NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I, 03/06/2015

Esercizio 1 (punti 10) Si consideri, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, w:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z - 4w = 0 \\ 2x + y - 3w = 0 \\ ay - 2z + w = 0 \end{cases}$$

Risolvere il sistema al variare di a in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2 (13 punti) Sia $U = \langle (1,0,1), (0,1,1), (1,2,3) \rangle$.

(a) Calcolare la dimensione di U ed esibire una sua base B.

(b) Completare B in una base C di $\mathbb{R}^3$ e calcolare le coordinate del vettore $v = (1,0,0)$ rispetto alla base C.

(c) Determinare una base di $U^\perp$.

(d) Calcolare la proiezione ortogonale su U del vettore $v = (1,0,0)$.

(e) Interpretato U come un piano nello spazio euclideo tridimensionale, scrivere l'equazione cartesiana di un piano π ortogonale ad U, parallelo a v e passante per il punto $P = (0,1,2)$.

Esercizio 3 (8 punti) Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e sia $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare associata alla matrice A.

(a) Determinare una base di $ker f_A$ ed una base di $Im f_A$.

(b) Stabilire se A è invertibile.

(c) Stabilire se $||v|| = ||f(v)||$ per ogni $v \in \mathbb{R}^2$.

N.B. Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate.