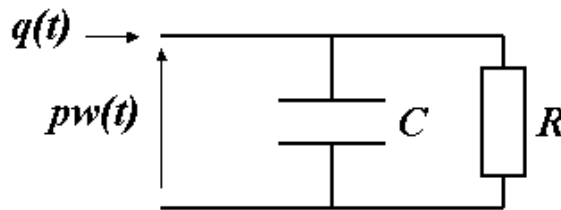


Progetto 34 ODE

Tratto dalle esercitazioni del corso **MODELLI DI SISTEMI BIOLOGICI - Prof. G.Gnudi**

parte 1)

Il file MATLAB **wind_p.m**, di cui si riporta il listato, calcola la pressione aortica $p_w(t)$, fornita dal modello *windkessel* alimentato con un predefinito segnale di portata aortica $q(t)$ (a forma di impulso rettangolare). Sono predefiniti anche i valori di resistenza periferica R , e complianza arteriosa C .



L'equazione differenziale da risolvere è la seguente:

$$C \frac{dp_w(t)}{dt} = -\frac{p_w}{R} + q(t). \quad (1)$$

Il programma prevede che la portata $q(t)$ sia nota negli n istanti discreti $0, \Delta t, \dots, i \Delta t, \dots, (n-1) \Delta t$. L'intervallo di campionamento Δt viene adottato anche come passo per l'integrazione numerica, quindi la pressione $p_w(t)$ viene calcolata negli stessi istanti.

Risolvere con i metodi numerici opportuni l'equazione (1).

Per il metodo di Eulero in avanti
$$p_{i+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{CR}\right) p_i + \frac{\Delta t}{C} q_i, \quad (2)$$

il cui autovalore è $\lambda = \left(1 - \frac{\Delta t}{CR}\right)$ determinare la condizione di stabilità assoluta e il conseguente intervallo per Δt .

- 3- eseguire il programma per valori variati di Δt , cioè per valori variati del numero di campioni (n) in un periodo cardiaco (ad es. il doppio e il quadruplo); verificare che al diminuire di Δt i risultati dell'integrazione numerica si avvicinano sempre di più ai valori calcolati analiticamente;
- 4- eseguire il programma per valori variati di C (ad es. il doppio e la metà); verificare come si modificano i valori massimo, minimo e medio della pressione aortica a regime;
- 5- eseguire il programma per valori variati di R (ad es. il doppio e la metà); verificare come si modificano i valori massimo, minimo e medio della pressione aortica a regime;
- 6- eseguire il programma per valori molto ridotti della costante di tempo RC ; verificare che la risposta risulta instabile se l'equazione (3) non è soddisfatta;
- 7- approssimare l'equazione differenziale (1) con il metodo di Eulero Indietro.

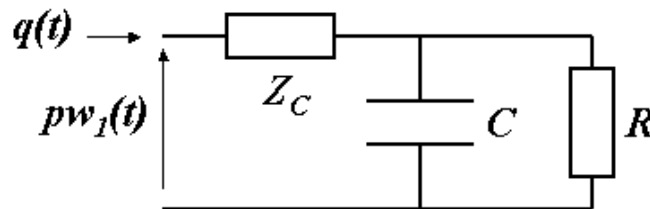
$$p_i = \frac{p_{i-1} + \frac{\Delta t}{C} q_i}{\left(1 + \frac{\Delta t}{CR}\right)}, \quad (4)$$

il cui autovalore è $\lambda = \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta t}{CR}\right)}$.

È interessante notare che l'equazione (4) risulta strettamente stabile per qualunque valore (ovviamente > 0) di Δt .

Verificare questo risultato eseguendo il programma per valori molto piccoli della costante di tempo.

- 8-** modificare il programma in modo da calcolare la pressione aortica fornita dal modello windkessel a tre elementi, in cui la resistenza serie vale $Z_c = 0.05 \text{ mmHg s mL}^{-1}$. Si consideri invariato il segnale di portata aortica.



File: wind_p.m

```
% Questo programma calcola la pressione aortica (pw) nota la portata
% aortica (q) a forma di impulso rettangolare sulla base del modello
% windkessel a due elementi

clear, close all
format compact

% ----- Definizione del segnale di portata aortica -----
freq=75; % frequenza cardiaca in battiti/min
T=60/freq; % Periodo cardiaco (s)
CO=100; % portata media aortica in ml/s
ts=0.3; % durata della sistole
Q=T/ts*CO; % ampiezza dell'impulso "rettangolare" di durata ts
qforma=[0 Q Q 0 0];
tforma=[0 1e-9 ts-1e-9 ts T];
n=64; % numero dei campioni di portata in un periodo
dt=T/n; % intervallo di campionamento per l'integrazione numerica
t=(0:n)*dt; % vettore degli istanti di campionamento
q=interp1(tforma,qforma,t); % interpolazione lineare di qforma

figure(1)
plot(t,q)
xlabel('tempo (s)')
ylabel('portata aortica (ml/s)')

% ----- Definizione dei parametri del modello -----
% ----- e della condizione iniziale -----
R=1; % Resistenza periferica (mmHg/ml*s)
C=1.5; % Compliance arteriosa (ml/mmHg)
tau=R*C; % Costante di tempo

% ----- Assegnamento del valore iniziale di pressione aortica -----
pw(1)=input('p(0) in mmHg = ');

% ----- Integrazione numerica con il metodo di Eulero -----
% ----- un periodo cardiaco alla volta -----

nc=0; % nc = contatore dei periodi
k=1;
while k==1;
    clc
    % INSERIRE SOLUTORE NUMERICO PER ODE
    tg=nc*T+t; % vettore degli istanti di campionamento
    pg=pw; % vettore dei valori di pressione aortica nell'nc-esimo periodo
    nc=nc+1; % incremento del numero di periodi
    figure(2)
    plot(tg,pw), axis([0 T*ceil(10*tau/T) 0 150]), hold on
    xlabel('tempo (s)')
    ylabel('pressione aortica (mmHg)')

    fprintf('Numero di periodi = %g\n',nc)
    k=input('Integrare per un ulteriore periodo? (si=1, no=0)');
    pw(1)=pw(nc+1); % valore iniziale di pressione per l'nc+1-esimo periodo cardiaco
```

```

end
hold off

figure(3)
plot(tg,pg) % grafico dell'ultimo periodo
xlabel('tempo (s)')
ylabel('pressione aortica (mmHg)')

%----- Confronto con il risultato ottenuto analiticamente -----

ps=max(pg);
pd=min(pg);
pm=mean(pg);

fprintf('\n---Integrazione numerica---\n')
fprintf('Pressione minima = %6.2f mmHg\n',pd)
fprintf('Pressione massima = %6.2f mmHg\n',ps)
fprintf('Pressione media = %6.2f mmHg\n',pm)
fprintf('\n')

% ----- Calcolo analitico -----

pda=Q*R*(exp(ts/tau)-1)/(exp(T/tau)-1);
psa=pda*exp((T-ts)/tau);
pma=CO*R;

fprintf('---Calcolo analitico---\n')
fprintf('Pressione minima = %6.2f mmHg\n',pda)
fprintf('Pressione massima = %6.2f mmHg\n',psa)
fprintf('Pressione media = %6.2f mmHg\n',pma)

```

parte 2)

Nel modello windkessel si ipotizza che la caratteristica elastica dell'albero arterioso sistemico sia lineare. In realtà il volume di sangue nelle arterie (V) è funzione della pressione aortica, ovvero $V=f(pw)$. In generale, quindi, la complianza è definita come $C = dV/dpw$ e risulta funzione della pressione.

Nel cane si può assumere che l'andamento della complianza arteriosa (vedi figura) sia descritto dall'equazione:

$$C(pw) = \frac{A}{P_o} \left(1 - \tanh^2 \frac{pw - P_o}{P_o} \right) \quad (5)$$

dove: $P_o = 148$ mmHg e $A = 95$ ml.

Nel file dati **dog.mat**, leggibile con il comando *load*, sono disponibili: il vettore q dei valori di portata aortica (misurati su cane), relativamente ad un periodo cardiaco, il numero dei valori di portata n e la frequenza cardiaca *freq* in battiti al minuto, nonché il vettore p dei valori di pressione aortica *misurata*. Tenendo conto del nuovo andamento di C e assumendo la resistenza periferica del cane uguale a $R = 3.3$ mmHg/ml*s, si modifichi il file **wind_p.m** in modo da utilizzare il segnale di portata aortica misurato su cane come ingresso del modello. Si confronti l'andamento di pw così ottenuto con quello che si otterrebbe nel caso lineare, a parità di condizioni iniziali, imponendo $C = 0.637$ ml/mmHg.

