

Progetto 57) BVP shooting

Consideriamo il problema ai limiti non lineare

$$\begin{cases} u'' = u^3 - uu' & \text{in } (1, 3), \\ u(1) = \frac{1}{2}, \\ u(3) = \frac{1}{4}, \end{cases}$$

la cui soluzione esatta è $u(x) = 1/(1+x)$. Approssimare la soluzione u usando il metodo di shooting accoppiando `ode45` con

- il metodo di bisezione, applicato all'intervallo $s \in (-0.9, 0)$ per il parametro $s = u'(1)$;
- il metodo di Newton, partendo dal valore iniziale $s^0 = -1$ per s . In questo caso, dovendo risolvere simultaneamente ad ogni iterazioni due equazioni differenziali del secondo ordine, `ode45` richiede di scrivere il problema come un sistema del primo ordine con quattro componenti.

Quale metodo converge più velocemente? Come si può migliorare l'accuratezza della soluzione ottenuta?

Il metodo di Newton è molto sensibile alla scelta del valore iniziale s^0 : se è troppo lontano dal valore ricercato il metodo non converge. Un primo modo per aggirare questo problema consiste nell'usare alcune iterazioni del metodo di bisezione o delle secanti, prima di iniziare le iterazioni di Newton. Un secondo modo consiste nel dividere l'intervallo (a, b) in sotto-intervalli e applicare il metodo di shooting ad ognuno di essi simultaneamente ("*multiple shooting method*"). Notiamo comunque che l'errore commesso dal metodo di Newton dipende da quello del solutore del problema iniziale usato.