Foglio di esercizi numero 2

Corso di Istituzioni di Matematiche I

Corso di Laurea in Architettura a.a. 2014/15

Prof.ssa Nicoletta Cantarini

1. Stabilire quali, tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$, sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$. Per ciascuno di questi esibire due insiemi diversi di generatori.
   (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0, x = -y + z\}$;
   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z = 0\}$;
   (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 1 = 0, x = -y + z\}$;
   (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$;
   (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y, y = z\}$.
2. Considerati in $\mathbb{R}^4$ i sottoinsiemi $S = \{(x, y, z, w) \mid x+z = 0, 3y-w = 0\}$ e $T = \{(x, y, z, w) \mid x + z = 0, y + 2w = 0\}$, verificare che S e T sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$ ed esibire un insieme di generatori per ciascuno di essi.
3. Stabilire se gli insiemi
   $$\mathcal{B}_1 = \{(2, 1), (-1, -1)\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \{(-1, -3), (2, 3)\}$$
   generano $\mathbb{R}^2$. In caso affermativo scrivere un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^2$ come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}_1$ e di $\mathcal{B}_2$.
4. Trovare un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ chiuso rispetto alla somma ma non al prodotto per scalari ed un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ chiuso rispetto al prodotto per scalari ma non alla somma.
5. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, y - z = 0\}$. Mostrare che S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ ed esibire, se possibile, due diversi insiemi di generatori di S, contenenti, rispettivamente, uno e due vettori.
6. Sia $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$. Stabilire se T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e determinare il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^3$ contenente T.