



Università di Pisa

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Candidato  
Roberto Pagaria

# Geometria delle Varietà Quiver

Relatore  
Prof. Andrea Maffei

15 luglio 2016

## 1 Rappresentazioni dei quiver

- Definizioni
- Approccio algebrico
- Approccio geometrico
- Funtori di riflessione
- Teorema di Gabriel
- Teorema di Kac

## 2 Le varietà quiver

- Definizioni
- Funtori generalizzati
- Decomposizione canonica
- Morfismi étale
- Normalità delle varietà

Un quiver è un grafo orientato finito.

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2 \looparrowright \gamma$$

Un quiver è un grafo orientato finito.

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2 \curvearrowright \gamma$$

Una rappresentazione del quiver è:

$$V_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{f_\alpha} \\ \xleftarrow{f_\beta} \end{array} V_2 \curvearrowright f_\gamma$$

Un quiver è un grafo orientato finito.

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2 \curvearrowright \gamma$$

Una rappresentazione del quiver è:

$$V_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{f_\alpha} \\ \xleftarrow{f_\beta} \end{array} V_2 \curvearrowright f_\gamma$$

$$W_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{g_\alpha} \\ \xleftarrow{g_\beta} \end{array} W_2 \curvearrowright g_\gamma$$

Un quiver è un grafo orientato finito.

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} 2 \curvearrowright \gamma$$

Una rappresentazione del quiver è:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_\alpha} \\ \xrightarrow{f_\beta} \end{array} & V_2 \curvearrowright f_\gamma \\ \rho_1 \downarrow & & \downarrow \rho_2 \\ W_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{g_\alpha} \\ \xrightarrow{g_\beta} \end{array} & W_2 \curvearrowright g_\gamma \end{array}$$

Se  $\rho_{h(\delta)} f_\delta = g_\delta \rho_{t(\delta)}$  allora  $\rho$  è un morfismo di rappresentazioni.  
 Studiamo le rappresentazioni indecomponibili a meno di isomorfismo.

Un quiver è un grafo orientato finito.

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} 2 \curvearrowright \gamma$$

Una rappresentazione del quiver è:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_\alpha} \\ \xrightarrow{f_\beta} \end{array} & V_2 \curvearrowright f_\gamma \\ \rho_1 \downarrow & & \downarrow \rho_2 \\ W_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{g_\alpha} \\ \xrightarrow{g_\beta} \end{array} & W_2 \curvearrowright g_\gamma \end{array}$$

Se  $\rho_{h(\delta)} f_\delta = g_\delta \rho_{t(\delta)}$  allora  $\rho$  è un morfismo di rappresentazioni.  
 Studiamo le rappresentazioni indecomponibili a meno di isomorfismo.  
 La dimensione di una rappresentazione  $(V, f)$  è il vettore  
 $\dim V = (\dim_k V_j) \in \mathbb{Z}^n$ .

## Definizione

La  $k$ -algebra dei cammini è  $A = kQ = \langle \text{cammini} \rangle_k$ .

Esempio:

$$kQ = k[e_1, e_2, \gamma^i, \gamma^j \alpha, \gamma^l \beta] = k[e_1, e_2, \alpha, \beta, \gamma] / I \quad \text{dove}$$

$$I = (e_1 + e_2 - 1, e_1 e_2, e_2 e_1, e_1 \alpha, e_1 \beta, \\ e_1 \gamma, \beta \alpha, \alpha \beta, \alpha \gamma, \beta \gamma, \alpha e_2, \beta e_2, \gamma e_1)_{bil}$$

È non commutativa e noetheriana a sinistra ma non a destra.

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} 2 \curvearrowright \gamma$$



## Definizione

La  $k$ -algebra dei cammini è  $A = kQ = \langle \text{cammini} \rangle_k$ .

Esempio:

$$kQ = k[e_1, e_2, \gamma^i, \gamma^j \alpha, \gamma^l \beta] = k[e_1, e_2, \alpha, \beta, \gamma] / I.$$

## Osservazione

*I  $kQ$ -moduli sinistri sono rappresentazioni del quiver  $Q$  e viceversa.*

## Definizione

La  $k$ -algebra dei cammini è  $A = kQ = \langle \text{cammini} \rangle_k$ .

Esempio:

$$kQ = k[e_1, e_2, \gamma^i, \gamma^j \alpha, \gamma^l \beta] = k[e_1, e_2, \alpha, \beta, \gamma] / I.$$

## Osservazione

*I  $kQ$ -moduli sinistri sono rappresentazioni del quiver  $Q$  e viceversa.*

Esempio  $\tilde{A}_0$        $1 \rightrightarrows \gamma$       :

$V \rightrightarrows f$

## Definizione

La  $k$ -algebra dei cammini è  $A = kQ = \langle \text{cammini} \rangle_k$ .

Esempio:

$$kQ = k[e_1, e_2, \gamma^i, \gamma^j \alpha, \gamma^l \beta] = k[e_1, e_2, \alpha, \beta, \gamma] / I.$$

## Osservazione

*I  $kQ$ -moduli sinistri sono rappresentazioni del quiver  $Q$  e viceversa.*

Esempio  $\tilde{A}_0$        $1 \rightrightarrows \gamma$       :

$$V \rightrightarrows f$$

$$V \rightrightarrows g$$

## Definizione

La  $k$ -algebra dei cammini è  $A = kQ = \langle \text{cammini} \rangle_k$ .

Esempio:

$$kQ = k[e_1, e_2, \gamma^i, \gamma^j \alpha, \gamma^l \beta] = k[e_1, e_2, \alpha, \beta, \gamma] / I.$$

## Osservazione

*I  $kQ$ -moduli sinistri sono rappresentazioni del quiver  $Q$  e viceversa.*

Esempio  $\tilde{A}_0$   $1 \rightrightarrows \gamma$  :

Le rappresentazioni sono isomorfe se  $g = \rho f \rho^{-1}$ , gli indecomponibili sono i blocchi di Jordan.

$$\begin{array}{c} V \rightrightarrows f \\ \downarrow \rho \\ V \rightrightarrows g \end{array}$$

## Definizione

La  $k$ -algebra dei cammini è  $A = kQ = \langle \text{cammini} \rangle_k$ .

Esempio:

$$kQ = k[e_1, e_2, \gamma^i, \gamma^j \alpha, \gamma^l \beta] = k[e_1, e_2, \alpha, \beta, \gamma] / I.$$

## Osservazione

*I  $kQ$ -moduli sinistri sono rappresentazioni del quiver  $Q$  e viceversa.*

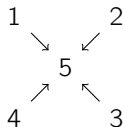
Esempio  $\tilde{A}_0$   $1 \rightrightarrows \gamma$  :

$$\begin{array}{c} V \rightrightarrows f \\ \downarrow \rho \\ V \rightrightarrows g \end{array}$$

Le rappresentazioni sono isomorfe se  $g = \rho f \rho^{-1}$ , gli indecomponibili sono i blocchi di Jordan.  $A = k[t]$  e alla rappresentazione corrisponde il modulo:

$$\begin{array}{ccc} k[t] \otimes V & \longrightarrow & V \\ (p, v) & \longmapsto & p(f)v \end{array}$$

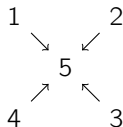
Esempio  $\tilde{D}_4$ :



### Osservazione

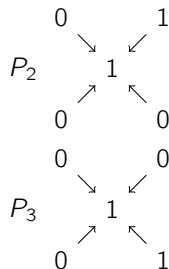
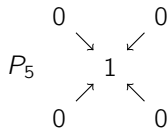
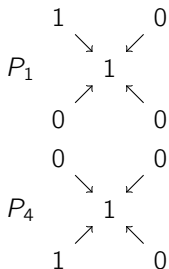
*Tutti e soli moduli proiettivi indecomponibili sono  $P_i = Ae_i$  dato che  $A = \bigoplus_i Ae_i$  come moduli sinistri.*

Esempio  $\tilde{D}_4$ :



### Osservazione

*Tutti e soli moduli proiettivi indecomponibili sono  $P_i = Ae_i$  dato che  $A = \bigoplus_i Ae_i$  come moduli sinistri.*



## Teorema

Per ogni  $A$  modulo sinistro  $X$  esiste la seguente risoluzione proiettiva:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\gamma \in Q} P_{h(\gamma)} \otimes_k e_{t(\gamma)} X \xrightarrow{f} \bigoplus_{i \in Q} P_i \otimes_k e_i X \xrightarrow{g} X \rightarrow 0$$

dove  $f$  e  $g$  sono definite per estensione lineare da

$$\begin{aligned} f(a \otimes x) &= a\gamma \otimes x - a \otimes \gamma x & \forall a \in P_{h(\gamma)}, x \in e_{t(\gamma)} X \\ g(a \otimes x) &= ax & \forall a \in P_i, x \in e_i X \end{aligned}$$



## Teorema

Per ogni  $A$  modulo sinistro  $X$  esiste la seguente risoluzione proiettiva:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\gamma \in Q} P_{h(\gamma)} \otimes_k e_{t(\gamma)} X \xrightarrow{f} \bigoplus_{i \in Q} P_i \otimes_k e_i X \xrightarrow{g} X \rightarrow 0$$

dove  $f$  e  $g$  sono definite per estensione lineare da

$$\begin{aligned} f(a \otimes x) &= a\gamma \otimes x - a \otimes \gamma x & \forall a \in P_{h(\gamma)}, x \in e_{t(\gamma)} X \\ g(a \otimes x) &= ax & \forall a \in P_i, x \in e_i X \end{aligned}$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in Q} \alpha_i \beta_i - \sum_{\gamma \in Q} \alpha_{t(\gamma)} \beta_{h(\gamma)} \quad (\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha \rangle$$

$$q(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha, \alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle$$

Applico il funtore  $\text{Hom}_A(\cdot, Y)$ .

$$\text{hom}(X, Y) - \text{ext}^1(X, Y) = \langle \dim X, \dim Y \rangle$$

$$\text{end}(X) - \text{ext}^1(X, X) = q(\dim X)$$

Fissato  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  si definisce lo spazio delle rappresentazioni con la topologia di Zariski.

$$\text{Rep}(Q, \alpha) = \prod_{\gamma \in Q} \text{Mat}(\alpha_{h(\gamma)}, \alpha_{t(\gamma)}, k)$$

Su cui agisce il gruppo  $\text{Gl}(\alpha) = \prod_i \text{Gl}(\alpha_i, k)$  per coniugio.

$$\dim \text{Gl}(\alpha) - \dim \text{Rep}(\alpha) = q(\alpha)$$

La codimensione di un orbita è  $\text{codim}(\mathcal{O}_X) = \text{ext}^1(X, X)$ .

### Osservazione

*Se  $X$  è indecomponibile e ha orbita aperta allora  $q(\dim X) \geq 1$ .*

Fissato  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  si definisce lo spazio delle rappresentazioni con la topologia di Zariski.

$$\text{Rep}(Q, \alpha) = \prod_{\gamma \in Q} \text{Mat}(\alpha_{h(\gamma)}, \alpha_{t(\gamma)}, k)$$

Su cui agisce il gruppo  $\text{Gl}(\alpha) = \prod_i \text{Gl}(\alpha_i, k)$  per coniugio.

$$\dim \text{Gl}(\alpha) - \dim \text{Rep}(\alpha) = q(\alpha)$$

La codimensione di un'orbita è  $\text{codim}(\mathcal{O}_X) = \text{ext}^1(X, X)$ .

### Osservazione

*Se  $X$  è indecomponibile e ha orbita aperta allora  $q(\dim X) \geq 1$ .*

### Proposizione

*Se  $0 \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow 0$  non spezza, allora:*

$$\mathcal{O}_{X \oplus Y} \subseteq \overline{\mathcal{O}_Z} \setminus \mathcal{O}_Z$$

*Inoltre se un'orbita è chiusa allora la rappresentazione è semisemplice.*

Si definisce il *funtore di riflessione*  $\tau = \text{Hom}_k(\text{Ext}_A^1(\cdot, A), k)$ .

### Proposizione

Il funtore additivo  $\tau$  fornisce la seguente bigezione:

$$\{\text{indecomponibili non proiettivi}\} \xrightarrow{\tau} \{\text{indecomponibili non iniettivi}\}$$

il cui aggiunto è  $\tau^- = \text{Ext}_A^1(\text{Hom}_k(\cdot, k), A)$ .

Si definisce il *funtore di riflessione*  $\tau = \text{Hom}_k(\text{Ext}_A^1(\cdot, A), k)$ .

### Proposizione

Il funtore additivo  $\tau$  fornisce la seguente bigezione:

$$\{\text{indecomponibili non proiettivi}\} \xrightarrow{\tau} \{\text{indecomponibili non iniettivi}\}$$

il cui aggiunto è  $\tau^- = \text{Ext}_A^1(\text{Hom}_k(\cdot, k), A)$ .

Esiste un'applicazione lineare  $c : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  che sia un'isometria rispetto  $(\cdot, \cdot)$  e tale che

$$\dim \tau X = c \dim X$$

per ogni indecomponibile non proiettivo; inoltre  $c \dim P_i < 0$ .

Si definisce il *funtore di riflessione*  $\tau = \text{Hom}_k(\text{Ext}_A^1(\cdot, A), k)$ .

### Proposizione

Il funtore additivo  $\tau$  fornisce la seguente bigezione:

$$\{\text{indecomponibili non proiettivi}\} \xrightarrow{\tau} \{\text{indecomponibili non iniettivi}\}$$

il cui aggiunto è  $\tau^- = \text{Ext}_A^1(\text{Hom}_k(\cdot, k), A)$ .

Esiste un'applicazione lineare  $c : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  che sia un'isometria rispetto  $(\cdot, \cdot)$  e tale che

$$\dim \tau X = c \dim X$$

per ogni indecomponibile non proiettivo; inoltre  $c \dim P_i < 0$ .

Una radice è  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$  con  $q(\alpha) \leq 1$  e "supporto connesso". Il sistema di radici  $\Phi$  è l'insieme di tutte le radici,  $c$  è un automorfismo di  $\Phi$ .

## Teorema (Gabriel)

- *Esistono finite rappresentazioni indecomponibili se e solo se la forma  $(\cdot, \cdot)$  è definita positiva.*
- *In questo caso  $\dim : \{\text{indecomponibili}\} / \text{iso} \rightarrow \Phi \cap \mathbb{N}^n$  è una bijezione.*

I quiver in questione sono tutti quelli con grafo sottostante di Dynkin ( $A_n, D_n, E_6, E_7$  e  $E_8$ ).

## Teorema (Gabriel)

- *Esistono finite rappresentazioni indecomponibili se e solo se la forma  $(\cdot, \cdot)$  è definita positiva.*
- *In questo caso  $\dim : \{\text{indecomponibili}\} / \text{iso} \rightarrow \Phi \cap \mathbb{N}^n$  è una bigezione.*

Dimostrazione  $\Rightarrow$ : per ogni  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  esistono finite orbite quindi una aperta. In conclusione  $q(\alpha) = \text{end}(X) > 0$ .

$$q(\alpha - \beta) = q(\alpha) + q(\beta) - (\alpha, \beta) > 0$$

La matrice è a coefficienti in  $\mathbb{Z}$  quindi è definita positiva.



## Teorema (Gabriel)

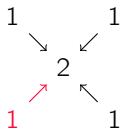
- *Esistono finite rappresentazioni indecomponibili se e solo se la forma  $(\cdot, \cdot)$  è definita positiva.*
- *In questo caso  $\dim : \{\text{indecomponibili}\} /_{\text{iso}} \rightarrow \Phi \cap \mathbb{N}^n$  è una bigezione.*

## Lemma

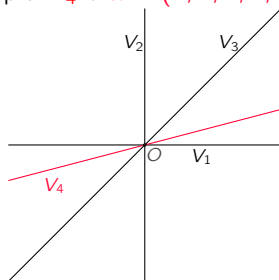
*Se  $(\cdot, \cdot)$  è definita positiva il sistema di radici è finito e per ogni  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  esiste  $k$  con  $c^k \alpha \notin \mathbb{N}^n$ .*

Dimostrazione  $\Leftarrow$ : Sia  $X$  indecomponibile non proiettivo,  $\tau X$  è indecomponibile di dimensione  $c \dim X$ . Iterando ottengo  $\tau^{k-1} X \simeq P_i$ , quindi  $X \simeq (\tau^-)^{k-1} P_i$  e  $\dim X \in \Phi$ . La soglia  $k$  dipende solo da  $\dim X$  ed esistono finiti proiettivi indecomponibili.

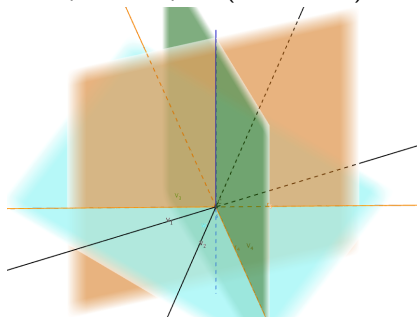
Esempio  $D_4$  e  $\alpha = (1, 1, 1, 2)$  e esempio  $\tilde{D}_4$  e  $\tilde{\alpha} = (1, 1, 1, 1, 2)$ :



$$q(\alpha) = 1.$$

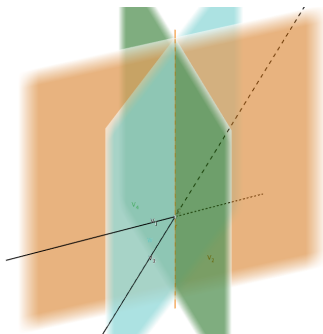
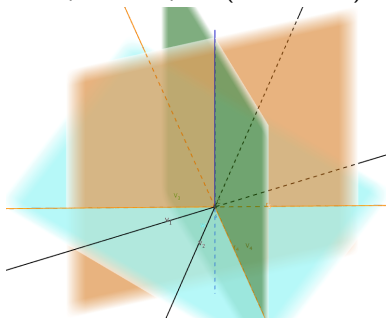


Esempio  $\tilde{D}_4$  e  $\beta = (1, 1, 2, 2, 3)$ :



$$\beta = (1, 1, 1, 1, 2) + (0, 0, 1, 1, 1)$$

Esempio  $\tilde{D}_4$  e  $\beta = (1, 1, 2, 2, 3)$ :



$$\beta = (1, 1, 1, 1, 2) + (0, 0, 1, 1, 1)$$

È indecomponibile.

I quiver euclidei sono  $\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7$  e  $\tilde{E}_8$ .

### Lemma

*Se  $Q$  è un quiver euclideo e  $\delta$  la radice immaginaria minima allora gli indecomponibili di dimensione  $n\delta$  sono parametrizzati da  $\mathbb{P}_k^1$ .*

Per  $\tilde{D}_4$  la radice immaginaria è  $\tilde{\alpha} = (1, 1, 1, 1, 2)$ .

I quiver euclidei sono  $\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7$  e  $\tilde{E}_8$ .

### Lemma

*Se  $Q$  è un quiver euclideo e  $\delta$  la radice immaginaria minima allora gli indecomponibili di dimensione  $n\delta$  sono parametrizzati da  $\mathbb{P}_k^1$ .*

Per  $\tilde{D}_4$  la radice immaginaria è  $\tilde{\alpha} = (1, 1, 1, 1, 2)$ .

### Teorema (di Kac)

*Esiste un indecomponibile di dimensione  $\alpha$  se e solo se  $\alpha$  è radice positiva.*

*Le rappresentazioni indecomponibili di dimensione  $\alpha$  dipendono da  $1 - q(\alpha)$  parametri.*

Si costruiscono il fibrato cotangente e la mappa momento:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \beta \\
 & & \downarrow \\
 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 \\
 & \xleftarrow{\bar{\alpha}} & \\
 & & \uparrow \\
 & & \bar{\beta}
 \end{array}$$

Si costruiscono il fibrato cotangente e la mappa momento:

$$\begin{array}{ccc}
 Q \text{ e } \overline{Q} & & \\
 & \beta & \\
 & \downarrow & \\
 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 \\
 & \xleftarrow{\bar{\alpha}} & \\
 & \bar{\beta} & \\
 & \uparrow & \\
 & \bar{\beta} & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) \\
 \pi \downarrow \\
 \text{Rep}(Q, \alpha)
 \end{array}$$

$$\pi(\{f_\gamma\}, \{f_{\bar{\gamma}}\}) = (\{f_\gamma\})$$



Si costruiscono il fibrato cotangente e la mappa momento:

$$\begin{array}{ccc}
 Q \text{ e } \bar{Q} & & \\
 & \beta & \\
 & \downarrow & \\
 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 \\
 & \bar{\alpha} & \uparrow \\
 & & \bar{\beta}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \text{Rep}(\bar{Q}, \alpha) & \xrightarrow{\mu_\alpha} & \mathfrak{gl}_0(\alpha) \\
 \pi \downarrow & & \\
 \text{Rep}(Q, \alpha) & & 
 \end{array}$$

$$\pi(\{f_\gamma\}, \{f_{\bar{\gamma}}\}) = (\{f_\gamma\})$$

La mappa momento è:

$$\mu_\alpha(X) = \sum_{\gamma \in Q} f_\gamma f_{\bar{\gamma}} - f_{\bar{\gamma}} f_\gamma$$

ed è  $\text{Gl}(\alpha)$ -equivariante.

Si costruiscono il fibrato cotangente e la mappa momento:

$$\begin{array}{ccc}
 Q \text{ e } \overline{Q} & & \\
 & \begin{array}{c} \beta \\ \downarrow \\ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \\ \leftarrow \overline{\alpha} \\ \uparrow \\ \overline{\beta} \end{array} & \begin{array}{c} \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) \xrightarrow{\mu_\alpha} \mathfrak{gl}_0(\alpha) \\ \pi \downarrow \\ \text{Rep}(Q, \alpha) \end{array}
 \end{array}$$

$$\pi(\{f_\gamma\}, \{f_{\overline{\gamma}}\}) = (\{f_\gamma\})$$

La mappa momento è:

$$\mu_\alpha(X) = \sum_{\gamma \in Q} f_\gamma f_{\overline{\gamma}} - f_{\overline{\gamma}} f_\gamma$$

ed è  $\text{Gl}(\alpha)$ -equivariante.

$$\mu_\alpha(X) = (-f_{\overline{\alpha}} f_\alpha, f_\alpha f_{\overline{\alpha}} + [f_\beta, f_{\overline{\beta}}])$$

Si costruiscono il fibrato cotangente e la mappa momento:

$$\begin{array}{ccc}
 Q \text{ e } \bar{Q} & & \\
 & \begin{array}{c} \beta \\ \downarrow \\ 1 \xrightleftharpoons[\bar{\alpha}]{\alpha} 2 \\ \uparrow \\ \bar{\beta} \end{array} & \begin{array}{c} \text{Rep}(\bar{Q}, \alpha) \xrightarrow{\mu_\alpha} \mathfrak{gl}_0(\alpha) \\ \pi \downarrow \\ \text{Rep}(Q, \alpha) \end{array}
 \end{array}$$

$$\pi(\{f_\gamma\}, \{f_{\bar{\gamma}}\}) = (\{f_\gamma\})$$

Studiamo la fibra:

$$\mu_\alpha(X) = \lambda \text{ con } \lambda = \prod_i \lambda_i \text{Id}$$

Si costruiscono il fibrato cotangente e la mappa momento:

$$\begin{array}{ccc}
 Q \text{ e } \overline{Q} & & \\
 & \begin{array}{c} \beta \\ \curvearrowright \\ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \\ \xleftarrow{\bar{\alpha}} \\ \bar{\beta} \\ \curvearrowleft \end{array} & \begin{array}{c} \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) \xrightarrow{\mu_\alpha} \mathfrak{gl}_0(\alpha) \\ \pi \downarrow \\ \text{Rep}(Q, \alpha) \end{array}
 \end{array}$$

$$\pi(\{f_\gamma\}, \{f_{\bar{\gamma}}\}) = (\{f_\gamma\})$$

Studiamo la fibra:

$$\mu_\alpha(X) = \lambda \text{ con } \lambda = \prod_i \lambda_i \text{Id}$$

$$\begin{cases} -f_{\bar{\alpha}} f_\alpha = \lambda_1 \text{Id} \\ f_\alpha f_{\bar{\alpha}} + [f_\beta, f_{\bar{\beta}}] = \lambda_2 \text{Id} \end{cases}$$

## Definizione

La varietà quiver è  $\mathfrak{M}(\overline{Q}, \alpha, \lambda) = \mu_\alpha^{-1}(\lambda) // \text{Gl}(\alpha)$ .

Essa parametrizza le rappresentazioni semisemplici che soddisfano le equazioni della mappa momento. Studiamo le rappresentazioni semplici di  $\overline{Q}$ .

## Definizione

La varietà quiver è  $\mathfrak{M}(\overline{Q}, \alpha, \lambda) = \mu_\alpha^{-1}(\lambda) // \text{Gl}(\alpha)$ .

Essa parametrizza le rappresentazioni semisemplici che soddisfano le equazioni della mappa momento. Studiamo le rappresentazioni semplici di  $\overline{Q}$ .

Come è fatta questa varietà?

- È non vuota?
- È liscia?
- È ridotta, irriducibile e intersezione completa?
- È normale?

## Definizione

La varietà quiver è  $\mathfrak{M}(\overline{Q}, \alpha, \lambda) = \mu_\alpha^{-1}(\lambda) // \text{Gl}(\alpha)$ .

Essa parametrizza le rappresentazioni semisemplici che soddisfano le equazioni della mappa momento. Studiamo le rappresentazioni semplici di  $\overline{Q}$ .

Come è fatta questa varietà?

- È non vuota? solo se  $\lambda \cdot \alpha = \sum_j \lambda_j \alpha_j = 0$
- È liscia? no
- È ridotta, irriducibile e intersezione completa? si
- È normale? si

Per ogni vertice  $i$  (loop free e con  $\lambda_i \neq 0$ ) si definiscono il funtore  $\tau_i$  e lo schema  $T_i$ .

$$\begin{array}{ccc} T_i & \xrightarrow{p_2} & \mu_{\alpha'}^{-1}(\lambda') \\ p_1 \downarrow & \nearrow \tau_i & \\ \mu_{\alpha}^{-1}(\lambda) & & \end{array}$$

Dove  $p_1$  è  $\text{Gl}((\alpha')_i)$ -bundle,  $p_2$  è  $\text{Gl}(\alpha_i)$ -bundle. La differenza delle dimensioni di  $\mu_{\alpha}^{-1}(\lambda)$  e  $\mu_{\alpha'}^{-1}(\lambda')$  è  $(\alpha'_i)^2 - \alpha_i^2$ . Le due varietà hanno lo stesso numero di componenti irriducibili.



Per ogni vertice  $i$  (loop free e con  $\lambda_i \neq 0$ ) si definiscono il funtore  $\tau_i$  e lo schema  $T_i$ .

$$\begin{array}{ccc} T_i & \xrightarrow{p_2} & \mu_{\alpha'}^{-1}(\lambda') \\ p_1 \downarrow & \nearrow \tau_i & \\ \mu_{\alpha}^{-1}(\lambda) & & \end{array}$$

Dove  $p_1$  è  $\text{Gl}((\alpha')_i)$ -bundle,  $p_2$  è  $\text{Gl}(\alpha_i)$ -bundle. La differenza delle dimensioni di  $\mu_{\alpha}^{-1}(\lambda)$  e  $\mu_{\alpha'}^{-1}(\lambda')$  è  $(\alpha'_i)^2 - \alpha_i^2$ . Le due varietà hanno lo stesso numero di componenti irriducibili.

### Teorema (Crawley-Boevey su $\Sigma_{\lambda}$ )

*Esiste rappresentazione semplice di dimensione  $\alpha$  in  $\mu_{\alpha}^{-1}(\lambda)$  se e solo se*

$$\alpha \in R_{\lambda} \text{ e } \forall r > 2 \forall \{\beta^i\}_i \begin{cases} \alpha = \sum_{i=1}^r \beta^i \\ q(\alpha) + r - 1 < \sum_{i=1}^r q(\beta^i) \\ \beta^i \in \mathbb{N}R_{\lambda} \setminus \{0\} \text{ e } \lambda \cdot \beta^i = 0 \quad \forall i \end{cases}$$

dove  $R_{\lambda} = \{\alpha' \in \Phi \cap \mathbb{N}^n \mid \lambda \cdot \alpha' = 0\}$ .

## Teorema (di decomposizione)

Ogni vettore  $\alpha \in \mathbb{N}\Sigma_\lambda$  si decompone in modo unico come somma di elementi in  $\Sigma_\lambda$

$$\alpha = \sum_{i=1}^r k_i \sigma^i$$

*tale che ogni altra decomposizione è un raffinamento di questa.*

## Teorema (di decomposizione)

Ogni vettore  $\alpha \in \mathbb{N}\Sigma_\lambda$  si decompone in modo unico come somma di elementi in  $\Sigma_\lambda$

$$\alpha = \sum_{i=1}^r k_i \sigma^i$$

tale che ogni altra decomposizione è un raffinamento di questa.

## Corollario

$$\mathfrak{M}(\alpha, \lambda) \simeq \prod_{i=1}^r S^{k_i} \mathfrak{M}(\sigma^i, \lambda)$$

Basta studiare il problema per  $\alpha \in \Sigma_\lambda$ .

Esempio  $\tilde{D}_4$ ,  $\lambda = 0$  e  $\beta = (1, 1, 2, 2, 3)$ :

Si ha  $\Sigma_0 = \{e_i, \delta\}$  quindi  $\beta = \delta + e_3 + e_4 + e_5$ , inoltre  $\mathfrak{M}(\beta, 0) \simeq \mathfrak{M}(\delta, 0)$ .

Fissata una rappresentazione semisemplice  $X$  costruisco un nuovo quiver: sia  $\bigoplus_{i=1}^r X_i^{k_i}$  la decomposizione di  $X$  e  $\overline{Q'}$  il quiver con  $r$  vertici,  $-(\dim X_i, \dim X_j)$  archi tra  $i$  e  $j$  e  $2 - 2q(\dim X_i)$  loop in  $i$ .

Fissata una rappresentazione semisemplice  $X$  costruisco un nuovo quiver: sia  $\bigoplus_{i=1}^r X_i^{k_i}$  la decomposizione di  $X$  e  $\overline{Q'}$  il quiver con  $r$  vertici,  $-(\dim X_i, \dim X_j)$  archi tra  $i$  e  $j$  e  $2 - 2q(\dim X_i)$  loop in  $i$ .

### Teorema (Crawley-Boevey)

Esiste un morfismo locale étale tra:

$$(\mathfrak{M}(\overline{Q}, \alpha, \lambda), [X]) \rightarrow (\mathfrak{M}(\overline{Q'}, k, 0), 0)$$

La dimostrazione usa il *Teorema Slice di Luna*. La normalità di  $[X]$  è equivalente alla normalità di  $0$  in  $\mathfrak{M}(\overline{Q'}, k, 0)$ .

## Teorema (Crawley-Boevey)

*La varietà quiver  $\mathfrak{M}(\overline{Q}, \alpha, \lambda)$  è normale.*

La dimostrazione è per induzione su  $\sum_i \alpha_i$ . Il passo base è dato dallo studio dei quiver euclidei con radice  $\delta$ , tramite la corrispondenza di McKay si dimostra che la varietà è il quoziente di  $\mathbb{C}^2$  per un gruppo finito  $\Gamma$ .