

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I, 3/09/2015
TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema ammette soluzioni:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2y - kx = 0 \\ z - y = 2 \end{cases}$$

Quando possibile determinare tali soluzioni.

Esercizio 2 (14 punti) Sia $U = \langle (1, 1, 1), (2, 1, 0), (0, 1, 2) \rangle$.

- (a) Calcolare la dimensione di U ed esibire una sua base.
- (b) Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ortogonale ad U .
- (c) Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $v = (0, 1, 2)$ su U .
- (d) Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $w = (1, -2, 1)$ su U .
- (e) Interpretato U come una sottovarietà lineare nello spazio euclideo tridimensionale, scrivere l'equazione cartesiana di U .
- (f) Determinare equazioni cartesiane di una retta passante per il punto $P = (1, 2, 3)$ ortogonale ad U .

Esercizio 3 (8 punti) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e sia $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare associata alla

matrice A .

- (a) Determinare una base di $\ker f_A$ ed una base di $\operatorname{Im} f_A$.
- (b) Stabilire se la funzione f_A è iniettiva e/o suriettiva.
- (c) Determinare, se possibile, due vettori distinti di $\mathbb{R}^3$ aventi la stessa immagine non nulla mediante la funzione f_A .

N.B. Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I, 30/06/2015
TEMA 2

Esercizio 1 (punti 10) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema ammette soluzioni:

$$\begin{cases} -x + 2z = -3 \\ -y + kz = 0 \\ (k-1)x + y = -1 \end{cases}$$

Quando possibile determinare tali soluzioni.

Esercizio 2 (14 punti) Sia $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - z = y\}$.

- (a) Calcolare la dimensione di U ed esibire una sua base B .
- (b) Stabilire se il vettore $v = (2, 2, 2)$ appartiene ad U e, in caso affermativo, calcolare le sue coordinate rispetto alla base B .
- (c) Determinare una base ortonormale C di U .
- (d) Completare C in una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
- (e) Interpretato U come una sottovarietà lineare nello spazio euclideo tridimensionale, scrivere l'equazione cartesiana di una retta parallela ad U , passante per $P = (0, 0, 0)$ ed ortogonale al vettore v .

Esercizio 3 (6 punti) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e sia $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare associata

alla matrice A .

- (a) Determinare una base di $\ker f_A$ ed una base di $\operatorname{Im} f_A$.
- (b) Stabilire se f_A è iniettiva e/o suriettiva.

N.B. Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate.