

**Foglio di esercizi numero 7**  
Corso di Istituzioni di Matematiche I  
Corso di Laurea in Architettura

**Esercizio 1.** Sia  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la funzione lineare definita nel modo seguente:

$$f(x, y, z, w) = (w, x + y, x + z, w).$$

Determinare una base di  $\ker f$  e completarla in una base di  $\mathbb{R}^4$ .

**Esercizio 2.** Sia  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione definita da:  $f(x, y, z, w) = (x + z, 3z - w, y)$ .  
Determinare una base di  $\ker f$  ed una base di  $\operatorname{Im} f$ .

**Esercizio 3.** Si consideri l'applicazione  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z, w) = (x + w, w - z, 2x + 2z).$$

Determinare  $\ker f$ ,  $\operatorname{Im} f$  ed una base di ciascuno di tali sottospazi. Sia poi  $v_1 = (0, 1, -2)$ ; determinare  $f^{-1}(v_1)$ .

**Esercizio 4.** Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 & -4 \\ 15 & 14 & -5 \end{pmatrix}.$$

Determinare il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  associata alla matrice  $A$ . Determinare  $f_A^{-1}(1, 1)$ .

**Esercizio 5.** Sia  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare associata, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Determinare  $\ker f_A$ ,  $\operatorname{Im} f_A$  e le loro dimensioni, esibendo una base di tali sottospazi, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 6.** Si consideri la seguente funzione  $f_s$  di  $\mathbb{R}^3$  in se stesso:

$$f_s(x, y, z) = (x + y + z, x - y + s, sx + (s - 1)z).$$

1. Per quali valori di  $s$  l'applicazione  $f_s$  è lineare?
2. Per i valori di  $s$  trovati al punto 1.:
  - a) Determinare  $\ker f_s$ ,  $\operatorname{Im} f_s$ .
  - b) Determinare la controimmagine mediante  $f_s$  del vettore  $(-1, 1, 1)$ .

**Esercizio 7.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare  $f(x, y) = (x + 3y, y, x + 3y)$ .

1. Determinare  $\ker f$  e  $\operatorname{Im} f$ .
2. Determinare  $f^{-1}(1, 1, -1)$ .

**Esercizio 8.** Si considerino, al variare del parametro reale  $k$ , le seguenti applicazioni lineari:

$$f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f_k(x, y, z) = (kx + y - z, ky + (k + 1)z, (k - 1)z).$$

1. Determinare per quali valori di  $k$  l'applicazione  $f_k$  è iniettiva.
2. Determinare per quali valori di  $k$  il vettore  $(1, 0, 0)$  appartiene a  $\text{Im}f_k$ .

**Esercizio 9.** Sia  $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare definita da:

$$T(x, y) = (x + y, x - y, y).$$

1. Si determini  $\text{Ker}T$ : se ne individui una base e se ne calcoli la dimensione. L'applicazione  $T$  è iniettiva?
2. Si determini  $\text{Im}T$ : se ne individui una base e se ne calcoli la dimensione. L'applicazione  $T$  è suriettiva?
3. Si costruisca, se possibile, un'applicazione lineare  $S \neq T$ ,  $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\text{Ker}S = \text{Ker}T$  e  $\text{Im}S = \text{Im}T$ .

**Esercizio 10.** Sia  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Determinare  $\text{ker } f_A$ ,  $\text{Im}f_A$  e le loro dimensioni, fornendo una base di tali sottospazi, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 11.** Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la trasformazione lineare così definita:

$$f(a, b, c) = (3a + c, -2a + b, -a + 2b + 4c).$$

Si richiede di:

1. dimostrare che  $f$  è invertibile;
2. determinare la forma esplicita della funzione  $f^{-1}$ .