

Progetto 12:

SCAMBIO DI O_2 NEI CAPILLARI POLMONARI

Descrizione del problema

Alla base del fenomeno di scambio dei gas respiratori a livello dei capillari polmonari, vi è la capacità dei gas di muoversi da un punto ad un altro per diffusione, a causa di una differenza di pressione parziale. Così, l'ossigeno diffonde dagli alveoli all'interno dei capillari polmonari per una differenza di pressione, essendo la pressione parziale dell'ossigeno (P_{O_2}) negli alveoli superiore a quella del sangue polmonare. La differenza di P_{O_2} fra capillare polmonare e alveolo varia lungo il capillare, passando da un valore di circa 64 mmHg all'estremo prossimale del capillare a circa 0 mmHg all'estremo distale. Durante la respirazione tranquilla la differenza media (nel tempo e nello spazio) è di circa 11 mmHg. A partire da una P_{O_2} nel sangue venoso che arriva ai polmoni, pari a circa 40 mmHg, si arriva così ad ottenere una P_{O_2} , nel sangue che esce dai capillari, pari a circa 104 mmHg. La P_{O_2} nel sangue dei capillari diventa circa uguale a quella alveolare (104 mmHg) entro il primo terzo della lunghezza del capillare. Il principale ostacolo nella determinazione della variazione di P_{O_2} lungo il capillare polmonare è rappresentato dalla dipendenza non lineare della concentrazione del gas dalla pressione parziale; è proprio questa non linearità ad impedire la risoluzione analitica dell'equazione che sta alla base del problema.

Formulazione matematica

L'andamento della P_{O_2} lungo il capillare polmonare è descritto dalla seguente equazione differenziale alle derivate ordinarie, ottenuta attraverso un bilancio di massa applicato al segmento infinitesimo dx :

$$\frac{dC_{O_2}}{dP_{O_2}} \frac{dP_{O_2}(x)}{dx} = -\frac{2\pi R D_{O_2}}{Q} (P_{O_2}(x) - P_{A_{O_2}})$$

dove

C_{O_2} = concentrazione del gas nel capillare

P_{O_2} = pressione parziale del gas nel capillare

R = raggio del capillare

$D_{O_2} = \frac{\text{coefficiente di diffusione}}{\text{spessore della parete del capillare}}$

Q = portata sanguigna

P_{AO_2} = pressione parziale del gas nello spazio alveolare

La relazione che lega C_{O_2} a P_{O_2} può essere ben descritta dalla cosiddetta equazione di Hill:

$$\frac{C_{O_2}}{C_{O_2 sat}} = \frac{\left(\frac{P_{O_2}}{P_0}\right)^n}{1 + \left(\frac{P_{O_2}}{P_0}\right)^n},$$

dove

$C_{O_2 sat}$ = valore massimo di C_{O_2}

$P_0 = 27.2$ mmHg (valore per cui $C_{O_2} = C_{O_2 sat}/2$, 50% di saturazione)

$n = 2.7$

P_0 e n sono stati determinati empiricamente in modo da approssimare il meglio possibile la curva misurata sperimentalmente.

Calcolando la derivata di C_{O_2} rispetto a P_{O_2} , in base alla relazione fornita dall'equazione di Hill, e sostituendo nell'equazione differenziale del modello, si ottiene:

$$\frac{dP_{O_2}(x)}{dx} = -\frac{2\pi R D_{O_2} P_0^n}{Q n C_{O_2 sat}} \left(\frac{P_{O_2}(x) - P_{AO_2}}{P_{O_2}(x)^{n-1}} \right) \left(1 + \left(\frac{P_{O_2}(x)}{P_0} \right)^n \right)^2$$

Risolvere numericamente il problema considerando i seguenti valori per i parametri:

$R = 3.5$ μm

$D_{O_2} = 0.538$ mL/m²/(min mmHg)

$C_{O_2 sat} = 20$ mL O₂/100 mL sangue

$Q = CO/N$, $CO = 6$ L/min (portata sanguigna totale ai polmoni)

$N = 2.6 \cdot 10^9$ (numero di capillari polmonari aperti)

$P_{AO_2} = 104$ mmHg

Lunghezza del capillare = 650 μm

ed imponendo la seguente condizione iniziale:

$$P_{O_2}(0) = 40 \text{ mmHg}$$