

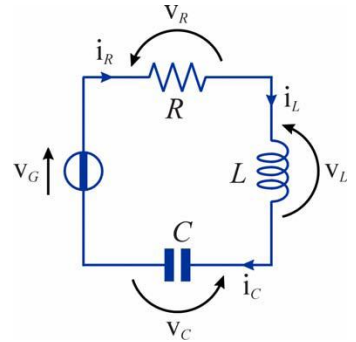
## **PROGETTO 60) ODE**

### **CALCOLO DELLA RISPOSTA DI UN CIRCUITO RLC SERIE AD UN GRADINO UNITARIO**

#### **Introduzione**

Condensatori e induttori sono componenti reattivi e introducono, conseguentemente, degli effetti dinamici. Un caso semplice ma rappresentativo è il circuito RLC in figura dove resistore R, induttore L e condensatore C sono collegati in serie tra loro e alimentati da un generatore.

Ci si pone il problema di calcolare la tensione  $V_C(t)$  ai capi del condensatore conoscendo i parametri R, L e C (costanti) e la tensione di alimentazione  $V_G(t)$  che stabiliamo essere un gradino. Tale scelta è dettata da due ragioni: essa semplifica il calcolo analitico delle costanti k1 e k2 che figurano nella soluzione e permette di visualizzare grafici in cui è possibile riconoscere immediatamente grandezze parecchio importanti nell'ambito dell'ingegneria (e della fisica in genere) come sovraelongazione massima, i tempi di assestamento, di ritardo, di salita, ecc. Si considera il gradino applicato all'istante  $t=0$  e il circuito in condizioni di regime stazionario per  $t<0$ .



#### **Modello matematico**

Si arriva a un modello matematico partendo dalle equazioni di Kirchhoff e per le correnti (non ci sono nodi) e per le tensioni (una sola maglia)

$$\begin{cases} i_R(t) = i_L(t) = i_C(t) & (LKI) \\ V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = V_G(t) & (LKV) \end{cases}$$

È possibile scrivere le equazioni dei componenti considerando che tutte le correnti sono uguali (dalla LKI):

$$i_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt}$$

$$V_R(t) = Ri_R(t) \Rightarrow V_R(t) = Ri_C(t) = RC \frac{dV_C(t)}{dt}$$

$$V_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow V_L(t) = L \frac{di_C(t)}{dt} = LC \frac{d^2V_C(t)}{dt^2}$$

Riscrivendo la LKV e imponendo le condizioni iniziali si imposta il problema di Cauchy.

$$\begin{cases} LC \frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = V_G(t) & (1) \\ V_C(0) = 0 \\ \left. \frac{dV_C(t)}{dt} \right|_0 = 0 \end{cases}$$

È possibile stabilire con esattezza le condizioni iniziali perché sappiamo che per  $t = 0^-$  il circuito è in condizioni di regime stazionario e, siccome esso non è degenere,  $V_C(0^+) = V_C(0^-) = 0$ . È comodo riscrivere l'eq. (1) in una forma più generale e frequente nelle applicazioni ingegneristiche.

$$\frac{d^2 V_C(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dV_C(t)}{dt} + \omega_0^2 V_C(t) = f(t)$$

dove  $\alpha = \frac{R}{2L}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{LC}$  e  $f(t) = \frac{1}{LC} V_G(t)$

Risolvere numericamente il problema e studiarne la stiffness.