NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I, 18/09/2015
TEMA 1

Esercizio 1 (10 punti) Discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} 5kx + 5y - 3z = 3 \\ kx + y - 3z = 0 \\ x + ky - z = k \\ 2kx + 2y + 6z = 3 \end{cases}$$

e, quando è possibile, determinarne le soluzioni.

Esercizio 2 (15 punti) Sia $W_k = \langle (1, 2, k), (1, k, 1), (2, 4, 3) \rangle$.
(a) Al variare del parametro reale k determinare una base $\mathcal{B}_k$ di W_k.
(b) Stabilire per quali valori di k il vettore $v = (1, 2, 2)$ appartiene a W_k.
Posto $k = 2$:
(a) determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a W_2;
(b) calcolare la proiezione ortogonale del vettore $v = (1, 2, 2)$ su W_2;
(c) determinare una base ortormale di W_2;
(d) interpretato W_2 come una sottovarietà lineare nello spazio euclideo tridimensionale, scrivere l'equazione cartesiana di W_2;
(e) scrivere, se possibile, equazioni cartesiane di una retta contenuta in W_2 e ortogonale al vettore v. Una retta come richiesta è unica?

Esercizio 3 (5 punti) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e sia $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare associata alla matrice A.
(a) Determinare una base di $ker f_A$ ed una base di $Im f_A$.
(b) Determinare, se possibile, due vettori distinti di $\mathbb{R}^3$ aventi la stessa immagine mediante la funzione f_A.
(c) Determinare la controimmagine mediante la funzione f_A del vettore $(1, 0, 0)$.

N.B. Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate.

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I, 30/06/2015
TEMA 2

Esercizio 1 (punti 10) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema ammette soluzioni:

$$\begin{cases} -x + 2z = -3 \\ -y + kz = 0 \\ (k-1)x + y = -1 \end{cases}$$

Quando possibile determinare tali soluzioni.

Esercizio 2 (14 punti) Sia $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - z = y\}$.
(a) Calcolare la dimensione di U ed esibire una sua base B.
(b) Stabilire se il vettore $v = (2, 2, 2)$ appartiene ad U e, in caso affermativo, calcolare le sue coordinate rispetto alla base B.
(c) Determinare una base ortonormale C di U.
(d) Completare C in una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
(e) Interpretato U come una sottovarietà lineare nello spazio euclideo tridimensionale, scrivere l'equazione cartesiana di una retta parallela ad U, passante per $P = (0, 0, 0)$ ed ortogonale al vettore v.

Esercizio 3 (6 punti) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e sia $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare associata alla matrice A.
(a) Determinare una base di $ker f_A$ ed una base di $Im f_A$.
(b) Stabilire se f_A è iniettiva e/o suriettiva.

N.B. Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate.