

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I, 04/02/2016  
TEMA 1

**Esercizio 1** (10 punti) Discutere, al variare del parametro reale  $k$ , il seguente sistema lineare nelle incognite  $x, y, z$ :

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + kz = 1 - k \\ kx + (4 - k)y + kz = 1 \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di  $k$  il sistema ammette soluzioni e, quando possibile, determinarle.

**Esercizio 2** (14 punti) Sia  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, y - 2z = 0\}$ .

- (a) Determinare una base di  $W$  e calcolare la sua dimensione.
- (b) Quale sottovarietà lineare dello spazio euclideo tridimensionale è individuata da  $W$ ?
- (c) Determinare una base del sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  ortogonale a  $W$ .
- (d) Calcolare la proiezione ortogonale del vettore  $v = (1, 0, 0)$  su  $W$ .
- (e) Determinare tutti i vettori appartenenti al sottospazio  $T = \langle (1, 0, -1) \rangle$  aventi proiezione ortogonale nulla su  $W$ .
- (f) Calcolare la distanza del punto  $P = (0, 0, 1)$  da  $W$ .
- (g) Scrivere, se possibile, l'equazione cartesiana di un piano parallelo a  $W$ , contenente  $P$  e ortogonale al vettore  $v = (1, -1, 0)$ .

**Esercizio 3** (6 punti) Sia  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  e sia  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare associata alla matrice  $A$ .

- (a) Stabilire se la funzione  $f_A$  è iniettiva e/o suriettiva.
- (b) Determinare, se possibile, due vettori linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^3$  aventi la stessa immagine mediante  $f_A$ .
- (c) Determinare la controimmagine del vettore  $(1, 2, 3)$  mediante la funzione  $f_A$ .

**N.B. Tutte le risposte vanno opportunamente giustificate.**