

ESERCIZI DI TUTORATO

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE I

Corso di Laurea in Architettura

a.a. 2015/16

Esercizi - Foglio 1

4 Marzo 2016

Esercizio 1. Risolvere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

Risolvere ora lo stesso sistema lineare interpretandolo come un sistema nelle incognite x, y, z, t .

Esercizio 2. Determinare le soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Determinare inoltre i valori del parametro reale k tali che il sistema lineare precedente sia equivalente al sistema lineare:

$$\Sigma_k : \begin{cases} x + 3y = 1 + k^2 \\ y - kz = k - 1 \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare del parametro reale k :

$$\begin{cases} 3x + 8y = 5k + 35 \\ 7x + (2 - k)z = 9 - 8k \\ 2x + 2z = 4 - 2k \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di k il sistema ammette soluzioni e, quando possibile, determinarle.

Esercizio 4. Discutere al variare del parametro reale k il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z :

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 0 \\ x + y = -1 \\ x + ky = -2 \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di k il sistema ammette soluzioni e, quando possibile, determinarle.

Determinare inoltre, quando possibile, le soluzioni dello stesso sistema lineare interpretandolo come un sistema nelle incognite x, y, z, t .

Esercizio 5. Risolvere, al variare del parametro reale a , il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z :

$$\begin{cases} ax + y + 3z = 1 \\ (a + 1)x + 4y + (a + 3)z = 2 \\ (a - 1)x + (1 - a)y = 0 \end{cases}$$

Esercizio 6. Risolvere, al variare del parametro reale b , il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z :

$$\begin{cases} x + by = 2 \\ (b + 1)x + 2y + (b + 2)z = -2 \\ x + by + (b + 2)z = 2 \end{cases}$$

Esercizio 7. Risolvere, al variare del parametro reale h , il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z :

$$\begin{cases} hx + z = 1 \\ x + z = 1 \\ 3x + (h + 1)z = h + 3 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases}$$

Esercizi - Foglio 2

11 Marzo 2016

Esercizio 1. Stabilire se esistono valori del parametro reale k tali che il sistema lineare (nelle incognite x, y, z)

$$\Sigma : \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 2x + y - 2z = -3 \end{cases}$$

sia equivalente al sistema lineare (nelle incognite x, y, z)

$$\Sigma_k : \begin{cases} 2x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 2 \\ kx - 4y + 3z = k \end{cases}$$

Esercizio 2. Risolvere, al variare del parametro reale k , il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z :

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -12 \\ 2x - ky + 2z = 12 \\ -kx + y + 2z = 4 \\ x + y - 2z = -8 \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z :

$$\Sigma : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare:

- a) i valori del parametro reale α , se esistono, per i quali il sistema lineare (nelle incognite x, y, z)

$$A_\alpha : \begin{cases} x + z = 0 \\ \alpha x + y - \alpha z - 1 = 0 \end{cases}$$

è equivalente a Σ ;

- b) i valori del parametro reale β , se esistono, per i quali il sistema lineare (nelle incognite x, y, z)

$$B_\beta : \begin{cases} x + z = 0 \\ x + \beta y + z = 0 \end{cases}$$

è equivalente a Σ .

Esercizio 4. Risolvere, al variare dei parametri reali a e b , il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z :

$$\begin{cases} ax + y + bz = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + ay - bz = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5. Stabilire per quali valori del parametro reale k l'insieme

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + (k + 1)y = 2k\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

Esercizi - Foglio 3

18 Marzo 2016

Esercizio 1. Sia

$$S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid kx - y - kz = k - 2\}.$$

Stabilire per quali valori del parametro reale k l'insieme S_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Per i valori di k trovati,

- a) determinare un insieme B di generatori di S_k ;
- b) stabilire se il vettore $(-1, 0, -1)$ appartiene ad S_k e, in caso affermativo, scriverlo come combinazione lineare degli elementi di B ;
- c) stabilire se il vettore $(1, 4, 1)$ appartiene ad S_k .

Esercizio 2. Stabilire per quali valori del parametro reale k :

- a) i vettori $(1, 0), (k + 1, 0)$ generano $\mathbb{R}^2$;
- b) i vettori $(k, k + 1), (k + 1, 0)$ generano $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3.

- a) Stabilire se i vettori $(1, 1, 1), (1, -1, 0)$ generano $\mathbb{R}^3$.
- b) Stabilire se i vettori $(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 0)$ generano $\mathbb{R}^3$. In caso affermativo, scrivere il vettore $(2, 1, 1)$ come loro combinazione lineare. È possibile farlo in due modi diversi?
- c) Stabilire se i vettori $(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)$ generano $\mathbb{R}^3$. In caso affermativo, scrivere il vettore $(2, 1, 1)$ come loro combinazione lineare. È possibile farlo in due modi diversi?
- d) Stabilire se i vettori $(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 3, 2), (-1, 3, 1)$ generano $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$T = \langle (1, 1, 1), (2, 2, 2), (1, 2, 3), (0, 1, 2) \rangle.$$

- a) Stabilire se il vettore $(1, -1, 2)$ appartiene a T .
- b) Stabilire se i vettori $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, -1, 2)$ generano $\mathbb{R}^3$.
- c) Stabilire se il vettore $(1, -1, -3)$ appartiene a T .
- d) Stabilire se i vettori $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, -1, -3)$ generano $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5. Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali:

- a) $A = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\}$;
- b) $B = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 1\}$;
- c) $C = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0, b + 2c = 0\}$;
- d) $D = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0, b + 2 = 0\}$;
- e) $E = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid ac = 0\}$;
- f) $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \geq 0\}$;
- g) $G = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = b = c = 0\}$.

Esercizio 6. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$S = \langle (1, 1, 1) \rangle, \quad T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z - 2x = 0\}.$$

- a) Trovare un insieme di generatori per T .
- b) Trovare una base $\mathcal{A}$ di S . Tale base è unica?
- c) Verificare che $S \subset T$ e completare la base $\mathcal{A}$ in una base $\mathcal{B}$ di T .
- d) Scrivere le coordinate del vettore $(1, 1, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{A}$ e rispetto alla base $\mathcal{B}$.
- e) Completare la base $\mathcal{B}$ in una base $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^3$.
- f) Scrivere le coordinate del vettore $(1, 1, 0)$ rispetto alla base $\mathcal{D}$.

Esercizi - Foglio 4

1 Aprile 2016

Esercizio 1. Stabilire per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti:

$$u = (-1, k+1, k), \quad v = (k, 0, -2), \quad w = (1, -1, 0).$$

Scelto uno dei valori di k trovati, scrivere un vettore come combinazione lineare degli altri.

Esercizio 2. Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \langle (1, 2, 3), (2, 1, 2), (0, 3, 4) \rangle.$$

- a) Calcolare la dimensione di U e trovare una sua base $\mathcal{B}$.
- b) Calcolare le coordinate del vettore $(0, 3, 4)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
- c) Determinare, se possibile, un vettore di $\mathbb{R}^3$ che non appartenga ad U .

Esercizio 3. Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \langle (1, 1, 2), (0, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 0, 1) \rangle.$$

- a) Calcolare la dimensione di U e determinare una sua base $\mathcal{B}$.
- b) Completare $\mathcal{B}$ in una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$.
- c) Siano $v = (1, 2, 0)_{\mathcal{B}'}$ e $w = (1, 2)_{\mathcal{B}}$. Stabilire se $v = w$.

Esercizio 4. Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, y - 2z = 0\}.$$

- a) Trovare una base $\mathcal{B}$ di W .
- b) Esibire un insieme di generatori di W che non sia una base di W .
- c) Completare $\mathcal{B}$ in una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.
- d) Scrivere le coordinate del vettore $(4, 4, 2)$ rispetto alla base $\mathcal{C}$.

Esercizi - Foglio 5

7 Aprile 2016

Esercizio 1. Si consideri il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \langle (1, 1, 1), (1, 2, 2), (1, 3, 3), (1, 4, 4) \rangle.$$

- a) Calcolare la dimensione di U e determinare una sua base $\mathcal{B}$.
- b) Completare $\mathcal{B}$ in una base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$.
- c) Stabilire se il vettore $u = (1, 0, 0)$ appartiene a U e, in caso affermativo, determinare le coordinate di u rispetto alla base $\mathcal{B}$.
- d) Determinare, se possibile, un sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ tale che $\dim V = 2$ e $\dim(U \cap V) = 1$.
- e) È possibile descrivere U come insieme delle soluzioni di un'equazione lineare? In caso affermativo, determinare una tale equazione.

Esercizio 2. Si considerino i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}, \quad T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

- a) Calcolare la dimensione di S e di T ; determinare una base $\mathcal{B}$ di S e una base $\mathcal{C}$ di T .
- b) Stabilire se S coincide con T . In caso negativo, esibire, se possibile, un vettore di S che non appartenga a T ed un vettore di T che non appartenga ad S .
- c) Completare, se possibile, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ in una base di $\mathbb{R}^3$ nello stesso modo.
- d) Determinare, se possibile, un vettore v che non appartenga ai due sottospazi S e T ; scrivere, se possibile, v come somma di un vettore $s \in S$ e di un vettore $t \in T$. Tale scrittura è unica?
- e) Determinare una base di $S \cap T$.

Esercizio 3. Si considerino i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \langle (2, 1, 0), (4, 3, 2), (6, 4, 2) \rangle,$$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2z = y\}, \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 2y, x = z\}.$$

- a) Calcolare la dimensione di U e determinare una sua base $\mathcal{B}$.
- b) Stabilire se i sottospazi U e W coincidono. In caso negativo, esibire, se possibile, un vettore di U che non appartenga a W ed un vettore di W che non appartenga ad U .
- c) Determinare $U \cap V$, $V \cap W$ e $U \cap W$.
- d) Stabilire se $S = \{(x, y, z) \in V \mid x + z = 1\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. In caso negativo, determinare il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^3$ contenente S .

Esercizio 4. Determinare una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che:

- $v_1, v_2 \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\}$;
- $v_2, v_3 \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 2x\}$;
- $(1, 2, 1) = (1, 0, -1)_{\mathcal{B}}$.

Osservazione. Siano S e T sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora l'insieme $S \cap T = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \in S, v \in T\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Esercizi - Foglio 6

15 Aprile 2016

Esercizio 1. Nel piano si considerino i punti:

$$A = (k^2, 3k + 1), \quad B = (2, 1), \quad C = (3, 4).$$

Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i tre punti sono allineati.

Esercizio 2. Nel piano si consideri la retta $r : (1, 1) + \langle (2, 1) \rangle$.

- a) Scrivere equazioni parametriche ed equazione cartesiana della retta r .
- b) Trovare la retta s_1 parallela alla retta r e passante per il punto $(2, 0)$.
- c) Trovare una retta s_2 incidente la retta r e passante per il punto $(2, 0)$.
- d) Trovare un punto del piano non appartenente alle rette r, s_1, s_2 .

Esercizio 3. Nel piano si considerino i punti $P = (2, -3)$, $Q = (5, 3)$ e la retta di equazione $s : 2x - k^2y = k + 6$, $k \in \mathbb{R}$.

- a) Determinare l'equazione cartesiana della retta r passante per i punti P e Q .
- b) Studiare la posizione reciproca delle rette r e s al variare di k .

Esercizio 4. Sia $W_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + ky = k, kx + y = -k\}$, $k \in \mathbb{R}$.

- a) Stabilire se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che W_k sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.
- b) Sia $k = -1$. Determinare un vettore $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tale che $W_k + (\alpha, \beta)$ sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.
- c) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme W_k , interpretato come sottovarietà lineare del piano, individua una retta. Cosa rappresenta W_k per tutti gli altri valori di k ?

Esercizio 5. Si considerino nel piano le tre rette di equazione:

$$r_1 : x + y = 1, \quad r_2 : x + 2y = 3, \quad r_3 : 3x + 2y = 3.$$

- a) Stabilire se esiste un punto di intersezione comune alle rette r_1, r_2, r_3 .
- b) Trovare le coordinate dei punti $A_1 = r_1 \cap r_2$, $A_2 = r_2 \cap r_3$, $A_3 = r_1 \cap r_3$.
- c) Verificare che i punti A_1, A_2, A_3 individuano i vertici di un triangolo.
- d) Trovare l'equazione della retta s_i passante per il vertice A_i del triangolo e parallela al lato opposto, per ogni $i = 1, 2, 3$.

Esercizi - Foglio 7

22 Aprile 2016

Esercizio 1. Nello spazio tridimensionale si considerino i punti:

$$A = (k + 1, k^2, 2k), \quad B = (1, 2, k), \quad C = (0, 3, 0), \quad D = (4, -1, 4).$$

Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i quattro punti sono complanari (ma non allineati). In tali casi,

- a) determinare equazioni parametriche e equazione cartesiana del piano π che li contiene;
- b) stabilire se la retta $r : \begin{cases} x = z \\ y = 1 \end{cases}$ è parallela a π . In caso negativo, determinare $\pi \cap r$;
- c) trovare l'equazione cartesiana del piano parallelo a π passante per il punto $(0, 1, 2)$.

Esercizio 2. Si considerino nello spazio tridimensionale le seguenti rette:

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - y = -1 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

- a) Studiare la posizione reciproca di r e s .
- b) Scrivere le equazioni cartesiane di una retta t parallela a r e passante per il punto $P = (1, 1, 1)$.
- c) Scrivere le equazioni parametriche di t .
- d) Sia $P = (a, b, c)$ un punto di r . Il punto $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ appartiene a r ?
- e) Sia $Q = (a, b, c)$ un punto di s . Il punto $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ appartiene a s ?

Esercizio 3. Nello spazio tridimensionale si considerino i seguenti piani:

$$\pi : (0, 6, 0) + \langle (1, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle, \quad \sigma : (1, 0, 1) + \langle (1, 0, -2), (0, 1, 1) \rangle.$$

- a) Studiare la posizione reciproca di π e σ .
- b) Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto $(1, 1, -2)$ e parallela ai piani π e σ .

Esercizio 4. Sia $t \in \mathbb{R}$. Stabilire se le seguenti rette sono uguali:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -5 + 2t \\ z = 9 - 4t \end{cases}$$

Scrivere le equazioni cartesiane di r e s .

Esercizio 5. Nello spazio tridimensionale si considerino i piani:

$$\pi : (1, 1, 1) + \langle (1, 2, -1), (0, 2, 1) \rangle, \quad \sigma : (2, 5, 1) + \langle (1, 4, 0), (1, 0, -2) \rangle.$$

- a) Stabilire se i due piani coincidono.
- b) Determinare le equazioni cartesiane di π e σ .
- c) Stabilire se il punto $(2, 2, 2)$ appartiene al piano π .
- d) Stabilire se il vettore $v = (2, 4, -2)$ è parallelo al piano π .

Esercizio 6. Nello spazio tridimensionale, sono date le seguenti rette:

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad s_k : (2, 0, 1) + \langle (k, 1, -2) \rangle$$

con $k \in \mathbb{R}$. Determinare per quali valori di k , se esistono, le rette sono parallele e per quali valori di k , se esistono, le rette sono sghembe.

Esercizi - Foglio 8

29 Aprile 2016

Esercizio 1. Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}.$$

- a) Determinare una base $\mathcal{B}$ di T e calcolare la dimensione di T .
- b) Determinare il sottospazio $T^\perp$ e calcolare la dimensione di $T^\perp$.
- c) Completare $\mathcal{B}$ in una base di $\mathbb{R}^3$.
- d) L'insieme $\mathcal{C} = \{(4, 2, 0), (0, 3, 2), (4, 5, 2)\}$ è una base di T ? È un insieme di generatori di T ? Se possibile, estrarre da $\mathcal{C}$ una base di T .
- e) Determinare un sottospazio di T di dimensione 1. Quanti sottospazi di dimensione 1 contiene T ?

Esercizio 2. Si consideri il sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori:

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, -1, -1), \quad v_3 = (3, 1, 1).$$

- a) Determinare la dimensione di V .
- b) Trovare una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V .
- c) Completare la base $\mathcal{B}$ in una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
- d) Determinare la proiezione ortogonale sul sottospazio V dei vettori $w_1 = (1, 0, 0)$ e $w_2 = (0, 1, 0)$.

Esercizio 3. Nello spazio tridimensionale si considerino le seguenti rette:

$$r : (0, 0, 1) + \langle (1, 1, 0) \rangle, \quad s : (2, 2, 2) + \langle (1, 1, 1) \rangle.$$

Determinare il piano π passante per il punto $(0, 0, 0)$ e contenente la retta r e il piano σ passante per $(0, 0, 0)$ e contenente la retta s . Tali piani sono unici?

Esercizio 4. Nello spazio tridimensionale si considerino i piani:

$$\pi : (1, 2, 0) + \langle (0, 1, -1), (1, 0, 1) \rangle, \quad \sigma : (1, 0, 1) + \langle (1, 2, 0), (1, 1, 1) \rangle,$$

e la retta $r : \langle (1, -4, 2) \rangle$.

- a) Scrivere l'equazione cartesiana di un piano parallelo a π passante per il punto $(1, 0, 1)$.
- b) Stabilire se π e σ sono paralleli.
- c) Scrivere un'equazione cartesiana di ciascuno dei piani π e σ .
- d) Determinare $s : \pi \cap \sigma$ e interpretare geometricamente il risultato ottenuto.
- e) Stabilire la posizione reciproca di r e s .
- f) Determinare, se possibile, una retta t incidente r e non incidente s .

Esercizi - Foglio 9

5 Maggio 2016

Esercizio 1. Nello spazio tridimensionale, sono dati i piani

$$\pi : x - y + z = 1, \quad \sigma : 2x - y + 2z = 0.$$

Determinare:

- a) la retta r parallela ai piani π e σ passante per il punto $P = (1, 2, 1)$;
- b) la retta s ortogonale al piano π passante per P ;
- c) la distanza tra la retta r e il piano σ .

Esercizio 2. Nello spazio tridimensionale, è data la retta

$$r : \begin{cases} x - y + z = -1 \\ z = 1. \end{cases}$$

Determinare:

- a) il piano passante per il punto $P = (1, 2, 1)$ e ortogonale alla retta r ;
- b) la retta passante per P e incidente perpendicolarmente la retta r .

Esercizio 3. Date due rette sghembe:

- a) esiste sempre un piano parallelo ad entrambe?
- b) esiste sempre un piano ortogonale ad entrambe?

Esercizio 4. Sia $S = \langle (1, 2, 3) \rangle$. Determinare:

- a) i vettori di $\mathbb{R}^3$ aventi proiezione ortogonale su S uguale a $(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$;
- b) i vettori di $\mathbb{R}^3$ aventi proiezione ortogonale su S uguale a $(1, 2, 3)$ e proiezione ortogonale su $S^\perp$ uguale a $(-2, 1, 0)$;
- c) i vettori di S aventi proiezione ortogonale su $S^\perp$ uguale a $(-2, 1, 0)$;
- d) una base ortonormale di $S^\perp$.

Esercizi - Foglio 10

12 Maggio 2016

Esercizio 1. Nello spazio tridimensionale, sono date le rette:

$$r : x = y = z \qquad s : \begin{cases} x + y + z = 12 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

- a) Verificare che le rette r e s sono sghembe.
- b) Determinare la retta t incidente perpendicolarmente r e s .
- c) Determinare il piano π contenente t passante per $A = (2, 0, 0)$.
- d) Determinare il piano σ parallelo a r e s passante per $B = (2, 2, 1)$.

Esercizio 2. Sia $t \in \mathbb{R}$. Nello spazio tridimensionale, sono date le rette:

$$r : \begin{cases} 2x + y = -1 \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

- a) Stabilire la posizione reciproca delle rette r e s .
- b) Stabilire se esiste una retta t passante per $(0, 0, 0)$ e complanare sia con r sia con s . In caso affermativo, stabilire se t è unica e determinare le equazioni cartesiane di t .
- c) Studiare la posizione reciproca di r e t e quella di s e t .
- d) Risolvere lo stesso esercizio considerando le rette:

$$r' : \begin{cases} 2x + y = 5 \\ y - z = 1 \end{cases} \qquad s' : \begin{cases} x = 2t \\ y = t - 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

e motivare eventuali differenze di posizione reciproca con la retta t' .
[*Suggerimento.* Come sono tra loro i vettori direttori di r e s , r' e s' ?]

Esercizio 3. Nello spazio tridimensionale, determinare l'equazione cartesiana del piano contenente la retta $r : x - y = z = 1$ e parallelo alla retta $s : x - 3 = y = -z$.

Esercizio 4. Nello spazio tridimensionale, sono date le rette

$$r : (1, 2, 3) + \langle (1, 1, 1) \rangle, \quad s : (-3, -3, -3) + \langle (1, 1, 1) \rangle.$$

Determinare una retta t equidistante dalle rette r e s e ad esse parallela. Tale retta è unica?

Esercizio 5. Nello spazio tridimensionale, determinare i piani che distano $1/\sqrt{6}$ dal punto $P = (1, 1, 1)$ e contengono la retta $r : x - y = 1 = y + z$.

Esercizi - Foglio 11

20 Maggio 2016

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare associata alla matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcolare i vettori $f(0, 0, 0)$ e $f(1, 1, 1)$.
- b) Determinare il sottoinsieme $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$ e stabilire se è un sottospazio vettoriale.
- c) Determinare il sottoinsieme $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (1, 1, 1)\}$ e stabilire se è un sottospazio vettoriale.
- d) Esiste un vettore v di $\mathbb{R}^3$ non appartenente ad A tale che $B = v + A$?
- e) Interpretare geometricamente A e B nello spazio tridimensionale.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Determinare nucleo e immagine di f .
- b) Determinare due vettori linearmente dipendenti di $\mathbb{R}^4$ che hanno la stessa immagine tramite f .
- c) Determinare due vettori di $\mathbb{R}^4$ che hanno la stessa immagine non nulla tramite f .
- d) Determinare tre vettori appartenenti all'immagine di f a due a due linearmente indipendenti che non formino una sua base.
- e) Calcolare l'immagine del vettore $(1, 1, 0, 0)$ tramite f .
- f) Calcolare la controimmagine del vettore $(2, 3, 4)$ tramite f .

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Determinare una base di $\ker f$ e una base di $\operatorname{Im} f$ al variare di k .
- b) Per quali valori di k il vettore $(1, k-1, k)$ appartiene a $\ker f$?
- c) Per quali valori di k il vettore $(1, k-1, k)$ appartiene a $\operatorname{Im} f$?
- d) Calcolare la controimmagine tramite f del vettore $(1, 0, 0)$ al variare di k .
- e) Calcolare la controimmagine tramite f del vettore $(1, k, 1)$ al variare di k .
- f) Per quali valori di k il vettore $(2, 0, 1)$ appartiene alla controimmagine tramite f del vettore $(3, 1, 1)$?
- g) Per quali valori di k il vettore $(1, 1, 1)$ appartiene alla controimmagine tramite f del vettore $(3, 1, 1)$?