

# Progetto 27 PDE

---

## Convezione diffusione attorno ad un ostacolo in due dimensioni

### Introduzione

Consideriamo l'equazione che descrive la semplice convezione-diffusione in dimensione due

$$u_t + a(x)u_x + b(x)u_y = \nu(u_{xx} + u_{yy}), \quad (10)$$

con  $\nu > 0$ .

Risolvere tale equazione utilizzando la tecnica dello splitting basata sul risolvere in successione i problemi

$$u_t + au_x + bu_y = 0, \quad u_t = \nu(u_{xx} + u_{yy}). \quad (11)$$

Ai precedenti problemi si applichino rispettivamente i metodi alle differenze finite visti a lezione (upwind, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff) dimensione per dimensione ed il metodo ADI. In particolare nel caso di Lax-Wendroff al fine di avere un metodo di ordine due complessivo si utilizzi il metodo di Crank-Nicolson per la parte diffusiva risolta con il metodo ADI e si applichi lo splitting di Strang. Le condizioni al bordo vanno applicate una sola volta, ad esempio durante la risoluzione del termine diffusivo.

#### a) Rotazione e diffusione di un dato iniziale

Si consideri nel dominio  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Costruire due funzioni  $a(x)$  e  $b(x)$  (trigonometriche) tali che un dato iniziale posto nel quadrante  $[0.5, 1] \times [0.5, 1]$  ruoti in senso orario attorno al centro del dominio. Illustrare quanto succede al variare di  $\Delta t$  e  $\nu$ . In particolare cosa succede per  $\nu = 0$ ? Cosa cambia prendendo un dato iniziale regolare ed un dato iniziale discontinuo?

#### b) Flusso attorno ad un ostacolo

Si consideri il dominio computazionale  $[0, 1] \times [0.25, 1] \cup [0, 0.5] \times [0, 0.25]$  con  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $\nu = 1$ . Le condizioni iniziali sono  $u = 0$  su tutto il dominio, mentre al bordo abbiamo le seguenti condizioni di Dirichlet

$$u(0, y, t) = u_L, \quad y \in [0, 1] \quad (12)$$

$$u(0.5, y, t) = u_B, \quad y \in [0, 0.25] \quad (13)$$

$$u(x, 0.25, t) = u_B, \quad x \in [0.5, 1] \quad (14)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, 1, t), \quad x \in [0, 0.5] \quad (15)$$

con  $u_B > u_L > 0$ . Il bordo  $x = 1$  è considerato libero, dunque non si applica nessuna condizione al bordo. Studiare l'evoluzione della soluzione per tempi diversi e rappresentarla graficamente.