ è detta funzione level set e può essere vista come una superficie che tagliando il piano in $z = 0$ definisce la curva stessa. La più semplice funzione level set è la funzione distanza con segno dalla curva. L'evoluzione di tale curva nel piano avviene in direzione del gradiente di ϕ , in quanto questo è sempre ortogonale alle curve di livello e parallelo al versore normale della curva nel piano.

Descrizione del modello matematico

Il moto per trasporto può essere espresso dalle seguenti equazioni:

$$\phi_t + \mathbf{U} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (\text{Equazione del moto})$$

$$\phi_n = 0 \quad (\text{Condizione al contorno di Neumann})$$

$$\phi(x,y,0) = \phi_0(x,y) \quad (\text{Condizione iniziale})$$

dove ϕ_t è la derivata parziale temporale della funzione e ne rappresenta l'evoluzione, \mathbf{U} un campo vettoriale funzione di (x,y) che determina la velocità e direzione di spostamento e $\nabla \phi$ il gradiente della funzione di level set.

La condizione al contorno di Neumann stabilisce che la derivata in direzione normale al dominio è nulla, ovvero ai contorni non ci sarà evoluzione. La condizione iniziale definisce la curva di partenza all'istante iniziale. Lo zero level set della funzione ϕ si sposterà dunque seguendo il campo vettoriale.

Risolvere numericamente il problema

Il contributo ϕ_t è approssimato con uno schema esplicito alle differenze in avanti mentre il termine $\nabla \phi$ con uno schema upwind, per evitare problemi numerici dell'equazione. Lo schema upwind sfrutta il principio di causalità, andando ad utilizzare i punti in cui la curva è già passata, non quelli dove la curva arriverà. Quindi si osserva la direzione del campo \mathbf{U} nelle diverse componenti e si discretizza $\nabla \phi$ con i punti a monte rispetto alla direzione del campo. Ad esempio se $U_x > 0$ si discretizza $\nabla \phi$ con uno schema alle differenze all'indietro (al tempo j).

Rappresentare tramite il comando `quiver` il campo vettoriale e tramite il comando `contour` la funzione ϕ iniziale. Si risolve l'equazione del moto per trasporto, andando a rappresentare la sua evoluzione nel tempo tramite i comandi `contour` e `drawnow`. Nello specifico tramite il comando `contour(phi,[0,0]..)` si disegnano le curve che rappresentano il livello di zero. Di seguito è riportato il codice inerente all'evoluzione della curva:

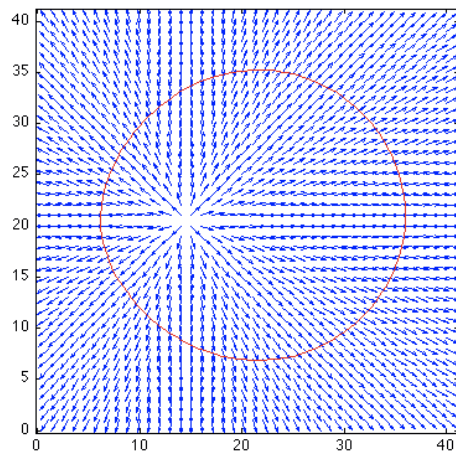
```

for i=1:Iter
phi=phi-dt.*(adv(phi,Ux,Uy));
if(mod(i,30)==1)
display(i);
contour(phi,[0 0],'r');
drawnow;
end
end

```

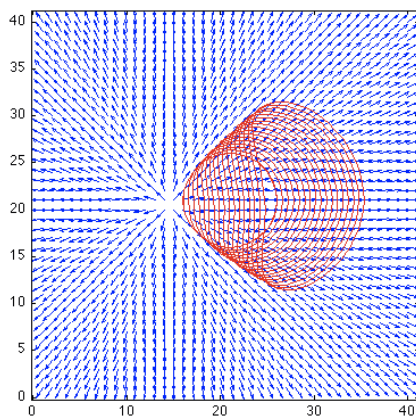
Come esempio, nella figura 1) è rappresentata la curva iniziale e il campo vettoriale tramite le frecce blu.

Figura 1)



Nella immagine 2) è rappresentata l'evoluzione della curva secondo gradiente con velocità e direzione di spostamento determinate dal campo vettoriale.

Figura 2)



I parametri utilizzati in queste figure sono:

- ☐ raggio=5;
- ☐ $\Delta t = 0.02$;
- ☐ Iter=500.