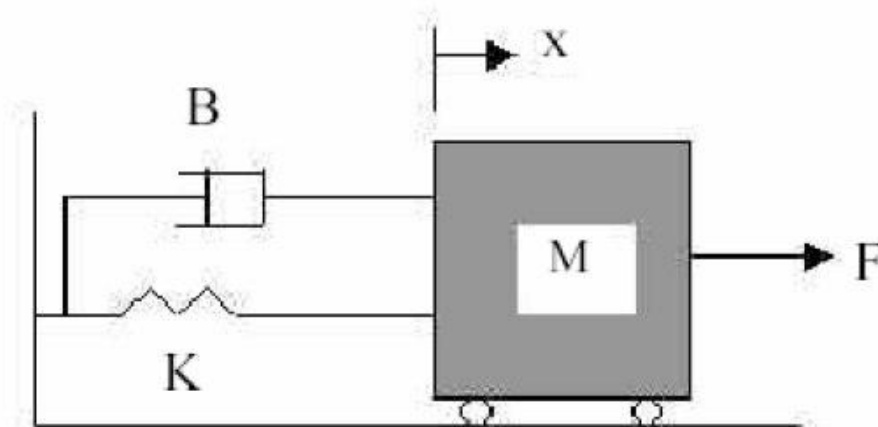


Progetto 13:

IL SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE

Descrizione del problema

Si consideri il sistema massa-molla-smorzatore riportato in figura:



Il sistema è rappresentativo del funzionamento di una sospensione di un motore; la sospensione è infatti costituita da un cinematismo deformabile, l'ammortizzatore. Questo a sua volta è composto da un elemento "molla" e un elemento "smorzante". L'equazione che descrive il comportamento di una molla è nota come legge di Hooke ed è la seguente:

$$F = k \cdot x$$

dove k è la costante di rigidità della molla e x è la misura dello spostamento dalla posizione di riposo. Tale legge ha un andamento. Posizionando la massa in una posizione diversa da quella di equilibrio, si carica la molla di energia potenziale. Se lasciamo il sistema libero esso tenderà a tornare nella posizione iniziale poiché esso non si trova in equilibrio. Perciò tutta l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica durante il ritorno allo stato di equilibrio; tuttavia una volta tornati alla posizione di origine tutta l'energia potenziale si è trasformata in energia cinetica e quindi il sistema non è ancora in equilibrio. Questo è il motivo per cui la molla, se era stata compressa, comincia ad estendersi perdendo energia cinetica e riacquistando energia potenziale. Da tutto ciò ne risulta un moto armonico semplice con legge :

$$x = x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

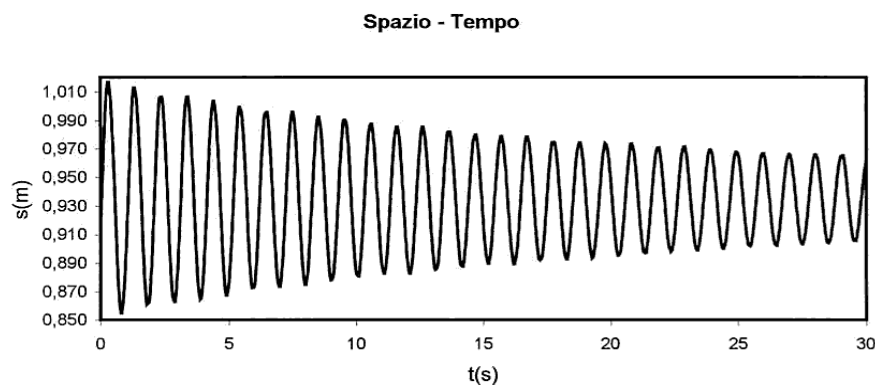
dove x_0 è l'ampiezza dell'oscillazione, cioè quanto abbiamo spostato inizialmente la massa dalla posizione di equilibrio, mentre ω è la pulsazione propria del sistema pari a

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

L'andamento in funzione del tempo di tale moto è il moto armonico semplice. Queste poche considerazioni fanno però già capire come una sospensione dotata di una sola molla renderebbe impossibile la guida della motocicletta. Per questo motivo quindi si introduce lo smorzatore che serve a dissipare l'energia trasmessa dal fondo stradale alla molla della sospensione impedendo all'elemento elastico di oscillare all'infinito o di entrare in risonanza e quindi di rompersi. L'azione smorzante dell'ammortizzatore è proporzionale alla velocità di spostamento del corpo di massa m secondo la legge:

$$R = c \cdot v = c \cdot \dot{x}$$

R è la forza di smorzamento, \dot{x} è la velocità con cui si sposta il corpo di massa m e c è la costante di smorzamento. Con l'introduzione dell'elemento smorzante si ottiene un moto armonico smorzato, cioè un moto oscillatorio in cui l'ampiezza di oscillazione tende a diminuire nel tempo.



Moto armonico smorzato

Formulazione matematica

Il carrello di massa M è vincolato alla parete mediante una molla di costante elastica K e uno smorzatore di attrito viscoso B . Ad esso viene applicata una forza F e il carrello si muove di moto orizzontale con spostamento x . Il sistema è descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$M\ddot{x} = F - B\dot{x} - Kx \quad (1)$$

avente condizioni iniziali $x=0$ e $\dot{x}=0$. L'equazione (1) può essere riscritta come un sistema di due equazioni del primo ordine:

$$\dot{y}(1) = y(2)$$

$$\dot{y}(2) = 1/M * (F - B * y(2) - K * y(1))$$

con condizioni iniziali $y(1)=0$ e $y(2)=0$. I parametri che compaiono nell'equazione hanno i seguenti valori: $M=1$ kg, $F=30$ N, $B=3$ N*s/m, $K=49$ N/m.