

Analisi Numerica

PDE iperboliche con metodi alle differenze finite

Equazione del trasporto

Scrivere una funzione Matlab che risolva con un metodo alle differenze finite, utilizzando diverse discretizzazioni delle derivate: spaziale i seguenti problemi differenziali di trasporto di un'onda:

1. Metodo di Eulero all'indietro, metodo implicito

$$u_t + u_x = 0, \quad u(x, 0) = \sin(x), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad t \in [0, 1]$$

rappresentando la soluzione sia come superficie che con linee corrispondenti a valori di tempo o spazio fissati.

2. metodo di Upwind, Lax-friedrichs, lax-wendroff,

$$u_t + \alpha u_x = 0, \quad u(x, 0) = e^{-5x^2}, \quad x \in [-2, 2], \quad t \in [0, T]$$

α costante, condizioni al bordo $[a, b] = [-2, 2]$:

- Periodiche:

$$u(a, t) = u(b, t), \quad u(a + h, t) = u(b + h, t)$$

- Free Flow:

$$u_x(a, t) = 0, \quad u_x(b, t) = 0$$

3. metodo upwind, Eulero all'indietro, Eulero all'avanti

$$u_t + \alpha(x)u_x = 0, \quad u(x, 0) = e^{-5x^2}, \quad x \in [-2, 2], \quad t \in [0, T]$$

con $\alpha(x) = (1 + x)$

Per il problemi 2. e 3.:

- Calcolare la soluzione per un tempo finale $T=9$. Rappresentare la soluzione sia come superficie che come funzione della variabile t per passi spaziali fissati.
- Raffinare la griglia e verificare l'andamento dell'errore commesso (differenza fra il valore del picco iniziale e quello al tempo finale per $T=0.5$ e $T=9$). Analizzare criticamente i risultati ottenuti.
- , Inserire un dato iniziale oscillante del tipo: $u_0(x) = \sin(\pi x) + \sin(10\pi x)$