

MODELLAZIONE DEI PROCESSI SOCIALI ^[1]

Progetto ODE 51

Alcune dinamiche sociali, come le variazioni o spostamenti di popolazioni, possono essere modellati matematicamente per fini di ricerca o di predizione. In questo progetto applicheremo alcuni modelli proposti da Weidlich e Haag[2].

L'approccio generale di modellazione dell'evoluzione di questi sistemi sociali è basato su uno spazio definito da vettori. Ogni vettore caratterizza i membri del sistema rispetto al loro comportamento nella società o all'appartenenza a un certo raggruppamento sociale; sia esso l'occupazione, la tendenza a convergere in un partito politico, standard di vita, reddito ecc.

Questi vettori caratterizzano appunto il livello di appartenenza di un membro in un certo gruppo i in relazione al dato aspetto. Chiamando \mathbf{m}_α^i il numero di questi membri. L'evoluzione di un sistema sociale è determinata dal cambiamento di opinione dei membri di un determinato gruppo in relazione all'aspetto α .

Definendo \mathbf{w}_{ij}^α la probabilità per unità di tempo di cambiamento di opinione dei membri rappresentati dall'aspetto α ; essa implica il cambiamento di gruppo da parte del soggetto da gruppo j al gruppo i . L'incremento di \mathbf{m}_α^i sarà quindi governato dalla equazione master:

$$\frac{dm_i^\alpha(t)}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s m_j^\alpha(t) * w_{ij}^\alpha(t) - m_i^\alpha(t) * w_{ji}^\alpha(t)$$

Quest'ultima è l'equazione fondamentale che descrive una classe di un sistema sociale. Può essere utilizzata sia per modellare processi con strutture spaziali (migrazioni di popolazioni, il nostro caso), sia oscillazioni temporali.

MODELLI MIGRATORI DI UNA POPOLAZIONE

Un'applicazione dell'equazione master vista precedentemente studia la relazione tra due gruppi di abitanti ($s=2$) che vivono in due quartieri ($\alpha = 2$) e i corrispondenti flussi migratori.

I due gruppi vengono denotati con m e n . Si considera uno studio reale condotto negli Stati Uniti volto a investigare l'evoluzione della popolazione di pelle bianca e nera nei quartieri della città di Atlanta. Assumendo che il numero di abitanti per ogni gruppo sia costante ed uguale a $2m_0$ (bianchi) e $2n_0$ (neri); questi gruppi si diffonderanno in un tempo t in due diversi quartieri. Denotiamo con:

$m_1(t)$: numero di soggetti bianchi nel quartiere 1

$m_2(t)$: numero di soggetti bianchi nel quartiere 2

$n_1(t)$: numero di soggetti neri nel quartiere 1

$n_2(t)$: numero di soggetti neri nel quartiere 2

quindi:

$$m_1(t) + m_2(t) = 2m_0$$

$$n_1(t) + n_2(t) = 2n_0$$

introducendo le nuove variabili:

$$m(t) = m_1(t) - m_0 = m_0 - m_2(t)$$

$$n(t) = n_1(t) - n_0 = n_0 - n_2(t)$$

possiamo ridurre l'equazione master nel seguente sistema (non accoppiato):

$$\frac{dm(t)}{dt} = (m_0 - m(t)) * w_{12}^m(t) - (m_0 + m(t)) * w_{21}^m(t)$$

$$\frac{dn(t)}{dt} = (n_0 - n(t)) * w_{12}^n(t) - (n_0 + n(t)) * w_{21}^n(t)$$

Occorre ora derivare un modello di funzioni di probabilità transiente $w_{ij}^\alpha(t)$; verranno usate tre costanti per il gruppo m e tre per il gruppo n.

- 1) **PARAMETRI NATURALI DI PREFERENZA:** $a_m, a_n \rightarrow$ descrivono la naturale tendenza degli abitanti del gruppo m (n) a vivere nello stesso quartiere dei propri simili.
- 2) **PARAMETRI DI INCLINAZIONE INTERIORE:** $b_m, b_n \rightarrow$ descrivono la tendenza degli abitanti del gruppo m (n) a vivere nello stesso gruppo dei propri simili in un quartiere comune.
- 3) **PARAMETRI DI INCLINAZIONE ESTERIORE:** $c_m, c_n \rightarrow$ descrivono la tendenza degli abitanti del gruppo m (n) a vivere con quelli del gruppo opposto nello stesso quartiere.

Le funzioni di probabilità transiente possono essere quindi definite da equazioni esponenziali con i precedenti parametri:

$$w_{12}^m(t) = A * e^{a_m + b_m * m(t) + c_m * n(t)}$$

$$w_{21}^m(t) = A * e^{-(a_m + b_m * m(t) + c_m * n(t))}$$

$$w_{12}^n(t) = A * e^{a_n + b_n * m(t) + c_n * n(t)}$$

$$w_{21}^n(t) = A * e^{-(a_n + b_n * m(t) + c_n * n(t))}$$

dove A è un parametro di scaling temporale.

Introducendo le nuove variabili: $x(t) = \frac{m(t)}{m_0}$ e $y(t) = \frac{n(t)}{n_0}$
e denotando con

$$u(t) = a_m + b_m * m_0 * x(t) + c_m * n_0 * y(t)$$

$$v(t) = a_n + b_n * m_0 * x(t) + c_n * n_0 * y(t)$$

otteniamo dalle precedenti

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2A(\sinh(u(t)) - x(t) * \cosh(u(t)))$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = 2A(\sinh(v(t)) - y(t) * \cosh(v(t)))$$

dove, ricordiamo

$$\sinh(u) = \frac{(e^u - e^{-u})}{2} \quad e \quad \cosh(u) = \frac{(e^u + e^{-u})}{2}$$

Si è verificato tramite calcolo simbolico con il software MAPLE che non vi è una soluzione analitica per il sistema IVP precedente. Si deve quindi procedere con una soluzione numerica.

MIGRAZIONE CICLICA SENZA REGOLAZIONE

La soluzione del modello migratorio dipende fortemente dal valore dei parametri. Ci sono 3 possibili tipologie di soluzioni in base al variare di questi. Due di queste convergono a uno stato stazionario (una nella quale in ogni quartiere avremo m_0 bianchi e n_0 neri; la seconda nella quale i due gruppi convergeranno a una separazione con un quartiere dedicato a un singolo gruppo) mentre la terza tipologia di soluzione convergerà a un ciclo limite, ed è l'unica che viene presentata in modo esaustivo.

I valori dei parametri precedentemente discussi sono stati assegnati in base agli studi di Kveton[1] basati sulla migrazione tra Cechi e Gitani e sono:

$$\begin{aligned} A &= 0.5 \\ a_m &= 0 \\ b_m &= 1.2 * 10^{-4} \\ c_m &= 0.5 * 10^{-3} \\ a_n &= 0 \\ b_n &= -1 * 10^{-4} \\ c_n &= 1.2 * 10^{-3} \\ m_0 &= 10000 \\ n_0 &= 1000 \end{aligned}$$

Come condizioni di distribuzione iniziali si opta per gruppi (continueremo con l'esempio di popolazione bianca e nera) divisi quasi equamente nei due diversi quartieri:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 0.01 \end{aligned}$$

Risolvere il sistema di IVP numericamente utilizzando i metodi studiati in un periodo temporale $[0,60]$. Si dovrebbe ottenere un ciclo limite. Mediante un grafico delle fasi del risultato si dovrebbe notare l'evoluzione che parte dal centro per stabilizzarsi nel ciclo limite rappresentato da un anello esterno. In generale si dovrebbe notare che le oscillazioni aumentano fino a giungere a un moto armonico periodico costante.

Lo stesso Kevton mostra inoltre come una distribuzione iniziale degli abitanti differenti non influenzi la soluzione ma solo le oscillazioni prima di raggiungere il ciclo limite. Si studi il modello al variare delle condizioni iniziali:

$$x(0) = -1$$

$$y(0) = 1$$

In generale questa nuova soluzione dovrebbe mostrare la tendenza degli abitanti appartenenti ad un gruppo a NON voler vivere insieme a quelli del secondo gruppo per sempre nello stesso quartiere.

MIGRAZIONE CICLICA CON REGOLAZIONE

Weidlich e Haag propongono anche un modello modificato nel quale vi è un flusso migratorio in parte imposto (regolato) esternamente. Le equazioni vengono così modificate:

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2A(\sinh(u(t)) - x(t) * \cosh(u(t))) + r$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2A(\sinh(v(t)) - y(t) * \cosh(v(t))) + s$$

Si effettui lo studio del nuovo modello $r = -0.2$ e $s = 0.1$ per ottenere sempre un ciclo limite, questa volta diverso dal precedente.

Variando però i parametri a $r = -0.3$ e $s = 0.3$ si osserva come la soluzione non converga più ad un ciclo limite ma a un valore unico nel quale si ha una ripartizione precisa e statica delle popolazioni nei due diversi quartieri.

BIBLIOGRAFIA:

[1] Hřebíček, Jiří, and Tomáš Pitner. "Modeling social processes." *Solving Problems in Scientific Computing Using Maple and MATLAB®*. Springer Berlin Heidelberg, 1997. 351-358.

[2] Haag, Günter, and Wolfgang Weidlich. "A dynamic migration theory and its evaluation for concrete systems." *Regional Science and Urban Economics* 16.1 (1986): 57-80.