



**Università di Pisa**

---

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

## **Geometria delle varietà quiver**

Candidato:  
**Roberto Pagaria**

Relatore:  
**Andrea Maffei**

Controrelatore:  
**Giovanni Gaiffi**

*Ad Angela.*

# Indice

<b>1</b>	<b>Rappresentazioni di quiver</b>	<b>1</b>
1.1	Definizioni preliminari . . . . .	1
1.2	Approccio algebrico . . . . .	4
1.3	Funtori di riflessione . . . . .	14
1.4	Il funtore $\tau$ . . . . .	16
1.5	Un'altra descrizione . . . . .	17
1.6	L'elemento di Coxeter . . . . .	20
1.7	Teorema di Gabriel . . . . .	22
1.8	Il caso euclideo . . . . .	23
1.9	Aspetto geometrico . . . . .	31
1.10	Radici non isotrope . . . . .	34
1.11	Il teorema di Kac . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Varietà Quiver</b>	<b>38</b>
2.1	Prime definizioni . . . . .	38
2.2	Sui punti stabili . . . . .	43
2.3	Risoluzioni di $\mathfrak{M}_0(\lambda)$ . . . . .	45
2.4	Funtori di riflessione generalizzati . . . . .	46
2.5	Sistemi di radici generalizzati . . . . .	49
2.6	Regione fondamentale rispetto a $\lambda$ . . . . .	52
2.7	Estendere un quiver euclideo . . . . .	62
2.8	Decomposizione canonica . . . . .	64
2.9	Decomposizione della varietà quiver . . . . .	66
2.10	Morfismi étale locali . . . . .	69
2.11	Un nuovo quiver . . . . .	74
2.12	Richiami sulla normalità . . . . .	76
2.13	Normalità della varietà quiver . . . . .	78
	<b>Bibliografia</b>	<b>81</b>

## Introduzione

In questa tesi voglio introdurre i quiver e studiarne le rappresentazioni; la trattazione partirà dai fatti elementari per poi giungere alla dimostrazione di vari teoremi. La tesi è divisa in due parti: nella prima tratterò le rappresentazioni di quiver a meno di isomorfismo e nella seconda verrà associato ad ogni quiver una varietà e ne saranno studiate le proprietà. L'argomento è piuttosto vasto e gli strumenti utilizzati sono molto vari, si farà uso di tecniche di algebra omologica e algebra non commutativa, di combinatoria e di geometria e teoria degli schemi.

Un quiver è un grafo orientato, una rappresentazione è l'assegnazione ad ogni arco di un'applicazione lineare. Alcuni classici problemi di algebra lineare, come lo studio degli endomorfismi di uno spazio vettoriale o come decomporre sottospazi vettoriali, sono stati generalizzati grazie al linguaggio dei quiver. In principio associo al quiver un'algebra di cammini e le rappresentazioni sono moduli su quest'algebra, lo studio si focalizzerà sui moduli (o rappresentazioni) indecomponibili. Si osserveranno proprietà di quest'algebra, la principale è che ogni modulo ha dimensione proiettiva al più uno.

Si introducono poi oggetti combinatori come la forma di Ringel, bilineare non simmetrica, associata a un quiver e la forma di Tits che è la sua simmetrizzata. La forma di Tits è definita positiva o semidefinita positiva solo per alcuni grafi chiamati rispettivamente di Dynkin o Euclidei. Tutti gli altri grafi vengono detti "wilde" poiché determinare le rappresentazioni indecomponibili è un problema molto arduo e non risolto. I vettori interi con norma minore o uguale ad uno formano un sistema di radici, la definizione del sistema di radici di un quiver è leggermente diversa, principalmente perché si vuole il supporto connesso. Le radici con forma di Tits non positiva sono dette immaginarie e le altre reali, le radici immaginarie suddividono a sua volta in isotrope se la forma è nulla e non-isotrope altrimenti. Lo studio delle rappresentazioni procede usando i funtori di riflessione o funtori di Coxeter. Essi hanno due descrizioni diverse: la prima è combinatoria sulle applicazioni lineari di cui si tratta, la seconda è puramente algebrica. Le due definizioni coincidono e questi funtori, che trasformano una rappresentazione in un'altra con dimensione diversa, permettono di ridurre lo studio di tutti i casi allo studio di alcuni casi facili.

Fissata una base per ogni spazio vettoriale, le rappresentazioni sono date da una collezione di matrici. Lo spazio affine che ha per base le entrate delle matrici parametrizza tutte le rappresentazioni di una fissata dimensione. Su di esso agisce un gruppo algebrico e si osserva che due rappresentazioni sono isomorfe se e solo se sono coniugate tramite il gruppo. Lo studio delle orbite fornisce informazioni sul numero di rappresentazioni indecomponibili e sul numero di parametri da cui dipendono.

Un risultato importante è il teorema di Gabriel:

**Teorema 1** (di Gabriel). *Se il grafo è di Dynkin, le rappresentazioni indecomponibili sono in corrispondenza biunivoca con le radici reali positive del sistema di radici.*

Lo studio si focalizza sui grafi leggermente più difficili da studiare, quelli euclidei. Si continuerà con un approccio geometrico fino a determinare il numero di indecomponibili di dimensione la radice immaginaria minima. Esse sono parametrizzate da  $\mathbb{P}^1$ . Grazie a ciò si riesce a dimostrare il teorema

**Teorema 2** (di Kac). *Esiste una rappresentazione indecomponibile di dimensione  $\alpha$  se e solo se  $\alpha$  è una radice positiva. Inoltre il numero di parametri da cui dipendono le rappresentazioni indecomponibili è dato dalla forma di Tits.*

Nella seconda parte della tesi sarà introdotta una varietà che parametrizza alcune rappresentazioni di un determinato quiver, lo scopo è determinare le sue principali proprietà. In particolare mostrerò che queste varietà sono normali, risultato ottenuto da Crawley-Boevey nel 2003. La normalità di una varietà è un risultato interessante di per sé, ma secondo me la parte più interessante sono le tecniche usate nella dimostrazione: la decomposizione di una varietà come prodotto di varietà più semplici e morfismi locali ed étale tra di esse possono essere usati per ulteriori studi.

Innanzitutto si raddoppia il quiver aggiungendo frecce con orientazione opposta e si osserva che lo spazio delle rappresentazioni del nuovo quiver è il fibrato cotangente alle rappresentazione del quiver iniziale. L'azione del gruppo algebrico prima introdotto motiva lo studio della mappa momento a lui associata. Di particolare interesse sono le fibra dei punti fissi, esse sono chiusi invarianti e contengono tutte le rappresentazioni che soddisfano determinate equazioni. Il quoziente della fibra per l'azione del gruppo è la varietà quiver, il quoziente esiste e può essere singolare. Si introduce quindi una nozione di stabilità che permette di costruire una nuova varietà liscia, essa è una risoluzione di singolarità della varietà quiver. Lo studio di queste varietà procede con la generalizzazione dei funtori di riflessione introdotti prima a funtori sul quiver raddoppiato, essi mandano una fibra della mappa momento nella fibra di un'altra mappa momento. Anche il sistema di radici viene generalizzato introducendo una nuova condizione legata al punto stabile scelto. Una lunga sezione della tesi sarà dedicata allo studio della regione fondamentale generalizzata, essa permetterà la dimostrazione di alcuni teoremi. La proiezione dalle rappresentazioni nella fibra della mappa momento nelle rappresentazioni del quiver originario permette di determinare l'esistenza e il numero di rappresentazioni semplici del quiver raddoppiato che soddisfano le condizioni imposte dalla mappa. Un teorema sulla decomposizioni di radici in somma di altre radici porta alla

decomposizione di ogni rappresentazione in rappresentazioni di dimensione inferiore, ma non necessariamente indecomponibili. Questa decomposizione è detta canonica. Il risultato permette di scrivere la varietà quiver come prodotto di altre varietà quiver di dimensione inferiore, fino ad arrivare a varietà particolarmente semplici. L'ultimo strumento che introduco è una mappa étale locale tra un punto di una varietà quiver e l'origine di un'altra varietà quiver, questa mappa è indotta da una traslazione e le sue proprietà discendono dal teorema "slice" di Luna. Un'ulteriore discussione sugli schemi normali e sui quozienti permette di dimostrare la normalità ignorando strati di dimensione bassa. Il teorema finale è sulla normalità.

**Teorema 3** (di Crawley-Boevey). *Tutte le varietà quiver sono normali.*

La dimostrazione usa tutti i principali risultati della tesi e si riconduce alla normalità delle varietà quiver associate ad un grafo euclideo e alla minima radice immaginaria positiva. Il risultato discende dall'isomorfismo tra varietà quiver e quozienti di  $\mathbb{C}^2$  per gruppi discreti, questi ultimi hanno solo singolarità di tipo Klein che sono normali.

# Rappresentazioni di quiver

## 1.1 Definizioni preliminari

Un quiver è un grafo orientato a cui sono permessi più frecce tra due nodi e loop.

### Definizione 1.1.

- Un grafo  $Q$  è un insieme finito di vertici  $Q_0$  e di archi  $Q_1$  tra di essi.
- Un'orientazione di  $Q$  è  $\Omega$  cioè il dato di due funzioni  $t, h : Q_1 \rightarrow Q_0$  che ad ogni arco associano rispettivamente il vertice di partenza e quello di arrivo.
- Un quiver è una coppia  $(Q, \Omega)$  dove  $Q$  è un grafo e  $\Omega$  è un'orientazione di  $Q$ .

A volte il quiver  $(Q, \Omega)$  verrà denotato semplicemente  $Q$  sottintendendo una fissata orientazione.

Ci sono più modi di definire una rappresentazione di un quiver e morfismi tra rappresentazioni, iniziamo a definire la più semplice. Sia  $k$  un campo fissato.

### Definizione 1.2.

- Una rappresentazione  $X$  di  $(Q, \Omega)$  è l'associazione di un  $k$ -spazio vettoriale di dimensione finita  $X_i$  per ogni vertice  $i \in Q_0$  e una funzione lineare  $f_\gamma : X_{t(\gamma)} \rightarrow X_{h(\gamma)}$  per ogni arco  $\gamma \in Q_1$ .
- Un morfismo di rappresentazioni  $\rho : (X, f) \rightarrow (Y, g)$  è una collezione di mappe lineari  $\{\rho_i : X_i \rightarrow Y_i\}_{i \in Q_0}$  tali che per ogni arco  $\gamma \in Q_1$  il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc}
X_{t(\gamma)} & \xrightarrow{f_\gamma} & X_{h(\gamma)} \\
\rho_{t(\gamma)} \downarrow & & \downarrow \rho_{h(\gamma)} \\
Y_{t(\gamma)} & \xrightarrow{g_\gamma} & Y_{h(\gamma)}
\end{array}$$

Un approccio diverso per definire le rappresentazioni consiste nel definire l'algebra dei cammini e considerare i moduli sinistri su quest'algebra.

**Definizione 1.3.**

- Un cammino su un quiver è il dato del vertice di partenza  $s$  e di arrivo  $r$  (appartenenti a  $Q_0$ ) e di una successione di archi  $\gamma_n \gamma_{n-1} \dots \gamma_2 \gamma_1$  tale che il vertice di arrivo dell'arco  $i$ -esimo coincide con quello di partenza del  $i + 1$ -esimo, cioè  $h(\gamma_i) = t(\gamma_{i+1})$  per ogni  $1 \leq i \leq n - 1$ . Naturalmente si deve anche avere  $t(\gamma_1) = s$  e  $h(\gamma_n) = r$ .

In questa definizione rientrano anche i cammini costanti sul vertice  $j \in Q_0$  denotati con  $e_j$  la cui successione di archi è vuota, tutti gli altri cammini verranno denotati con la stringa degli archi corrispondenti.

- La composizione di due cammini  $\gamma_n \dots \gamma_2 \gamma_1$  e  $\delta_m \dots \delta_2 \delta_1$  è definita se  $h(\gamma_n) = t(\delta_1)$  ed è il cammino  $\delta_m \dots \delta_1 \gamma_n \dots \gamma_1$ .
- L'algebra di cammini  $A$  di un quiver  $(Q, \Omega)$  è il  $k$ -spazio vettoriale con base i cammini sul quiver e il prodotto definito dalla composizione dei cammini se possibile e zero altrimenti cioè definito da:

$$\delta_m \dots \delta_1 \cdot \gamma_n \dots \gamma_1 = \begin{cases} \delta_m \dots \delta_1 \gamma_n \dots \gamma_1 & \text{se } h(\gamma_n) = t(\delta_1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sui cammini ed esteso per linearità a tutta l'algebra  $A$ .

- Una rappresentazione è un modulo sinistro finito sull'algebra associativa  $A$ .
- Un morfismo di rappresentazioni è un morfismo di  $A$  moduli sinistri. Se esso è iniettivo e suriettivo si dice isomorfismo di rappresentazioni.

Bisogna verificare che le due definizioni di rappresentazioni e morfismi tra esse siano equivalenti, prima forniremo qualche esempio e proprietà.

*Esempio 1* ( $\tilde{A}_0$ ). Sia  $Q$  l'unico grafo composto da un punto e un arco e  $\Omega$  l'unica orientazione su di esso.

$$Q : 1 \rightrightarrows \gamma$$

Una rappresentazione è un  $k$ -spazio vettoriale e un endomorfismo, due rappresentazioni sono isomorfe se e solo se gli spazi vettoriali sono della stessa dimensione e i due endomorfismo sono coniugati.

I cammini sono  $e_1, \gamma, \gamma\gamma, \dots$  e l'algebra  $A$  è isomorfa all'algebra di polinomi  $k[T]$  identificando  $T$  con  $\gamma$ .

*Esempio 2* ( $A_2$ ). Sia  $Q$  il grafo connesso formato da due punti e una freccia con l'unica orientazione possibile.

$$Q : 1 \xrightarrow{\gamma} 2$$

Una rappresentazione è un morfismo tra due spazi vettoriali, inoltre due rappresentazioni sono isomorfe se e solo se gli spazi vettoriali sono della stessa dimensione e, fissati i due isomorfismi, le due funzioni sono uguali a meno di cambio di base in partenza e in arrivo.

I cammini sono  $e_1, e_2$  e  $\gamma$  e l'algebra  $A$  ha come unità  $e_1 + e_2$  ma non è commutativa, infatti  $e_2\gamma = \gamma e_1 = \gamma$  e  $e_1\gamma = \gamma e_2 = e_1e_2 = e_2e_1 = 0$ .

**Proposizione 1.4.** *Esiste una corrispondenza biunivoca tra  $A$ -moduli sinistri e rappresentazioni del quiver che rispetta la somma diretta.*

*Dimostrazione.* Mostriamo solo la corrispondenza, il fatto che rispetti somma diretta è una facile verifica. Data una rappresentazione  $(X, f)$  si definisce il modulo  $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$  con la naturale struttura di  $k$ -spazio vettoriale e con l'azione di un arco  $\gamma$  definita da  $\gamma \cdot v = f_\gamma(v)$ . Viceversa dato  $M$  un  $A$ -modulo sinistro si hanno gli spazi vettoriali  $M_i = e_i M$  e l'endomorfismo associato ad un arco  $\gamma$  è semplicemente  $L_\gamma$  la moltiplicazione a sinistra per l'elemento  $\gamma \in A$ . Le due operazioni sono una l'inversa dell'altra.  $\square$

Per queste algebre valgono le seguenti proprietà:

**Proposizione 1.5.**

- $A$  è un'algebra associativa graduata con unità, in generale non commutativa. Gli elementi omogenei sono i cammini e il loro grado è la lunghezza del cammino stesso.
- gli  $e_i$  al variare di  $i \in Q_0$  sono un sistema di idempotenti primitivi non centrali.
- $A$  si spezza come modulo sinistro in  $\bigoplus_{i \in Q_0} Ae_i$ , in particolare  $Ae_i$  sono moduli proiettivi distinti. Una base di  $Ae_i$  sono i cammini che partono dal vertice  $i$ .

Inoltre gli oggetti algebrici associati sono facilmente calcolabili tramite la combinatoria del quiver, forniamo alcuni esempi nella seguente proposizione:

**Proposizione 1.6.**

- Il sottospazio vettoriale  $e_i A e_j$  ha come base tutti i cammini dal vertice  $j$  al vertice  $i$ .
- $A$  è finita se e solo se in  $Q$  non ci sono cicli orientati.
- Se  $Q$  è connesso il centro di  $A$  è  $k$  se  $Q$  è diverso da  $\widetilde{A}_0$ . L'unione disgiunta di quiver fornisce come algebra il prodotto delle algebre quindi il centro è calcolabile anche nel caso generale.
- Il radicale di Jacobson è il  $k$ -spazio vettoriale con base i cammini che non fanno parte di cicli orientati.

Introduciamo altra terminologia:

**Definizione 1.7.**

- Il vettore dimensione  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$  di una rappresentazione  $X$  ha nell'entrata  $i$ -esima il numero  $\dim_k e_i X$ , cioè la dimensione dello spazio vettoriale associato al vertice  $i$ .
- La forma di Ringel associata al quiver  $(Q, \Omega)$  è la forma bilineare (non simmetrica) su  $\mathbb{Z}^n$  definita da:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i \in Q_0} \alpha_i \beta_i - \sum_{\gamma \in Q_1} \alpha_{t(\gamma)} \beta_{h(\gamma)}$$

- La forma di Ringel simmetrizzata è la forma bilineare simmetrica definita da  $(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha \rangle$ . La forma descritta nella base canonica di  $\mathbb{Z}^n$  è data dalla matrice simmetrica  $C$  cioè  $(\alpha, \beta) = \alpha^T C \beta$ . Dove  $C$  è la matrice con entrate  $-n_{i,j}$  fuori dalla diagonale e sulla diagonale  $2 - 2n_{i,i}$  con  $n_{i,j}$  il numero di archi tra i vertici  $i$  e  $j$ .
- La forma di Tits è la funzione  $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  definita da  $q(\alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle = \frac{1}{2}(\alpha, \alpha)$ .

## 1.2 Approccio algebrico

Studiamo l'algebra  $A$  associata ad un quiver per ottenere importanti proprietà sui suoi moduli sinistri, cioè sulle rappresentazioni del quiver. Il primo risultato fornisce una risoluzione proiettiva corta di ogni modulo da cui si deduce che l'algebra dei cammini è ereditaria.

**Teorema 1.8.** *Per ogni  $A$  modulo sinistro  $X$  esiste la seguente risoluzione proiettiva:*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\gamma \in Q_1} A e_{h(\gamma)} \otimes_k e_{t(\gamma)} X \xrightarrow{f} \bigoplus_{i \in Q_0} A e_i \otimes_k e_i X \xrightarrow{g} X \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

dove  $f$  e  $g$  sono definite per estensione lineare da

$$\begin{aligned} f(a \otimes x) &= a\gamma \otimes x - a \otimes \gamma x & \forall a \in Ae_{h(\gamma)}, x \in e_{t(\gamma)}X \\ g(a \otimes x) &= ax & \forall a \in Ae_i, x \in e_iX \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* I moduli  $Ae_i$  sono proiettivi perché addendi diretti di  $A$ . I moduli che compaiono nella risoluzione sono proiettivi perché somma diretta dei moduli proiettivi  $Ae_i$ .

La mappa  $g$  è suriettiva perché ogni  $x \in X$  si scrive come somma  $x = \sum x_i$  con  $x_i \in e_iX$  e quindi  $g(\sum_i e_i \otimes x_i) = x$ .

La composizione  $f \circ g$  è la mappa nulla, infatti sui generatori:

$$g(f(a \otimes x)) = g\left(\sum_{\gamma} a\gamma \otimes x - a \otimes \gamma x\right) = \sum_{\gamma} a\gamma x - a\gamma x = 0$$

Mostro che  $\text{Ker } g \subseteq \text{Im } f$ . Sia  $x = \sum_i \sum_{t(\gamma)=i} \gamma \otimes x_{\gamma} \in \text{Ker } g$ , e prendo  $\delta$  il cammino più lungo che compare nella scrittura di  $x$  (cioè  $x_{\delta} \neq 0$ ). Il cammino  $\delta$  è non costante perché la mappa  $\sum_i e_iX \rightarrow X$  è iniettiva. Si può scrivere il cammino come composizione  $\delta = \delta'\gamma$  con  $\gamma \in Q_1$  arco del quiver. Sia  $y = \delta' \otimes x_{\delta} \in Ae_{h(\gamma)} \otimes e_{t(\gamma)}X$ , l'elemento  $x - f(y)$  appartiene all'immagine di  $f$  se e solo se ci appartiene  $x$  e continua a stare nel nucleo di  $g$ . Il nuovo elemento  $x - f(y)$  o ha lunghezza inferiore o ha un numero inferiore di cammini di lunghezza massima. Una facile induzione conclude la dimostrazione.

Manca da dimostrare l'iniettività di  $f$ , come prima si scrive un elemento del nucleo come somma  $y = \sum_{\gamma \in Q_1} \sum_{t(\delta)=h(\gamma)} \gamma \otimes y_{\gamma,\delta}$ . Guardo gli elementi di lunghezza massima in  $f(y) = \sum_{\gamma \in Q_1} \sum_{t(\delta)=h(\gamma)} \delta\gamma \otimes y_{\gamma,\delta} - \delta \otimes \gamma y_{\gamma,\delta}$ . Sono tutti e soli quelli della forma  $\sum_{\gamma \in Q_1} \sum_{t(\delta)=h(\gamma)} \delta\gamma \otimes y_{\gamma,\delta}$  con  $\delta$  di lunghezza massima, tutti questi cammini sono distinti quindi ogni  $y_{\gamma,\delta}$  deve essere nullo. In conclusione  $y = 0$ .  $\square$

### Corollario 1.9.

- L'algebra di cammini  $A$  è ereditaria, cioè tutti gli  $A$ -moduli hanno dimensione proiettiva minore o uguale a uno.

$$\text{pdim } X \leq 1$$

- Sia  $X$  sottomodulo di un modulo proiettivo  $P$  allora  $X$  è proiettivo.
- Se  $X$  e  $Y$  sono  $A$ -moduli finitamente generati allora vale la formula

$$\dim \text{Hom}(X, Y) - \dim \text{Ext}^1(X, Y) = \langle \dim X, \dim Y \rangle \quad (1.2)$$

Nel caso  $X = Y$  si ottiene  $\dim \text{End}(X) - \dim \text{Ext}^1(X, X) = q(\dim X)$ .

Introduciamo ora la nozione di “brick” cioè di modulo indecomponibile che gode di buone proprietà.

**Definizione 1.10.** Un  $A$ -modulo  $X$  si dice brick se  $\text{End}(X) = k$ .

Poiché un modulo è indecomponibile se e solo se l’anello degli endomorfismi è locale, cioè esiste un unico ideale massimale destro<sup>1</sup>. Si deduce che ogni brick è indecomponibile e in questo caso vale  $q(\dim X) = 1 - \dim \text{Ext}^1(X, X)$ .

**Proposizione 1.11.** Un modulo indecomponibile  $X$  tale che  $\text{Ext}^1(X, X) = 0$  è un brick.

La proposizione discende in modo ovvio dal seguente lemma:

**Lemma 1.12.** Siano  $X$  e  $Y$  moduli indecomponibili tali che  $\text{Ext}_A^1(Y, X) = 0$  allora ogni morfismo  $\rho : X \rightarrow Y$  non nullo è iniettiva o suriettiva.

*Dimostrazione.* La successione  $0 \rightarrow \text{Ker } \rho \rightarrow X \xrightarrow{f} \text{Im } \rho \rightarrow 0$  è esatta, applico il funtore  $\text{Hom}(\text{Coker } \rho, \cdot)$  e ho la successione esatta lunga:

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_A^1(\text{Coker } \rho, X) \rightarrow \text{Ext}_A^1(\text{Coker } \rho, \text{Im } \rho) \rightarrow 0$$

Suppongo per assurdo che  $\text{Ker } \rho$  e  $\text{Coker } \rho$  siano non nulli; la successione  $0 \rightarrow \text{Ker } \rho \rightarrow X \rightarrow \text{Im } \rho \rightarrow 0$  non spezza perché  $X$  è indecomponibile. Per la suriettività della mappa sopra trovo una successione che non spezza che estende quest’ultima:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j} & Z & \longrightarrow & \text{Coker } \rho \longrightarrow 0 \\ & & \rho \downarrow & & \theta \downarrow & & \text{Id} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Im } \rho & \xrightarrow{i} & Y & \longrightarrow & \text{Coker } \rho \longrightarrow 0 \end{array}$$

Poiché il diagramma commuta si ottiene la successione esatta

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{j \oplus \rho} Z \oplus \text{Im } \rho \xrightarrow{\theta + i} Y \rightarrow 0$$

che spezza perché  $\text{Ext}_A^1(Y, X) = 0$ , quindi  $\text{Im } \rho$  è addendo diretto di  $X \oplus Y$ . Ottengo per indecomponibilità che  $X \simeq \text{Im } \rho$  o  $Y \simeq \text{Im } \rho$ , nel primo caso  $\rho$  è iniettiva e nel secondo è suriettiva. Comunque ottengo la tesi.  $\square$

<sup>1</sup>Si può definire per ideali sinistri; le due definizioni coincidono perché l’unico ideale massimale destro (o sinistro) coincide col radicale di Jacobson che è bilatero.

## La varietà delle rappresentazioni

Fissato un vettore di dimensioni  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  si può prendere in considerazione la varietà delle rappresentazioni  $X$  tali che  $\dim X = \alpha$ .

**Definizione 1.13.** Lo spazio delle rappresentazioni è lo spazio affine

$$\text{Rep}(Q, \Omega, \alpha) = \prod_{\gamma \in Q_1} \text{Hom}_k(V_{h(\gamma)}, V_{t(\gamma)})$$

dove  $V_i$  sono  $k$ -spazi vettoriali fissati di dimensione  $\alpha_i$ . La dimensione di questo spazio affine è  $\alpha^T(\text{Id} - \frac{1}{2}C)\alpha = \alpha^T\alpha - q(\alpha)$ .

Quando non c'è ambiguità chiamo lo spazio semplicemente  $\text{Rep}(\alpha)$ .

Poiché due rappresentazioni sono isomorfe se e solo sono coniugate tramite  $\text{Gl}(\alpha) = \prod_{i \in I} \text{Gl}(\alpha_i)$  è naturale considerare l'orbita di un elemento e il quoziente per questo gruppo. Il gruppo è un gruppo algebrico di dimensione  $\alpha^T\alpha$ .

**Teorema 1.14** (teorema di Chevalley). *Siano  $X$  e  $Y$  due schemi noetheriani, sia  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo di tipo finito. Allora ogni insieme costruibile  $C \subseteq X$  ha immagine tramite  $f$  costruibile in  $Y$ . In particolare  $f(X)$  è costruibile in  $Y$ .*

*Dimostrazione.* La dimostrazione si può trovare nel capitolo 4 del libro [Hump95, p 46]  $\square$

Applicando il teorema di Chevalley al nostro caso si ottengono buone proprietà dell'orbita di una rappresentazione.

**Corollario 1.15.** *Le orbite dell'azione di  $\text{Gl}(\alpha)$  su  $\text{Rep} \alpha$  sono localmente chiuse e  $\overline{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O}$  è unione di orbite di dimensione inferiore. Inoltre l'orbita di  $x$  ha dimensione  $\dim \mathcal{O}_x = \dim \text{Gl}(\alpha) - \dim \text{Stab } x$ .*

**Corollario 1.16.** *Vale la formula  $\dim \text{Rep}(\alpha) = \dim \text{Ext}^1(X, X) + \dim \mathcal{O}_X$  dove  $\alpha = \dim X$ . Topologicamente le orbite aperte sono caratterizzate da non avere autoestensioni cioè  $\text{Ext}^1(X, X) = 0$ . Inoltre essendo  $\text{Rep}(\alpha)$  irriducibile, esiste al più un'orbita aperta cioè unica classe di isomorfismo di moduli di dimensione  $\alpha$  senza auto-estensioni.*

*Dimostrazione.* Per la formula 1.2 si ha:

$$\dim \text{Rep}(\alpha) = \alpha^T\alpha - q(\alpha) = \dim G(\alpha) - \dim \text{End}(X) + \dim \text{Ext}^1(X, X)$$

Inoltre essendo gli automorfismi di  $X$  densi negli endomorfismi e data la formula 1.15 si ottiene  $\dim \text{Rep}(\alpha) = \dim \text{Ext}^1(X, X) + \dim \mathcal{O}_X$ . Poiché un aperto ha la stessa dimensione della sua chiusura e ogni aperto non vuoto di  $\text{Rep}(\alpha)$  è denso si ottiene la seconda parte della tesi.  $\square$

Non sempre esiste un'orbita aperta, è facile costruire esempi con infinite orbite di dimensione strettamente inferiore a quello dello spazio. Per esempio basta prendere in considerazione  $\text{Rep}(1, \tilde{A}_0) \simeq k$  dove l'azione di  $k^*$  è banale.

La proposizione successiva spiega come si comportano le orbite rispetto all'estensione di due moduli.

**Proposizione 1.17.** *Sia  $0 \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow 0$  una successione esatta che non spezza, allora l'orbita della somma diretta  $X \oplus Y$  è nella frontiera dell'orbita di  $Z$ .*

$$\mathcal{O}_{X \oplus Y} \subseteq \overline{\mathcal{O}_Z} \setminus \mathcal{O}_Z$$

*Inoltre se un'orbita è chiusa allora la rappresentazione è semisemplice.*

*Dimostrazione.* La rappresentazione  $Z$  ha come spazi vettoriali la somma diretta degli spazi vettoriali di  $X$  e  $Y$  ( $Z_i = Y_i \oplus X_i$ ). Prendo in considerazione l'elemento  $g_\lambda$  di  $\text{Gl}(\dim Z)$  che agisce con l'identità su  $X$  e come la moltiplicazione per  $\lambda$  su  $Y$ . Le mappe  $f_\gamma$  relative alla rappresentazione  $Z$  sono triangolari superiori rispetto la bandiera  $(Y, Z)$ .

$$\mathcal{M}(f_\gamma) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Si ha che il limite  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} g_\lambda f_\gamma g_\lambda^{-1}$  esiste ed è la matrice diagonale a blocchi

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Di conseguenza la rappresentazione  $Y \oplus X$  è nella chiusura di  $\mathcal{O}_Z$ . Se fosse nell'orbita  $\mathcal{O}_Z$  allora esisterebbe un isomorfismo  $g \in \text{Gl}(\dim Z)$  tale che  $Z = g(X \oplus Y)g^{-1}$  e quindi la successione spezzerebbe.  $\square$

## Sistemi di radici infiniti

Sul reticolo dato da  $\mathbb{Z}^n$  è data la forma di Ringel (cioè il prodotto scalare intero  $(\cdot, \cdot)$ ), in questa sezione vogliamo studiare le caratteristiche di questa struttura. Lo scopo finale è quello di usare le informazioni sul quiver  $Q$  per ottenere informazioni sulle classi di isomorfismo di moduli.

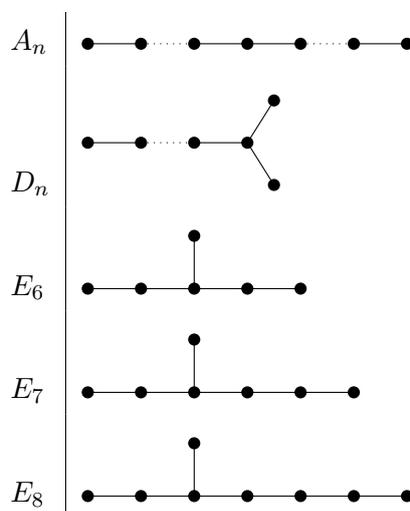
Servono ulteriori definizioni.

**Definizione 1.18.** Il supporto di un vettore  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$  è l'insieme delle entrate non nulle.

$$\text{supp}(\alpha) = \{k \mid \alpha_k \neq 0\}$$

Inoltre il vettore  $\alpha$  si dice sincero se tutte le entrate sono non nulle (cioè se  $\text{supp}(\alpha) = Q_0$ ).

Tabella 1.1: Grafi di Dynkin



I grafi di Dynkin (chiamati anche di tipo finito) sono quelli di tipo  $A_n$ ,  $D_n$  o  $E_n$  come in tabella 1.1, mentre quelli euclidei (o tame) sono di tipo  $\tilde{A}_n$ ,  $\tilde{D}_n$  o  $\tilde{E}_n$  come in tabella 1.2. Tutti gli altri grafi sono detti wild.

La classificazione dei grafi in base a come è definita la forma simmetrica associata è un argomento classico. La dimostrazione passa per un lemma chiave che si può trovare in [Vin, p 1098 Teorema 3].

**Lemma 1.19.** *Sia  $C$  una matrice simmetrica e indecomponibile allora vale esattamente una delle seguenti:*

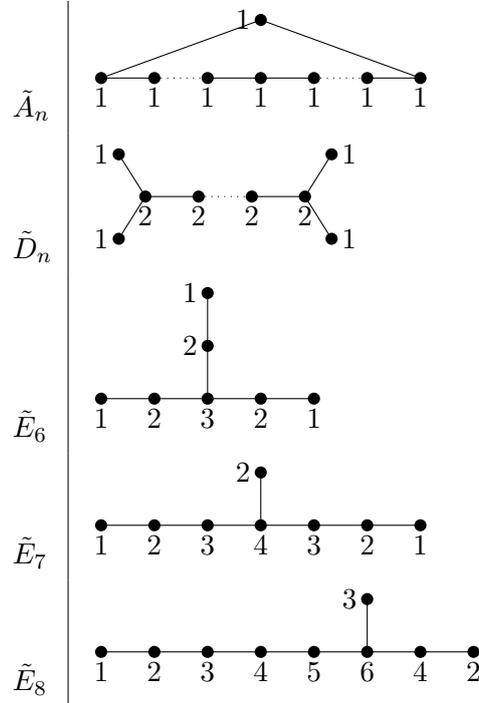
1. La matrice è non singolare ( $\det C \neq 0$ ) e  $Cv \geq 0$  implica  $v > 0$  o  $v = 0$ .
2. Il rango di  $C$  è  $n - 1$ ,  $Cv \geq 0$  implica  $Cv = 0$  e esiste  $\bar{v} > 0$  tale che  $C\bar{v} = 0$ .
3. Le condizioni  $v \geq 0$  e  $Cv \geq 0$  implicano  $v = 0$  ed esiste  $\bar{v} > 0$  tale che  $C\bar{v} < 0$ .

**Teorema 1.20.** *Per un quiver  $Q$  connesso si ha che*

1. se  $Q$  è un grafo di Dynkin allora la forma di Ringel è definita positiva.
2. se  $Q$  è un grafo euclideo allora la forma è semidefinita positiva e il radicale è uno dimensionale e generato da  $\delta$ , il vettore con entrate gli interi in figura.
3. Per tutti gli altri grafi la forma non è definita.

*Dimostrazione.* La dimostrazione si può trovare in [Ringel, lec 6].  $\square$

Tabella 1.2: Grafi euclidei



**Corollario 1.21.** Sia  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  un vettore sincero nel radicale della forma bilineare  $C$  allora il quiver  $Q$  è euclideo e  $\alpha = k\delta$ .

*Dimostrazione.* Per ipotesi  $(\epsilon_i, \alpha) = 0$  quindi  $C\alpha = 0$ ,  $\alpha \geq 0$  e  $\alpha \neq 0$  quindi  $Q$  è euclideo  $\square$

Dato un quiver si può associare un sistema di radici. L'utilità di studiare il sistema di radici è il fatto che alcune proprietà delle rappresentazioni di una certa dimensione dipendono solo dalla dimensione.

**Definizione 1.22.**

- Una radice semplice è un vettore della base canonica  $\epsilon_i \in \mathbb{Z}^n$  tale che il vertice associato  $i$  non ha loop. L'insieme delle radici semplici è  $\Pi$ .
- Una riflessione  $s_\alpha$  rispetto ad un vettore non isotropo  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$  è l'automorfismo di ordine due dato da:

$$\beta \mapsto \beta - 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$$

- Il gruppo di Weyl  $\mathcal{W}$  associato è il sottogruppo degli automorfismi  $\text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$  generato dalle riflessioni  $s_i$  rispetto alle radici semplici  $\epsilon_i$ .

- Un vettore  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$  si dice radice reale se è immagine tramite il gruppo di Weyl di una radice semplice (cioè  $\alpha \in \mathcal{W}\Pi$ ). L'insieme delle radici reali lo chiamo  $\Phi_{Re}$ .
- La regione fondamentale è l'insieme:

$$\begin{aligned} F &= \{\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\} \mid \text{supp}(\alpha) \text{ connesso}, (\alpha, \epsilon_i) \leq 0 \forall \epsilon_i \text{ radice semplice}\} \\ &= \{\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\} \mid \text{supp}(\alpha) \text{ connesso}, (\alpha, \epsilon_i) \leq 0 \forall \epsilon_i\} \end{aligned}$$

La condizione  $(\alpha, \epsilon_i) \leq 0$  è automatica se ci sono loop sul vertice  $i$ . Nel caso di grafo di Dynkin la regione fondamentale è vuota.

- Un vettore  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$  si dice radice immaginaria positiva se è nell'immagine tramite il gruppo di Weyl della regione fondamentale (cioè  $\alpha \in \mathcal{W}F$ ). L'insieme delle radici immaginarie positive lo chiamo  $\Phi_{Im}^+$ . Le radici immaginarie negative sono gli elementi dell'insieme  $\Phi_{Im}^- = -\mathcal{W}F$ .
- Il sistema di radici associato al quiver  $Q$  è l'insieme  $\Phi$  unione delle radici immaginarie e reali:

$$\Phi = \Phi_{Re} \sqcup \Phi_{Im}^+ \sqcup \Phi_{Im}^- \quad (1.3)$$

Dalle definizioni 0 non è una radice.

**Osservazione 1.23.** *Il gruppo di Weyl è formato da isometrie:*

$$(\alpha, \beta) = (w(\alpha), w(\beta)) \quad \forall w \in \mathcal{W}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$$

*Inoltre le radici reali  $\alpha$  hanno forma di Tits  $q(\alpha) = 1$  e le radici immaginarie  $\beta$  hanno forma di Tits non positiva  $q(\beta) \leq 0$ .*

*Dimostrazione.* Per il primo fatto basta verificare la formula  $(\alpha, w(\beta)) = (w^{-1}(\alpha), \beta)$  sui generatori del gruppo  $s_i$ , osservando che  $q(\epsilon_i) = (\epsilon_i, \epsilon_i) = 1$  per ogni radice semplice.

$$(\alpha, s_i \beta) = (\alpha, \beta - (\epsilon_i, \beta) \epsilon_i) = (\alpha, \beta) - (\alpha, \epsilon_i)(\beta, \epsilon_i) = (s_i \alpha, \beta) = (s_i^{-1} \alpha, \beta)$$

Per il secondo fatto osservo che  $q(w\alpha) = (w\alpha, w\alpha) = (w^{-1}w\alpha, \alpha) = q(\alpha)$  e che è vero per le radici semplici. L'ultima parte si ottiene dal fatto che per ogni  $\epsilon_i$  con loop in  $i$  si ha  $(\epsilon_i, \epsilon_j) \leq 0 \forall j$  quindi:

$$q(\beta) = \left( \beta, \sum_i \beta_i \epsilon_i \right) = \sum_i \beta_i (\beta, \epsilon_i)$$

Se  $\beta$  è nella regione fondamentale ogni addendo del RHS è non positivo da cui la tesi  $q(w\beta) = q(\beta) \leq 0$ .  $\square$

**Corollario 1.24.** *Se il grafo è di Dynkin (la forma è definita positiva) allora il sistema di radici è finito e di conseguenza anche il gruppo di Weyl.*

La dimostrazione segue facilmente dal fatto che sono possibili solo pochi angoli tra due radici e che la palla unitaria è compatta.

**Lemma 1.25.** *Sia  $\alpha \in F$  allora vale una delle seguenti due proprietà:*

1. *Il supporto di  $\alpha$  è un grafo euclideo,  $q(\alpha) = 0$  e  $\alpha = k\delta$ .*
2. *Se  $\alpha$  è somma di vettori positivi  $\alpha = \sum_{i=1}^r \gamma_i$  allora  $q(\alpha) < \sum_{i=1}^r q(\gamma_i)$  (con  $r > 1$ ).*

*Dimostrazione.* Suppongo che non valga il punto due e dimostro che vale il primo.

$$\sum_{i=1}^r (\alpha - \gamma_i, \gamma_i) = (\alpha, \alpha) - \sum_{i=1}^r (\gamma_i, \gamma_i) = 2q(\alpha) - 2 \sum_{i=1}^r q(\gamma_i) \geq 0$$

In particolare esiste uno dei  $\gamma_i$  tale che  $(\alpha - \gamma_i, \gamma_i) \geq 0$ , questo vettore lo chiamo  $\beta$ . Mi restringo al sottoquiver  $Q = \text{supp}(\alpha)$  e osservo che le seguenti due somme sono non positive.

$$\sum_i (\alpha, \epsilon_i) \frac{\beta_i(\alpha_i - \beta_i)}{\alpha_i} \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\epsilon_i, \epsilon_j) \alpha_i \alpha_j \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} - \frac{\beta_j}{\alpha_j} \right)^2 \quad (1.5)$$

La prima perché  $\alpha$  appartiene a  $F$  e la seconda perché il prodotto scalare è meno il numero di archi tra  $i$  e  $j$ . Un facile conto mostra che la somma di 1.4 e 1.5 è non negativa.

$$\begin{aligned} 1.4 + 1.5 &= (\alpha, \beta) - \sum_i (\alpha, \epsilon_i) \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} + \sum_{i \neq j} (\epsilon_i, \epsilon_j) \alpha_j \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} - \sum_{i \neq j} (\epsilon_i, \epsilon_j) \beta_i \beta_j \\ &= (\alpha, \beta) - \sum_i (\alpha, \epsilon_i) \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} + \sum_{i,j} (\epsilon_i, \epsilon_j) \alpha_j \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} - \sum_{i,j} (\epsilon_i, \epsilon_j) \beta_i \beta_j \\ &= (\alpha, \beta) - \sum_i (\alpha, \epsilon_i) \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} + \sum_i (\alpha, \epsilon_i) \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} - (\beta, \beta) \\ &= (\alpha - \beta, \beta) \geq 0 \end{aligned}$$

da cui si deduce che tutti gli addendi sono nulli quindi  $(\alpha, \epsilon_i) = 0 \quad \forall i$  e  $\frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{\beta_j}{\alpha_j}$  per ogni coppia di vertici  $i, j$  connessi. Concludo che  $\alpha$  è un multiplo di  $\beta$  e che  $\alpha \in \text{Rad}(Q)$  e per il teorema 1.20  $Q$  è euclideo.  $\square$

**Proposizione 1.26.** *Caratterizziamo le radici del sistema di radici:*

$$\Phi_{Im}^+ = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid \mathcal{W}\alpha \subset \mathbb{N}^n \text{ e } \text{supp}(\omega\alpha) \text{ è connesso } \forall \omega \in \mathcal{W}\}$$

*Dimostrazione.* Definisco la funzione altezza  $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{Z}$  come la funzione che manda  $\alpha \mapsto \sum_i \alpha_i$ . Dimostro l'inclusione  $\supseteq$ : sia  $\beta \in \mathbb{N}^n$  un elemento di minima altezza nell'orbita di  $\alpha$  (l'esistenza è ovvia), voglio dimostrare che  $\beta \in F$ . Si ha che

$$h(s_i\beta) = h(\beta - (\beta, \epsilon_i)\epsilon_i) = h(\beta) - (\beta, \epsilon_i) \geq h(\beta)$$

dove l'ultima disuguaglianza è dovuta alla scelta di  $\beta$ , si deduce che  $(\beta, \epsilon_i) \leq 0$ .

Per l'altra inclusione mostro prima che  $\mathcal{W}F \subseteq \mathbb{N}^n$  e poi che il supporto di ogni radice è connesso. Sia  $\alpha \in F$  e  $s_i\omega \in W$  un generico elemento del gruppo di Weyl scritto in forma ridotta. Anche l'elemento inverso  $\omega^{-1}s_i$  è ridotto, quindi per il corollario [Hump72, p 50] l'elemento  $\omega^{-1}s_i(\epsilon_i) \leq 0$  è negativo. Di conseguenza  $\omega^{-1}\epsilon_i \geq 0$  e per la proprietà di  $F$  si ha

$$(\omega v, \epsilon_i) = (v, \omega^{-1}(\epsilon_i)) \leq 0$$

Infine si ottiene per induzione sulla lunghezza dell'elemento del gruppo di Weyl:

$$s_i\omega(v) = \omega(v) - (\omega v, \epsilon_i)\epsilon_i \geq 0$$

Infine prendendo sempre una parola ridotta  $s_i\omega$  si ha che  $\text{supp}(s_i\omega v) = \text{supp}(\omega v) \cup \{i\}$ . L'uguaglianza è ovvia dal fatto appena dimostrato che  $-(\omega v, \epsilon_i) \geq 0$ .

□

Dalla teoria dei sistemi di radici discende anche che le radici reali sono o positive o negative, cioè definendo  $\Phi_{Re}^+ = \Phi_{Re} \cap \mathbb{N}^n$  si ha:

$$\Phi_{Re} = \Phi_{Re}^+ \cup -\Phi_{Re}^+$$

Per comodità chiamo  $\Phi_{Re}^-$  il secondo insieme.

**Corollario 1.27.** *Le radici sono o positive o negative:*

$$\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^- = \Phi_{Re}^+ \sqcup \Phi_{Re}^- \sqcup \Phi_{Im}^+ \sqcup \Phi_{Im}^-$$

Usando l'ovvia notazione e con la proprietà  $\Phi^+ \subset \mathbb{N}^n$  e  $\Phi^- = -\Phi^+$ .

### 1.3 Funtori di riflessione

In questa sezione introduco i funtori di riflessione  $\tau_i^+$  che trasformano rappresentazioni di un quiver  $Q$  in rappresentazioni di un altro quiver che differisce solo per l'orientazione di alcuni archi. I funtori di riflessione sono trattati bene nell'articolo sui funtori<sup>2</sup> [BGP].

Diamo le prime definizioni di sorgente e pozzo per poi definire i funtori di riflessione.

**Definizione 1.28.** Dato un quiver  $(Q, \Omega)$  un vertice  $i$  si dice pozzo se non ha archi uscenti (cioè  $\forall \gamma \in Q_1 \ t(\gamma) \neq i$ ).

Un vertice si dice sorgente se non ha archi entranti (cioè  $\forall \gamma \in Q_1 \ h(\gamma) \neq i$ ).

Dato un quiver  $(Q, \Omega)$  e un pozzo (o sorgente)  $i$  si definisce l'orientazione  $s_i\Omega$  invertendo la direzione di tutti gli archi incidenti su  $i$  e lasciando inalterati gli altri. Questa operazione trasforma il pozzo (rispettivamente sorgente)  $i$  in una sorgente (risp. pozzo).

Fissato un pozzo  $i$  e una rappresentazione  $X = (V, f)$ , prendo in considerazione la mappa  $l : \bigoplus_{h(\gamma)=i} V_{t(\gamma)} \rightarrow V_i$  definita da  $l = \sum_{h(\gamma)=i} f_\gamma \circ \pi_{t(\gamma)}$  dove  $\pi_k$  è la proiezione sull'addendo  $V_k$  della somma diretta.

$$l(v_{\gamma_1}, \dots, v_{\gamma_m}) = f_{\gamma_1}(v_{\gamma_1}) + \dots + f_{\gamma_m}(v_{\gamma_m})$$

Chiamo  $W_i = \text{Ker } l$  il nucleo della mappa  $l$ , inoltre si definiscono le mappe  $g_\gamma : W_i \rightarrow V_{t(\gamma)}$  con  $h(\gamma) = i$  come:

$$g_\gamma = \pi_{t(\gamma)} \circ j \quad g_{\gamma_k}(v_{\gamma_1}, \dots, v_{\gamma_m}) = v_{\gamma_k}$$

dove  $j$  è l'inclusione  $\text{Ker } l \hookrightarrow \bigoplus_{h(\gamma)=i} V_{t(\gamma)}$ . Definisco  $W_k = V_k$  per  $k \neq i$  e  $g_\beta = f_\beta$  per ogni arco non incidente su  $i$ .

**Definizione 1.29.** Sia  $i$  un pozzo, il funtore  $\tau_i^+ : \text{Rep}(Q, \Omega) \rightarrow \text{Rep}(Q, s_i\Omega)$  manda la rappresentazione  $X$  nella rappresentazione  $Y = (W, g)$ .

Analogamente per  $i$  sorgente si definisce  $\tau_i^-$ . Prendo in considerazione  $\tilde{l} : V_i \rightarrow \bigoplus_{t(\gamma)=i} V_{h(\gamma)}$  definita da

$$\tilde{l}(v) = (f_{\gamma_1}(v), \dots, f_{\gamma_m}(v))$$

chiamo  $W_i = \text{Coker } \tilde{l}$  il conucleo.

Inoltre si definisce la mappa  $g_\gamma : V_{h(\gamma)} \rightarrow W_i$  come la composizione tra l'inclusione e la proiezione sul conucleo  $V_{h(\gamma)} \hookrightarrow \bigoplus_{t(\gamma)=i} V_{h(\gamma)} \rightarrow \text{Coker } \tilde{l}$ . Analogamente a prima tutti gli  $W_k$  sono uguali a  $V_k$  per  $k \neq i$  e tutte le mappe non incidenti su  $i$  rimangono uguali.

<sup>2</sup>In alcuni articoli sono chiamati funtori di Coxeter

**Definizione 1.30.** Sia  $i$  una sorgente, definisco il funtore  $\tau_i^- : \text{Rep}(Q, \Omega) \rightarrow \text{Rep}(Q, s_i\Omega)$  che manda la rappresentazione  $X$  nella rappresentazione  $Y = (W, g)$ .

Osservo che un vertice con un loop non può essere né pozzo né sorgente per ogni orientazione  $\Omega$ . Forniamo qualche prima proprietà dei funtori di riflessione.

**Proposizione 1.31.** *Sia  $X$  una rappresentazione indecomponibile di dimensione  $\alpha$  e  $i$  una sorgente (pozzo) allora vale una delle seguenti:*

- *La rappresentazione è semplice cioè  $X \simeq ke_i$ ,  $\alpha = \epsilon_i$  e  $\tau_i^- X = 0$  (risp.  $\tau_i^+ X = 0$ ).*
- *La rappresentazione  $\tau_i^- X$  (risp.  $\tau_i^+ X$ ) è indecomponibile di dimensione  $s_i\alpha$ . Inoltre  $\tau_i^+ \tau_i^- X \simeq X$  (risp.  $\tau_i^- \tau_i^+ X \simeq X$ ).*

*Dimostrazione.* Dimostro solo il caso di  $i$  sorgente, l'altro è completamente analogo e si trova nell'articolo [BGP, p 22].

Il primo caso dell'enunciato è banale, suppongo quindi  $X \not\simeq ke_i$ .

Poiché  $i$  è una sorgente per  $(Q, \Omega)$  allora  $i$  è pozzo per  $(Q, s_i\Omega)$  e la composizione  $\tau_i^+ \tau_i^- X$  è ben definita e una rappresentazione di  $(Q, \Omega)$ . Voglio prima mostrare che  $\tau_i^+ \tau_i^- X \simeq X$ : chiamo  $Y = \tau_i^- X$  e calcolo  $(\tau_i^+ Y)_i$ , fisso l'orientazione  $\Omega$  per tutti gli archi  $\gamma \in Q$ , anche quando lavoro con  $(Q, s_i\Omega)$ .

$$\text{Ker } l = \text{Ker} \sum_{t(\gamma)=i} g_\gamma \pi_{h(\gamma)} = \text{Ker} \sum_{t(\gamma)=i} p \circ i_{h(\gamma)} \circ \pi_{h(\gamma)} = \text{Ker } p = \text{Im } \tilde{l} \simeq X_i$$

dove  $p$  è la proiezione da  $\bigoplus_{t(\gamma)=i} X_{h(\gamma)}$  sul Coker  $\tilde{l}$ . La mappa  $\tilde{l}$  è surgettiva perché altrimenti  $X$  sarebbe una somma diretta di due rappresentazioni  $X = \tilde{X} \oplus V$ . Dove  $\tilde{X}$  è la rappresentazione  $X$  eccetto per lo spazio vettoriale  $X_i$  che viene sostituito da  $\text{Im } \tilde{l}$ , e  $V$  è la rappresentazione con  $V_i$  un complementare di  $\text{Im } \tilde{l}$  e zero altrove. La mappa  $\pi_{h(\gamma)} \circ j : \text{Ker } l \rightarrow X_{h(\gamma)}$  manda  $(f_{\gamma_1}(x), \dots, f_{\gamma_m}(x)) \mapsto f_\gamma(x)$  quindi identificando il dominio con  $X_i$  si ottiene che coincide con  $f_\alpha$ . La rappresentazione così ottenuta è isomorfa a  $X$ .

Si verifica facilmente che i funtori sono additivi, cioè  $\tau_i^+(X \oplus Y) = \tau_i^+ X \oplus \tau_i^+ Y$ . Da qui si deduce che  $\tau_i^- X$  è indecomponibile perché la sua immagine  $\tau_i^+ \tau_i^- X \simeq X$  è indecomponibile.

Per l'iniettività della mappa  $\tilde{l}$  si ottiene che:

$$\begin{aligned} \dim \text{Coker } \tilde{l} &= \sum_{t(\gamma)=i} \dim X_{h(\gamma)} - \dim X_i = -\dim X_i + \sum_{j \neq i} n_{i,j} \dim X_j \\ &= \dim X_i - (\alpha, \epsilon_i) \end{aligned}$$

Tutti gli altri spazi vettoriali non cambiano dimensione quindi

$$\dim \tau_i^- X = s_i \dim X \tag{1.6}$$

□

## 1.4 Il funtore $\tau$

In questa sezione analizziamo i quiver senza cicli e per questa classe definiamo un funtore  $\tau^+$  (e  $\tau^-$ ) come composizione dei funtori  $\tau_i^+$  (risp.  $\tau_i^-$ ). Si osserva che condizione necessaria ma non sufficiente per non avere cicli è non avere loop.

Un quiver senza cicli ammette almeno una numerazione dei vertici tale che  $t(\alpha) > h(\alpha)$  per ogni  $\alpha \in Q_1$ , questo fatto è ovvio dal fatto che un grafo aciclico è un albero. Scelta una tale numerazione dei vertici è ben definita la composizione  $\tau^+ = \tau_1^+ \circ \dots \circ \tau_n^+$  e quella analoga  $\tau^- = \tau_n^- \circ \dots \circ \tau_1^-$ .

**Proposizione 1.32.** *I funtori  $\tau^+$  e  $\tau^-$  mandano rappresentazioni di  $(Q, \Omega)$  in rappresentazioni di  $(Q, \Omega)$ . Inoltre i funtori non dipendono dall'ordinamento scelto.*

*Dimostrazione.* Poiché ogni arco ha due estremi la sua orientazione viene cambiata esattamente due volte dai funtori  $\tau_i$  quindi  $s_1 s_2 \dots s_n \Omega = \Omega$ . Fissato un ordinamento e un'altra composizione che abbia senso si ha per qualche  $\sigma \in S_n$ :

$$\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n = \tau_{\sigma 1} \tau_{\sigma 2} \dots \tau_{\sigma n}$$

Se due vertici non sono connessi da archi ( $n_{i,j} = 0$ ) allora  $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$ . Sia  $k$  il minimo tale che  $\sigma k \neq k$  e dimostro che posso riordinare la seconda scrittura in modo tale che  $\sigma j = j$  per ogni  $j \leq k$ , ciò conclude la dimostrazione. Per brevità chiamo  $\Omega' = s_1 \dots s_{k-1} \Omega$ , il vertice  $\sigma k$  è un pozzo (risp. una sorgente) per l'orientazione  $\Omega'$ . Per ogni  $k \leq i < \sigma k$  poiché si può applicare il funtore  $\tau_i$  si deve avere che  $i$  è un pozzo (risp. una sorgente) e quindi  $\sigma k$  e  $i$  non sono connessi da archi. Sapendo che  $\tau_i$  e  $\tau_{\sigma k}$  commutano, la prima scrittura può essere riformulata come:

$$\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n = \tau_1 \dots \tau_{k-1} \tau_{\sigma k} \tau_k \tau_{k+1} \dots \tau_{(\sigma k)-1} \tau_{(\sigma k)+1} \dots \tau_n$$

Induttivamente ottengo la stessa scrittura quindi il funtore non dipende dall'ordine scelto.  $\square$

Chiamo  $c$  l'elemento corrispondente a  $\tau^+$  nel gruppo di Weyl, cioè la composizione  $s_1 s_2 \dots s_n$ , questo elemento dipende dall'ordine ed è uno degli elementi di Coxeter del gruppo. Ulteriori proprietà di questo elemento si possono trovare in [Hump92, pp 74-76].

**Osservazione 1.33.** *Sia  $X$  una rappresentazione indecomponibile se  $\tau^+ X$  è diverso da zero allora  $\dim \tau^+ X = c \dim X$  e  $\tau^- \tau^+ X \simeq X$ . Analogamente se  $\tau^- X \neq 0$  allora  $\dim \tau^- X = c \dim X$  e  $\tau^+ \tau^- X \simeq X$ .*

La dimostrazione dell'osservazione è ovvia dalla proposizione 1.31.

## 1.5 Un'altra descrizione

Vorrei dare una descrizione alternativa del funtore  $\tau^+$  (e di  $\tau^-$ ), usando un approccio puramente algebrico. L'equivalenza tra la definizione precedente e quella di questo capitolo non verrà dimostrata, ma si può trovare nell'articolo [BB].

Introduco prima il funtore “duale”  $D = \text{Hom}_k(\cdot, k)$  che induce una corrispondenza tra  $A$ -moduli sinistri e  $A$ -moduli destri, inoltre manda proiettivi in iniettivi e viceversa. Altre proprietà sono:

$$DDX \simeq X \quad (1.7)$$

$$\text{Hom}_A(X, Y) \simeq \text{Hom}_A(DY, DX) \quad (1.8)$$

L'ultimo isomorfismo manda un morfismo  $f$  nel suo trasposto.

Un altro funtore interessante è  $F \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_A(\cdot, A)$  che associa a  $A$ -moduli sinistri  $A$ -moduli destri.

**Osservazione 1.34.** *Il funtore controvariante  $F$  manda moduli proiettivi in proiettivi.*

*Dimostrazione.* Fisso un  $A$ -modulo proiettivo  $P$  e uso la caratterizzazione dei moduli proiettivi come addendi diretti di moduli liberi  $P \oplus Q = A^n$ . Si ha:

$$\text{Hom}(P, A) \oplus \text{Hom}(Q, A) = \text{Hom}(P \oplus Q, A) = \text{Hom}(A^n, A) = A^n$$

da cui la tesi. □

Definisco ora il funtore di traslazione di Auslander-Reiten, che denoto con  $\tau^+$  perché coincide col funtore  $\tau^+$  del paragrafo precedente. Per ora preferisco usare due notazioni leggermente diverse.

**Definizione 1.35.** Definisco il funtore  $\tau^+ : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A$  come la composizione  $\tau^+ = D \circ R^1F$  dove  $R^1F$  è il primo funtore derivato destro di  $F$  cioè  $\text{Ext}_A^1(\cdot, A)$ . Analogamente si definisce  $\tau^- = R^1F \circ D = \text{Ext}_A^1(D(\cdot), A)$ .

Il funtore  $D \circ F$  è detto funtore di Nakayama, non mi soffermerò troppo sulle sue proprietà però esso sarà usato in alcune dimostrazioni. Mostriamo un paio di proprietà.

**Proposizione 1.36.** *Il funtore  $\tau^-$  è l'aggiunto sinistro di  $\tau^+$ , inoltre i due funtori forniscono la seguente bigezione:*

$$\{ \text{indecomponibili non proiettivi} \} \begin{matrix} \xleftarrow{\tau^+} \\ \xrightarrow{\tau^-} \end{matrix} \{ \text{indecomponibili non iniettivi} \}$$

È utile ricordare la formula di aggiunzione tra il tensore e Hom: sia  $Y$  un  $R$ -modulo sinistro,  $Z$  un  $S$ -modulo sinistro e  $X$  un  $(S, R)$ -bimodulo allora vale:

$$\mathrm{Hom}_S(X \otimes_R Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_R(Y, \mathrm{Hom}_S(X, Z)) \quad (1.9)$$

*Dimostrazione.* Voglio dimostrare che

$$\mathrm{Hom}_A(Y, \tau^+ X) \simeq D(\mathrm{Ext}_A^1(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_A(\tau^- Y, X) \quad (1.10)$$

Osservo che  $R^1 F(P) = 0$  per ogni  $A$ -modulo proiettivo  $P$ , inoltre la composizione tra morfismi è una mappa bilineare ed induce:

$$\mathrm{Hom}_A(X, A) \otimes_A \mathrm{Hom}(A, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}(X, Y)$$

Se  $X = P$  è proiettivo allora la mappa è un isomorfismo.

La suriettività segue dalla proprietà universale dei proiettivi, fissata una mappa  $\varphi : P \rightarrow Y$  e una suriezione  $g : A^n \rightarrow Y$  si ha:

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \swarrow f & \downarrow \varphi \\ A^n & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

L'elemento  $\sum_i f_i \otimes g_i$  viene mandato in  $\varphi$ .

Basta dimostrare l'iniettività per  $X = A^n$  e segue per ogni modulo proiettivo, poiché entrambi i membri si comportano bene per somma diretta. Per  $A^n$  l'iniettività è ovvia.

Voglio ora dimostrare che  $\mathrm{Hom}_A(X, DF(P)) \simeq D \mathrm{Hom}_A(P, X)$  per ogni modulo  $P$  proiettivo. Usando la formula di aggiunzione e la parte precedente della dimostrazione si ha:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_k(F(P), k)) &\simeq \mathrm{Hom}_k(F(P) \otimes_A X, k) \simeq \\ &\simeq D(\mathrm{Hom}_A(P, A) \otimes \mathrm{Hom}_A(A, X)) \simeq \\ &\simeq D \mathrm{Hom}_A(P, X) \end{aligned}$$

Possiamo ora dimostrare il primo isomorfismo dell'equazione 1.10. Scelta una risoluzione proiettiva corta di  $X$  che esiste per il teorema 1.8:

$$0 \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow X \rightarrow 0$$

applico i funtori  $\mathrm{Hom}(Y, DF(\cdot))$  e calcolo  $D \mathrm{Ext}_A^1(X, Y)$ :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(Y, \tau^+ X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Y, DF(P)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Y, DF(Q)) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & D \mathrm{Ext}_A^1(X, Y) & \longrightarrow & D \mathrm{Hom}_A(P, Y) & \longrightarrow & D \mathrm{Hom}_A(Q, Y) \end{array}$$

La prima successione è esatta a sinistra perché  $Q$  è proiettivo ( $\Rightarrow \tau^+ Q = 0$ ) e  $\text{Hom}(Y, \cdot)$  è esatto a sinistra. I due isomorfismi verticali sono dati dalla parte precedente della dimostrazione. Si ha quindi l'isomorfismo:

$$\text{Hom}_A(Y, \tau^+ X) \simeq D(\text{Ext}_A^1(X, Y)) \quad (1.11)$$

Per mostrare il secondo isomorfismo di 1.10 uso che il primo è un isomorfismo e il fatto che  $\text{Ext}_A^1(X, Y) \simeq \text{Ext}_A^1(DY, DX)$  (che segue da 1.8).

$$\begin{aligned} D \text{Ext}_A^1(X, Y) &= \text{Ext}_A^1(DY, DX) = \text{Hom}_A(DX, \tau^+(DY)) = \\ &= \text{Hom}_A(DX, D\tau^-(Y)) = \text{Hom}_A(\tau^- Y, X) \end{aligned}$$

Prima di dimostrare la corrispondenza serve un lemma.

**Lemma 1.37.** *Sia  $X$  un  $A$ -modulo indecomponibile non proiettivo (o non iniettivo) allora  $\text{Hom}_A(X, P) = 0$  per ogni proiettivo  $P$  (risp.  $\text{Hom}_A(I, X) = 0$  per ogni iniettivo  $I$ ) e  $\tau^- \tau^+(X) \simeq X$  (risp.  $\tau^+ \tau^-(X) \simeq X$ ).*

*Dimostrazione.* Dimostro solo il caso “non proiettivo” l'altro è duale. Sia  $\varphi \in \text{Hom}(X, P)$ , il modulo  $\text{Im } \varphi$  è sottomodulo di proiettivo quindi proiettivo. Per la proprietà dei proiettivi la successione

$$0 \rightarrow \text{Ker } \varphi \rightarrow X \rightarrow \text{Im } \varphi \rightarrow 0$$

spezza e quindi  $X \simeq \text{Ker } \varphi \oplus \text{Im } \varphi$ . Il nucleo è non nullo perché altrimenti  $X \simeq \text{Im } \varphi$  sarebbe proiettivo, quindi per indecomponibilità si deve avere  $\text{Im } \varphi = 0$  da cui  $\varphi = 0$ .

Per la seconda parte si prende una risoluzione proiettiva di  $X$ ,  $0 \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow X \rightarrow 0$  e si ottiene la successione esatta lunga del funtore  $F$  (e poi si applica  $D$ ):

$$0 \rightarrow \tau^+ X \rightarrow DF(P) \rightarrow DF(Q) \rightarrow DF(X)$$

Poiché  $A$  è proiettivo  $F(X) = 0$  quindi posso calcolare  $\tau^- \tau^+ X$  usando questa risoluzione e ottengo

$$F(FP) \rightarrow F(FQ) \rightarrow \tau^- \tau^+ X \rightarrow \tau^-(DF(P)) \quad (1.12)$$

Il modulo  $DF(P)$  è iniettivo quindi  $\tau^-(DF(P)) = 0$  inoltre per moduli proiettivi vale

$$P \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(P, A), A) = F(F(P))$$

In generale la mappa non è un isomorfismo, ma essendo un isomorfismo per  $A^n$  allora lo è per ogni proiettivo. La successione 1.12 diventa  $P \rightarrow Q \rightarrow \tau^- \tau^+ X \rightarrow 0$  da cui la tesi.  $\square$

Preso un  $X$  indecomponibile non proiettivo, decompongo  $\tau^+X$  in indecomponibili:  $\tau^+X = \oplus_i Y_i$ . Dato che  $\text{Hom}(\tau^-Y_i, X) = \text{Hom}(Y_i, \tau^+X) \neq 0$  allora  $\tau^-Y_i \neq 0$  e  $Y_i$  non è iniettivo. Per il lemma si ha  $X \simeq \tau^- \tau^+X = \oplus_i \tau^-Y_i$ , per indecomponibilità di  $X$  si deve avere un solo  $Y_i$ . Ho ottenuto che  $\tau^+X$  è indecomponibile e non iniettivo e analogamente si dimostra che la mappa inversa è ben definita.  $\square$

## 1.6 L'elemento di Coxeter

Ricordo che se  $X$  è indecomponibile non proiettivo allora  $\dim \tau^+X = c \dim X$ . Cosa succede per  $c \dim P$  con  $P$  proiettivo?

**Lemma 1.38.** *I vettori  $\{\dim Ae_i\}$  sono una  $\mathbb{Z}$ -base di  $\mathbb{Z}^n$ .*

*Dimostrazione.* Le rappresentazioni  $ke_i$ , con l'azione banale di ogni cammino diverso da  $e_i$  e quest'ultimo agisce con l'identità, hanno dimensione i vettori della base canonica  $\epsilon_i$ . Essi sono una  $\mathbb{Z}$ -base, la risoluzione 1.1, per  $X = ke_i$  fornisce una relazione fra le dimensioni dei  $Ae_i$  e gli  $\epsilon_i$ . Tutti i coefficienti sono in  $\mathbb{Z}$  quindi l'insieme  $\{\dim Ae_i\}_i$  è una  $\mathbb{Z}$ -base.  $\square$

Per rispondere a questa domanda definisco  $\mathbf{c} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  l'applicazione lineare che sulla base manda  $\dim Ae_i \mapsto -\dim DF(Ae_i)$ .

**Proposizione 1.39.** *Le applicazioni lineari  $c$  e  $\mathbf{c}$  coincidono*

*Dimostrazione.* Basta dimostrare che per ogni modulo  $X$  non proiettivo  $\mathbf{c} \dim X = \dim \tau^+X$ . Poiché ogni addendo diretto di un proiettivo è proiettivo vale  $\mathbf{c} \dim P = -\dim DF(P)$ . Per il lemma 1.37 si ha  $F(X) = 0$ , quindi presa la risoluzione proiettiva di  $X$ :

$$0 \rightarrow P' \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow 0$$

si ha la successione esatta lunga:

$$\tau^+P \rightarrow \tau^+X \rightarrow DF(P') \rightarrow DF(P) \rightarrow DF(X)$$

Gli estremi sono nulli perché per ogni proiettivo  $\text{Ext}_A^1(P, A) = 0$ , si ha la relazione sulle dimensioni  $\dim \tau^+X = \dim DF(P') - \dim DF(P) = \mathbf{c}(\dim P - \dim P') = \mathbf{c} \dim X$ .  $\square$

Dimostro un lemma utile per provare il teorema di Gabriel della prossima sezione.

**Lemma 1.40.** *Sia  $Q$  di Dynkin e  $c$  un elemento di coxeter allora 1 non è autovalore per  $c$  e per ogni  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  non nullo esiste  $i$  tale che  $c^i \alpha \notin \mathbb{N}^n$ .*

*Dimostrazione.* Per assurdo esiste  $\alpha \neq 0$  tale che  $c\alpha = \alpha$  e prendo in considerazione un ordinamento dei vertici tale che  $c = s_n s_{n-1} \dots s_2 s_1$ . Ricorsivamente dimostro che  $(\alpha, \epsilon_i) = 0$  e  $s_i \alpha = \alpha$ . Guardando la componente  $i$ -esima del vettore  $\alpha$  si ottiene:

$$(\alpha)_i = (c\alpha)_i = (s_i s_{i-1} \dots s_1 \alpha)_i = (s_i \alpha)_i = (\alpha)_i - (\alpha, \epsilon_i)$$

Il passaggio centrale si ottiene supponendo la tesi vera per tutti i  $j < i$ . La facile conclusione è  $(\alpha, \epsilon_i) = 0$  e  $s_i \alpha = \alpha$ . Poiché gli  $\epsilon_i$  generano e  $q$  è definita positiva si ottiene  $\alpha = 0$ .

Per la seconda parte osservo che esiste un naturale  $h$  tale che  $c^h = 1$  poiché il gruppo  $\mathcal{W}$  è finito. Il vettore  $\sum_{i=0}^{h-1} c^i \alpha$  è invariante per  $c$  quindi per la prima parte è nullo. Essendo  $\alpha > 0$  esiste un indice  $i$  tale che  $c^i \alpha \notin \mathbb{N}^n$ .  $\square$

**Lemma 1.41.** *Per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$  si ha:*

$$\langle \alpha, \beta \rangle = -\langle \beta, c\alpha \rangle = \langle c\alpha, c\beta \rangle$$

*Dimostrazione.* I vettori  $\dim Ae_i$  sono una  $\mathbb{Z}$ -base del reticolo  $\mathbb{Z}^n$ , dimostro usando la formula 1.2 che la tesi vale per  $\alpha = \dim Ae_i$  e poi tratto il caso generale.

Vale:

$$\langle \dim Ae_i, \dim X \rangle = \dim e_i X = \langle \dim X, \dim D(e_i A) \rangle$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \langle \dim Ae_i, \dim X \rangle &= \dim \text{Hom}_A(Ae_i, X) - \underbrace{\dim \text{Ext}_A^1(Ae_i, X)}_{=0} \\ &= \dim e_i X \\ &= \dim \text{Hom}_A(e_i A, DX) \\ &= \dim \text{Hom}_A(X, D(e_i A)) - \underbrace{\dim \text{Ext}_A^1(X, D(e_i A))}_{=0} \\ &= \langle \dim X, \dim D(e_i A) \rangle \end{aligned}$$

e per linearità si estende a ogni elemento  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ :  $\langle \dim Ae_i, \alpha \rangle = \alpha_i = \langle \alpha, \dim D(e_i A) \rangle$ .

Si ha infine  $\langle \dim Ae_i, \alpha \rangle = -\langle \alpha, c \dim Ae_i \rangle$  poiché  $D(e_i A) = DF(Ae_i)$ . Per linearità vale l'uguaglianza per ogni  $\beta \in \mathbb{Z}^n$ :  $\langle \beta, \alpha \rangle = -\langle \alpha, c\beta \rangle$ . Applicando due volte l'uguaglianza si ottiene  $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle c\alpha, c\beta \rangle$ .  $\square$

Un interessante corollario è il seguente:

**Corollario 1.42.** *Sia  $Q$  un quiver senza cicli orientati, un vettore  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$  è nel radicale della forma di Ringel  $(\cdot, \cdot)$  se e solo se  $c\alpha = \alpha$ .*

*Dimostrazione.* Per ogni  $\beta \in \mathbb{Z}^n$  si ha  $(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha \rangle = \langle \alpha - c\alpha, \beta \rangle$ , una implicazione è ovvia. Se non ci sono cicli esiste un ordinamento dei vertici per cui la matrice che rappresenta  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è triangolare superiore con uni sulla diagonale. La condizione  $\langle \alpha - c\alpha, \beta \rangle = 0$  per ogni  $\beta$  implica  $\alpha - c\alpha = 0$ .  $\square$

## 1.7 Teorema di Gabriel

Mettendo insieme i risultati delle sezioni precedenti sulle varietà delle rappresentazioni, sui sistemi di radici e usando i funtori di riflessione si arriva a una facile dimostrazione del teorema di Gabriel.

Definiamo gli insiemi delle rappresentazioni indecomponibili di dimensione  $\alpha$

$$\text{Ind}(Q, \Omega, \alpha) = \#\{X \in \text{Rep}(Q, \Omega, \alpha) \mid X \text{ è indecomponibile}\}$$

$$\text{NInd}(Q, \Omega) = \{\text{classe di isomorfismo di rappresentazioni indecomponibili}\}$$

Spesso sarà omessa la dipendenza di  $\text{Ind}(Q, \Omega, \alpha)$  dal quiver e dall'orientazione e sarà semplicemente denotato con  $\text{Ind}(\alpha)$ .

**Teorema 1.43** (Gabriel). *Sia  $(Q, \Omega)$  un quiver, allora valgono:*

- $\text{NInd}(Q, \Omega) < +\infty$  di se e solo se il grafo  $Q$  è di Dynkin.
- Se  $Q$  è di Dynkin allora  $\dim : \text{Ind}(Q, \Omega) /_{\text{iso}} \rightarrow \Phi^+$  è una bigezione.

*Dimostrazione.* Suppongo  $\text{NInd}(Q, \Omega)$  finito e fissato  $\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$  esistono solo finiti moduli a meno di isomorfismo di dimensione  $\alpha$ . Di conseguenza  $\text{Rep}(\alpha)$  ha finite orbite e quindi almeno una aperta che chiamo  $\mathcal{O}_X$ . Usando il corollario 1.15 si ottiene

$$\dim \text{Rep}(\alpha) = \dim \mathcal{O}_X = \dim G(\alpha) - \dim \text{Stab } X$$

da cui si ottiene  $\alpha^T \alpha - q(\alpha) = \alpha^T \alpha - \dim \text{Stab } X$ . Osservo che  $\lambda \text{Id}$  è un sottogruppo di dimensione uno dello stabilizzatore e quindi  $q(\alpha) \geq 1$ . Un generico elemento di  $\mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n$  è della forma  $\alpha - \beta$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ ,  $\beta \neq 0$  e con supporti disgiunti  $\text{supp } \alpha \cap \text{supp } \beta = \emptyset$ . Vale la formula

$$q(\alpha - \beta) = q(\alpha) + q(\beta) - (\alpha, \beta) \geq 0 + 1 + 0$$

Di conseguenza  $q$  è definita positiva e il quiver è di Dynkin.

Prima di mostrare l'altra implicazione dimostro il secondo punto. È facile vedere che  $\dim$  è a valori in  $\mathbb{N}^n$ . Sia  $X$  una rappresentazione indecomponibile e  $\alpha$  la sua dimensione, per il lemma 1.40 esiste  $k$  tale che  $c^k \alpha \notin \mathbb{N}^n$ .

Fissata una scrittura di  $c$ , l'elemento  $c^k$  si scrive come  $s_{a_{kn}} s_{a_{kn-1}} \dots s_{a_1}$  e sia  $l$  il massimo indice tale che per ogni  $i < l$   $s_{a_i} s_{a_{i-1}} \dots s_{a_1} \alpha \in \mathbb{N}^n$ . Chiamo

$Y$  la rappresentazione  $\tau_{a_{l-1}}^+ \dots \tau_{a_2}^+ \tau_{a_1}^+ X$  che è indecomponibile e non nulla. Poiché  $\tau_{a_l}^+ Y$  non ha dimensione positiva allora si deve avere  $Y \simeq ke_{a_l}$ . In conclusione  $X \simeq \tau_{a_1}^- \tau_{a_2}^- \dots \tau_{a_{l-1}}^- ke_{a_l}$  e  $\alpha \in \mathcal{W}\epsilon_{a_l} \subset \Phi$ .

Questo fatto dimostra che se esiste unica rappresentazione indecomponibile di dimensione  $\alpha$  se e solo se  $\alpha$  è radice. Inoltre dato che il sistema di radici di un Dynkin è finito segue l'altra implicazione della prima parte del teorema, cioè  $\text{NInd}(Q, \Omega) < +\infty$ .  $\square$

## 1.8 Il caso euclideo

La peculiarità dei quiver euclidei è che sono i più semplici quiver a cui il teorema di Gabriel non fornisce informazioni soddisfacenti. Inoltre la classificazione delle matrici del teorema 1.20 implica una forte proprietà sulle radici e ne fornisce una privilegiata  $\delta$ . Questi strumenti porteranno a determinare le rappresentazioni indecomponibili, non in maniera esplicita, ma fornendo il numero di parametri da cui dipendono. Supponiamo per tutta la sezione che  $Q$  non abbia cicli orientati, cosa che potrebbe succedere solo per  $\tilde{A}_n$  e che  $\text{char } k = 0$ .

Introduco una terminologia associata solo ai quiver euclidei.

**Definizione 1.44.** Una rappresentazione indecomponibile  $X$  si dice:

- preproiettiva se esiste  $n \in \mathbb{N}$  con  $(\tau^+)^n(X) = 0$ .
- preiniettiva se esiste  $n \in \mathbb{N}$  con  $(\tau^-)^n(X) = 0$ .
- regolare se per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  si ha  $\tau^n(X) \neq 0$ . Una qualsiasi rappresentazione  $X$  si dice preproiettiva (risp. preiniettiva e regolare) se ogni suo addendo indecomponibile lo è.

Non è chiaro dalla definizione se una rappresentazione può essere sia preproiettiva sia preiniettiva, invece risulta evidente che  $X = (\tau^-)^i Ae_j$  se e solo se  $X$  è preproiettivo e che  $X = (\tau^+)^i D(e_j A)$  se e solo se  $X$  è preiniettivo. I moduli  $Ae_j$  hanno come base i cammini che partono dal vertice  $j$  e con l'azione di  $\gamma$  data dalla giunzione. Invece i moduli  $D(e_j A) \simeq D(A)e_j$  hanno come base tutti i cammini che arrivano al vertice  $j$ , si può anche vedere come l'insieme dei cammini che partono da  $j$  nel quiver  $Q^{op}$ , ottenuto da  $Q$  cambiando l'orientazione di tutte le frecce.

Serve una definizione:

**Definizione 1.45.** Il difetto di  $X$  è l'intero  $\langle \delta, \dim X \rangle$ .

Poiché  $\delta$  è nel radicale di  $C$  si ha  $(\alpha, \delta) = 0$  per ogni radice, cioè  $\langle \delta, \alpha \rangle = -\langle \alpha, \delta \rangle$ ; il difetto di  $X$  si può anche calcolare da  $\langle \dim X, \delta \rangle$ .

La seguente proposizione dimostra che preproiettivi e preiniettivi sono distinti.

**Proposizione 1.46.** *Il difetto di  $X$  è:*

- *negativo se e solo se  $X$  è preproiettivo.*
- *positivo se e solo se  $X$  è preiniettivo.*
- *nullo se e solo se  $X$  è regolare.*

*Dimostrazione.* Se  $X$  è preproiettivo allora

$$\begin{aligned} \langle \delta, \dim(\tau^-)^i Ae_j \rangle &= \langle \delta, c^{-i} \dim Ae_j \rangle = \langle c^i \delta, \dim Ae_j \rangle = \\ &= -\langle \dim Ae_j, c^{i+1} \delta \rangle = -\langle \dim Ae_j, \delta \rangle = -\delta_j < 0 \end{aligned}$$

Analogamente per  $X$  preiniettivo si dimostra  $\langle \dim X, \delta \rangle > 0$ .

Passiamo al caso  $X$  regolare, l'applicazione lineare  $c$  è un'isometria di  $\mathbb{Z}^n$  che permuta le radici di  $\Phi$ . L'insieme  $\Phi \cup \{0\} / \mathbb{Z}\delta$  è finito quindi esiste un intero  $N$  tale che  $c^N \dim X = \dim X + k\delta$  per ogni indecomponibile  $X$  ( $k$  può dipendere da  $X$ ). Per induzione si dimostra che  $c^{iN} \dim X = \dim X + ik\delta$  per ogni  $i$  in  $\mathbb{Z}$ . Se  $k \neq 0$  per  $i$  molto grande in modulo si ha  $c^{iN} \dim X < 0$  ma se  $X$  è regolare allora  $c^{iN} \dim X = \dim \tau^{iN} X \geq 0$ . Quindi si deve avere  $c^N \dim X = \dim X$ , definisco  $\beta = \sum_{i=0}^{N-1} \langle \delta, c^i \dim X \rangle$ . Si ha  $c\beta = \beta$  e  $0 = \langle \delta, \beta \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \langle \delta, c^i \dim X \rangle = N \langle \delta, \dim X \rangle$ .  $\square$

Studio ora le radici reali di un quiver di tipo euclideo.

**Teorema 1.47.** *Sia  $\alpha$  una radice reale positiva con  $\alpha \leq \delta$  oppure con  $\langle \alpha, \delta \rangle \neq 0$ . Esiste un unico, a meno di isomorfismo, indecomponibile di dimensione  $\alpha$  ed è un brick senza autoestensioni.*

Per la dimostrazione servono tre lemmi.

**Lemma 1.48.** *Sia  $X$  un indecomponibile che non sia un brick allora esiste un sottomodulo  $Y$  e un quoziente  $Z$  indecomponibili, brick e con autoestensioni (cioè  $\text{Ext}^1(Y, Y) \neq 0$ ).*

*Dimostrazione.* Dimostro che esistono sottomoduli e quozienti indecomponibili con autoestensioni, prendendone uno minimale per inclusione deve essere un brick.

Poiché  $\text{End}(X)$  è  $k$ -algebra finita e locale non banale allora esiste un endomorfismo nilpotente, prendo al variare degli endomorfismi uno con immagine di dimensione minima (e non nulla) e lo denoto con  $f$ . Poiché  $\text{Im } f^2 \subsetneq \text{Im } f$  si deve avere  $f^2 = 0$ . Il nucleo di  $f$  si decompone in moduli indecomponibili  $\bigoplus_i K_i = \text{Ker } f$ , e sia  $\pi_i$  la proiezione sulla  $i$ -esima componente. La composizione  $g : \text{Im } f \rightarrow \text{Ker } f \xrightarrow{\pi_i} K_i$  è non nulla per almeno un indice, ne fisso uno che chiamo  $j$ .

$$X \xrightarrow{f} \text{Im } f \xrightarrow{g} K_j \hookrightarrow X$$

La composizione sopra è non nulla e ha immagine contenuta in  $\text{Im } f$ , per minimalità si deve avere che  $g$  è iniettiva, essa induce

$$\text{Ext}_A^1(K_j, K_j) \xrightarrow{g^*} \text{Ext}_A^1(\text{Im } f, K_j) \rightarrow \text{Ext}_A^2(K_j/\text{Im } f, K_j) = 0$$

Voglio dimostrare che  $\text{Ext}_A^1(\text{Im } f, K_j) \neq 0$  e quindi  $K_j$  è il sottomodulo indecomponibile con autoestensioni che cercavo. Sia  $Y$  il seguente pushout:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \text{Im } f \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \beta & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & K_j & \xrightarrow{\quad} & Y & \longrightarrow & \text{Im } f \longrightarrow 0 \\ & & & \swarrow r & & & \end{array}$$

Suppongo per assurdo che  $\text{Ext}_A^1(\text{Im } f, K_j) = 0$  quindi esiste la retrazione  $r$ , per il lemma del serpente si ha  $\text{Im } \beta = Y$  e  $\text{Ker } \beta = \bigoplus_{i \neq j} K_i$ . L'inclusione  $K_j \hookrightarrow X$  ha una retrazione data da  $r \circ \beta$  quindi  $K_j$  sarebbe un addendo diretto di  $X$  contro l'ipotesi che  $X$  sia indecomponibile.

Per l'esistenza del quoziente si procede in modo duale. Sia sempre  $f$  con immagine di dimensione minima, si ha l'inclusione  $\text{Ker } f \supseteq \text{Im } f$  e la suriezione  $\text{Coker } f \twoheadrightarrow \text{Im } f$ . Spezzando in indecomponibili  $\text{Coker } f = \bigoplus_i C_i$  si ha per un indice  $k$  che  $g' : C_i \hookrightarrow \text{Coker } f \twoheadrightarrow \text{Im } f$  è non nulla. Per minimalità  $g'$  è suriettiva e induce  $\text{Ext}_A^1(C_k, C_k) \twoheadrightarrow \text{Ext}_A^1(C_k, \text{Im } f)$ . Infine analizzando il diagramma ottenuto dal pullback su  $Y'$ :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Im } f & \longrightarrow & Y' & \xleftarrow{s} & C_k \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \beta' & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Im } f & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \text{Ker } f \longrightarrow 0 \end{array}$$

Se esiste la sezione  $s$  analogamente a prima  $C_k$  sarebbe un addendo diretto di  $X$  quindi la successione in alto non spezza e  $\text{Ext}_A^1(C_k, C_k)$  è non nullo.  $\square$

**Lemma 1.49.** *In un quiver euclideo se  $X$  è un brick con autoestensioni allora  $\dim X = k\delta$  con  $k > 0$ .*

*Dimostrazione.* Per ipotesi  $\dim \text{End } X = 1$  e  $\dim \text{Ext}_A^1(X) \geq 1$  quindi per la formula 1.2  $q(\dim X) \leq 0$ ; per il teorema 1.20 si ha  $\dim X = k\delta$ .  $\square$

**Lemma 1.50.** *Se  $X$  è preproiettivo e  $Y$  non lo è, allora  $\text{Hom}(Y, X) = 0$ . Se  $X$  è preiniettivo e  $Z$  non lo è, allora  $\text{Hom}(X, Z) = 0$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $Y$  non è preproiettivo si ha  $(\tau^-)^i(\tau^+)^i Y = Y$  per ogni intero positivo. Per la formula 1.2 si ha  $\text{Hom}((\tau^-)^i(\tau^+)^i Y, X) = \text{Hom}((\tau^+)^i Y, (\tau^+)^i X)$ , e quest'ultimo è nullo perché per  $i$  sufficientemente grande  $(\tau^+)^i X = 0$ . La dimostrazione del secondo punto è identica.  $\square$

*Dimostrazione del Teorema 1.47.* L'esistenza di un modulo indecomponibile  $X$  è garantita dai funtori di riflessione e dal fatto che  $ke_i$  è indecomponibile. Se  $X$  non fosse un brick, si avrebbero un sottomodulo  $Y$  e un quoziente  $Z$  brick con autoestensioni e per il lemma avrebbero dimensione maggiore di  $\delta$  e sarebbe assurdo se  $\alpha \leq \delta$ . Rimane il caso con  $\langle \delta, \alpha \rangle \neq 0$ , il modulo  $X$  è preproiettivo o preiniettivo. Nel primo caso il sottomodulo  $Y$  che è regolare si immergerebbe in  $X$  contro il lemma sopra. Nel secondo caso si avrebbe una mappa non nulla  $X \twoheadrightarrow Z$  con  $Z$  regolare contrario al secondo punto del lemma sopra.  $\square$

Studio ora la sottocategoria dei moduli regolari.

**Proposizione 1.51.** *Per ogni  $X$  e  $Y$  moduli regolari sia  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo allora:*

- *I seguenti moduli sono regolari:  $\text{Ker } f$ ,  $\text{Im } f$  e  $\text{Coker } f$ .*
- *Se si ha una successione esatta corta  $0 \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow 0$  allora  $Z$  è regolare.*
- *I funtori  $\tau^+$  e  $\tau^-$  sono uno l'inverso dell'altro su questa categoria<sup>3</sup>.*

*Dimostrazione.*

- Se  $f \neq 0$  per il lemma 1.50  $\text{Im } f$  non può essere né preiniettiva né preproiettiva  $X \xrightarrow{f} \text{Im } f \hookrightarrow Y$  perché nessuna delle due mappe è nulla. Il modulo  $\text{Ker } f \hookrightarrow X$  non ha addendi indecomponibili preiniettivi, inoltre la successione esatta  $0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow X \xrightarrow{f} \text{Im } f \rightarrow 0$  permette di calcolare  $\langle \delta, \text{Ker } f \rangle = \langle \delta, X \rangle - \langle \delta, \text{Im } f \rangle = 0$ . In particolare  $\text{Ker } f$  non ha addendi preproiettivi quindi è regolare.

Analogamente per  $Y \twoheadrightarrow \text{Coker } f$  non possono esistere addendi preproiettivi e la successione  $0 \rightarrow \text{Im } f \rightarrow Y \xrightarrow{f} \text{Coker } f \rightarrow 0$  permette di calcolare  $\langle \delta, \text{Coker } f \rangle = 0$ , quindi  $\text{Coker } f$  è regolare.

- Se  $Y = 0$  o  $X = 0$  allora la tesi è ovvia, altrimenti le mappe  $Y \hookrightarrow Z$  e  $Z \twoheadrightarrow X$  implicano rispettivamente che  $Z$  non ha addendi preproiettivi e preiniettivi.
- È un caso particolare del lemma 1.37.

---

<sup>3</sup>Questa osservazione permette la notazione  $\tau \stackrel{def}{=} \tau^+$  e  $\tau^{-1} \stackrel{def}{=} \tau^-$ .

□

**Definizione 1.52.** Un modulo  $S$  regolare si dice semplice regolare se è non nullo e non ha sottomoduli regolari non banali.

Questi sono i moduli regolari più semplici e sono i “mattoncini” che formano tutti gli altri moduli indecomponibili regolari. Il prossimo teorema afferma che l’orbita di una rappresentazione semplice regolare è di cardinalità finita.

**Teorema 1.53.** *Sia  $X$  un modulo semplice regolare allora è un brick ed esiste un intero  $N$  tale che  $\tau^N X \simeq X$ . Questo intero è uno se e solo se  $\dim X$  è radice immaginaria.*

Il minimo intero positivo  $p$  per cui  $\tau^p X \simeq X$  è chiamato periodo di  $X$ .

*Dimostrazione.* Ogni endomorfismo non nullo è iniettivo e suriettivo perché  $\text{Ker } f$  e  $\text{Im } f$  sono sottomoduli regolari, di conseguenza  $\text{End}(X) = k \text{Id}$  cioè  $X$  è un brick.

Se  $\dim X$  è reale, come visto nella dimostrazione della proposizione 1.46 esiste un intero per cui  $\dim X = c^N \dim X$ . Si ha:

$$\begin{aligned} 1 &= q(\dim X) = \langle \dim X, \dim X \rangle = \langle \dim X, c^N \dim X \rangle = \\ &= \langle \dim X, \dim \tau^N X \rangle = \dim \text{Hom}(X, \tau^N X) - \dim \text{Ext}(X, \tau^N X) \end{aligned}$$

per cui  $\text{Hom}(X, \tau^N X)$  è non nullo. Essendo  $X$  e  $\tau^N X$  semplici regolari ogni morfismo non nullo è un isomorfismo cioè  $X \simeq \tau^N X$

Se  $\dim X$  è radice immaginaria, essendo un brick e  $q(\dim X) = 0$  si ha  $\text{Ext}_A^1(X, X) \neq 0$  di conseguenza  $\text{Hom}(X, \tau X) = D \text{Ext}_A^1(X, X) \neq 0$  per 1.11. Un morfismo tra  $X$  e  $\tau X$  non nullo deve essere un isomorfismo perché il nucleo e l’immagine sono regolari.

Viceversa se  $\tau X \simeq X$  allora  $\dim \tau X = \dim X$  e per il corollario 1.42  $\dim X$  è immaginaria. □

Posso ora dare la definizione di tubo.

**Definizione 1.54.** Un modulo si dice uniseriale regolare se tutti e soli i sottomoduli regolari sono gli  $X_i$  con i contenimenti:

$$0 = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_r = X$$

Il modulo  $X_1$  si dice zoccolo regolare di  $X$ ,  $X/X_{r-1}$  si chiama top regolare e l’intero  $r$  la lunghezza regolare.

Sia  $Y$  un modulo semplice regolare e  $T$  la sua orbita secondo  $\tau$  (un insieme finito di moduli semplici regolari) il tubo  $T$  è l’insieme di tutti i moduli uniseriali regolari  $X$  con  $X_1 \in T$ .

I moduli uniseriali regolari non sono pochi infatti:

**Proposizione 1.55.** *Se  $X$  è uniserialmente regolare e  $S$  è semplice regolare se la successione:*

$$0 \rightarrow S \rightarrow Y \xrightarrow{f} X \rightarrow 0$$

*è esatta e non spezza allora  $Y$  è uniserialmente regolare.*

*Dimostrazione.* Sia  $Y' \neq 0$  un sottomodulo semplice regolare di  $Y$  dimostro che  $Y'$  coincide con  $S$ , di conseguenza i sottomoduli regolari di  $Y$  contenenti  $S$  sono in corrispondenza biunivoca coi sottomoduli regolari di  $X$ .

Sia  $X_1$  l'unico modulo semplice in  $X$ , l'inclusione  $X_1 \hookrightarrow X$  induce l'inclusione  $\text{Hom}(\tau^{-1}S, X_1) \hookrightarrow \text{Hom}(\tau^{-1}S, X)$ . Questo morfismo è suriettivo perché  $\tau^{-1}S$  è semplice regolare quindi l'immagine è semplice regolare e contenuta in  $X_1$ , i moduli

$$\text{Ext}_A^1(X, S) \simeq D \text{Hom}(\tau^{-1}S, X) \simeq D \text{Hom}(\tau^{-1}S, X_1) \simeq \text{Ext}_A^1(X_1, S)$$

sono isomorfi (è stata usata la formula 1.11). L'isomorfismo è indotto dalla mappa  $X_1 \hookrightarrow X$  quindi il diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{f} & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

commuta, la successione in alto non spezza e il modulo  $Z = f^{-1}(X_1)$  è regolare. Se  $f(Y') = 0$  allora  $Y' \subseteq S$  e l'uguaglianza perché  $S$  è semplice. Altrimenti  $f(Y') \supseteq X_1$ , per semplicità di  $Y'$  si ha l'uguaglianza e  $Z = f^{-1}(f(Y')) = Y' + S$ . Dato che la successione non spezza  $Y' \cap S \neq 0$  quindi  $Y' = S$ .  $\square$

Descrivo esplicitamente tutti i moduli uniseriali regolari a partire dai moduli semplici regolari. I moduli regolari semplici  $S$  sono ovviamente uniseriali regolari, un facile conto mostra che  $\text{Ext}_A^1(\tau^{-1}S, S) = k$  perché  $\text{End}(\tau^{-1}S) = k \text{Id}$ . In particolare esiste unica a meno di isomorfismo successione esatta che non spezza:

$$0 \rightarrow S \rightarrow X \rightarrow \tau^{-1}S \rightarrow 0$$

Il modulo  $X$  è regolare e uniserialmente per la proposizione sopra.

Analogamente, fissati un modulo semplice  $S$  e un intero  $r$ , si possono costruire induttivamente moduli uniseriali regolari  $X$  con  $X_1 = S$  e esattamente  $r + 1$  sottomoduli regolari.

**Lemma 1.56.** *Per ogni modulo semplice regolare  $S$  e per ogni intero positivo  $r$  esiste unico, a meno di isomorfismo, modulo uniserialmente regolare con zoccolo  $X_1 = S$  e esattamente  $r + 1$  sottomoduli regolari.*

*Dimostrazione.* Mostro l'esistenza contemporaneamente per tutti gli  $S$  per induzione su  $r$ , il passo base è ovvio. Suppongo esista  $X_r^{(S)}$  come da ipotesi, le estensioni  $0 \rightarrow S \rightarrow Y \rightarrow X_r^{(\tau^{-1}S)} \rightarrow 0$  sono in corrispondenza con  $\mathbb{P} \text{Ext}_A^1(X_r^{(\tau^{-1}S)}, S)$ . Si ha  $\mathbb{P} \text{Ext}_A^1(X_r^{(\tau^{-1}S)}, S) \simeq D \text{Hom}(\tau^{-1}S, X_r^{(\tau^{-1}S)}) = D \text{Hom}(\tau^{-1}S, \tau^{-1}S) \simeq k$ , quindi esiste unica estensione cercata.  $\square$

Il seguente teorema motiva l'interesse per i moduli uniseriali regolari: grazie a essi siamo riusciti a ricondurre lo studio dei moduli regolari indecomponibili a quello dei moduli semplici regolari.

**Teorema 1.57.** *Ogni modulo indecomponibile regolare è uniserial regolare.*

*Dimostrazione.* Dimostro la tesi per induzione sulla dimensione del modulo indecomponibile  $X$ . Sia  $S$  un sottomodulo semplice regolare di  $X$  e prendo in considerazione la successione  $0 \rightarrow S \rightarrow X \xrightarrow{f} X/S \rightarrow 0$ . Il conucleo si decompone in  $X/S = \bigoplus_{i=1}^s Y^i$  moduli indecomponibili che, per ipotesi induttiva, sono uniseriali regolari. Il modulo  $\text{Ext}_A^1(X/S, S)$  si spezza come  $\bigoplus_{i=1}^s \text{Ext}_A^1(Y^i, S)$  e, come osservato sopra, le successioni esatte

$$0 \rightarrow S \rightarrow f^{-1}(Y^i) \rightarrow Y^i \rightarrow 0$$

non spezzano. Poiché  $0 \neq \text{Ext}_A^1(Y^i, S) \simeq \text{Ext}_A^1(Y_1^i, S) \simeq D \text{Hom}(\tau^{-1}S, Y_1^i)$  i moduli  $Y_1^i$  e  $\tau^{-1}S$  sono isomorfi e  $\dim \text{Ext}_A^1(Y^i, S) = 1$ . Se  $s = 1$  si ha la tesi, altrimenti suppongo  $s > 1$  e cerco un assurdo. Suppongo, a meno di riordinare gli addendi che  $\dim Y^1 \leq \dim Y^2$  quindi  $Y^1 \hookrightarrow Y^2$  e  $\text{Ext}_A^1(Y^2, S) \simeq \text{Ext}_A^1(Y^1, S)$ . Riesco quindi a trovare un sottomodulo  $Z$  di  $Y^1 \oplus Y^2$  tale che l'estensione  $0 \rightarrow S \rightarrow X \xrightarrow{f} X/S \rightarrow 0$  induce  $0 \rightarrow S \rightarrow f^{-1}Z \rightarrow Z \rightarrow 0$  che spezza. Ciò è assurdo perché  $X$  si decomporrebbe.  $\square$

Il teorema più importante e difficile sulle rappresentazioni di quiver euclidei è il seguente.

**Teorema 1.58.** *Fissati i moduli  $P = Ae_i$  proiettivo associato a un vertice d'estensione  $i$  e  $Q$  preproiettivo di dimensione  $\dim P + \delta$ , brick senza autoestensioni, allora esiste una bigezione:*

$$\mathbb{P}_k^1 \simeq \mathbb{P} \text{Hom}(P, Q) \rightarrow \{ \text{tubi} \}$$

data da  $f \mapsto \text{Coker } f$ .

L'esistenza di un tale  $Q$  è garantita dal teorema 1.47 ( $\langle \delta, \dim Q \rangle = -1 \neq 0$ ), prima della dimostrazione calcoliamo qualche invariante. Si ha:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(Q, P) &= 0 & \text{Ext}_A^1(Q, P) &= 0 \\ \text{Hom}_A(P, Q) &\simeq k^2 & \text{Ext}_A^1(P, Q) &= 0 \end{aligned}$$

Infatti la differenza tra le dimensioni si calcolano con  $\langle \dim P, \dim P \rangle = 1 = \delta_i = \langle \dim P, \delta \rangle$ ,  $\langle \dim Q, \dim P \rangle = 0$  e  $\langle \dim P, \dim Q \rangle = 2$ . Inoltre  $\text{Hom}_A(Q, P) = 0$  segue dal fatto che per ogni  $f : Q \rightarrow P$  si ha  $Q = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$  e per indecomponibilità si ha  $f = 0$ . Infine  $\text{Ext}_A^1(P, Q) = 0$  perché  $P$  è proiettivo.

*Dimostrazione.* Sia  $f \in \text{Hom}(P, Q) \setminus \{0\}$ ,  $\text{Ker } f$  (se non nullo) è proiettivo perché sottomodulo di proiettivo e  $\text{Im } f$  è preproiettivo perché sottomodulo di preproiettivo. La successione esatta corta  $0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow P \rightarrow \text{Im } f \rightarrow 0$  permette di calcolare  $-1 = \langle \delta, \dim P \rangle = \langle \delta, \dim \text{Ker } f \rangle + \langle \delta, \dim \text{Im } f \rangle \leq -1 - 1 = -2$ . Si deve avere  $\text{Ker } f = 0$ , quindi  $\text{Coker } f$  ha dimensione  $\delta$  ed è regolare.

Analizzo la successione esatta:

$$0 \rightarrow P \xrightarrow{f} Q \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow 0$$

Applico il funtore  $\text{Hom}_A(\cdot, P)$  e ottengo:

$$0 = \text{Hom}_A(Q, P) \rightarrow \text{Hom}_A(P, P) \rightarrow \text{Ext}_A^1(\text{Coker } f, P) \rightarrow \text{Ext}_A^1(Q, P) = 0$$

scopro  $\text{Ext}_A^1(\text{Coker } f, P) \simeq \text{End}(P) \simeq k$ , ora applico il funtore  $\text{Hom}(\cdot, Q)$ :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(\text{Coker } f, Q) \rightarrow \text{Hom}_A(Q, Q) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_A(P, Q)$$

dato che  $\dim \text{Hom}_A(Q, Q) = 1$  e  $f^* \neq 0$  si ottiene  $\text{Hom}_A(\text{Coker } f, Q) = 0$ . Infine applicando il funtore  $\text{Hom}_A(\text{Coker } f, \cdot)$  si ottiene

$$0 = \text{Hom}_A(\text{Coker } f, Q) \rightarrow \text{Hom}_A(\text{Coker } f, \text{Coker } f) \rightarrow \text{Ext}_A^1(\text{Coker } f, P) \simeq k$$

che  $\text{End}(\text{Coker } f) = k \text{Id}$  cioè  $\text{Coker } f$  è indecomponibile e brick. Ho finalmente dimostrato che la mappa è ben definita.

Per dimostrare l'iniettività serve osservare che ogni morfismo  $\varphi$  tra  $Q$  e  $\text{Coker } f$  si solleva a endomorfismo di  $Q$ , infatti:

$$0 = \text{Hom}_A(Q, P) \rightarrow \text{Hom}_A(Q, Q) \rightarrow \text{Hom}_A(Q, \text{Coker } f) \rightarrow \text{Ext}_A^1(Q, P) = 0$$

La mappa  $a$  esiste per quanto appena osservato e la mappa  $b$  perché  $P$  è proiettivo.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{g} & Q & \longrightarrow & \text{Coker } g \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow b & & \downarrow a & & \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{f} & Q & \longrightarrow & \text{Coker } f \longrightarrow 0 \end{array}$$

Le mappe  $a$  e  $b$  sono multipli dell'identità perché  $P$  e  $Q$  sono brick e quindi  $g = \lambda f$ . Ciò dimostra l'iniettività.

Per dimostrare la surgettività serve osservare che il top regolare  $T$  di Coker  $f$  ha dimensione uno in  $i$ . Infatti:

$$\begin{aligned} (\dim T)_i &= \dim \text{Hom}(P, T) = \langle \dim P, \dim T \rangle = \langle \dim P + \delta, \dim T \rangle = \\ &= \langle \dim Q, \dim T \rangle = \dim \text{Hom}(Q, T) \neq 0 \end{aligned}$$

Il modulo  $\text{Hom}(Q, T)$  è non nullo perché contiene la mappa  $Q \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow T$ .

**Lemma 1.59.** *Sia  $X$  un modulo semplice regolare di periodo  $p$  tale che  $(\dim X)_i \neq 0$  allora esiste  $f \in \text{Hom}(P, Q)$  tale che  $\text{Hom}(\text{Coker } f, X) \neq 0$ .*

*Dimostrazione.* Osservo che  $\text{Ext}_A^1(Q, X) = 0$  perché  $Q$  è preproiettivo e  $X$  regolare, si ha  $\dim \text{Hom}_A(Q, X) = \langle \dim P + \delta, \dim X \rangle = \langle \dim P, \dim X \rangle = (\dim X)_i \neq 0$ . Osservando che  $\dim \text{Hom}_A(P, X) = \dim \text{Hom}_A(Q, X)$  la mappa di composizione  $\text{Hom}_A(P, Q) \times \text{Hom}_A(Q, X) \rightarrow \text{Hom}_A(P, X)$  non è iniettiva. Esistono  $f \in \text{Hom}_A(P, Q)$  e  $\theta \in \text{Hom}_A(Q, X)$  non nulli tali che  $\theta \circ f = 0$ , questa relazione implica che  $\theta$  passa al quoziente  $\bar{\theta} : \text{Coker } f \rightarrow X$ .  $\square$

Mostro la suriettività: fissato un tubo sia  $X$  un modulo semplice regolare nel tubo. Sia  $p$  il periodo di  $X$  allora  $\sum_{j=0}^{p-1} \dim \tau^j X$  è un vettore  $c$ -invariante quindi multiplo di  $\delta$ . Un elemento  $\tau^j X$  del tubo contenente  $X$  deve avere componente non nulla in  $i$ , a meno di cambiare  $X$  con  $\tau^j X$  suppongo  $(\dim X)_i \neq 0$ . La mappa fornita dal lemma implica che  $X$  e  $\text{Coker } f$  sono nello stesso tubo.  $\square$

## 1.9 Aspetto geometrico

Lo scopo di questa sezione è introdurre i quozienti geometrici (GIT) e due interessanti numeri legati a sottoinsiemi costruibili  $G$ -stabili di una varietà.

Dato uno schema  $V$  e un gruppo algebrico  $G$  che agisce su  $X$ , si vorrebbe definire il quoziente  $X // G$ . Le proprietà che uno vorrebbe sono che parametrizzi le orbite e che fattorizzi ogni morfismo  $G$ -invariante. In generale non esiste un quoziente così fatto, ma in casi particolari esiste ed è unico.

Per una trattazione completa e approfondita della teoria rimando a [Yi]. Fornisco le definizioni di buon quoziente e di quoziente geometrico:

**Definizione 1.60.** Un buon quoziente di  $X$  rispetto l'azione di  $G$  è una mappa  $\varphi : X \rightarrow Y$  tale che:

- $\varphi$  è surgettiva, costante sulle orbite e affine.
- la mappa  $\varphi^\# : \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} (\varphi^* \mathcal{O}_X)^G$  è un isomorfismo.

- ogni chiuso  $W$   $G$ -invariante ha immagine chiusa, inoltre se  $V$  è chiuso,  $G$ -invariante e disgiunto da  $W$  allora le immagini sono disgiunte,  $\varphi(W) \cap \varphi(V) = \emptyset$ .

Lo spazio  $Y$  si denota, se esiste, con  $X // G$ .

Inoltre se la fibra di ogni punto geometrico ha tutti i punti geometrici in una unica orbita allora il quoziente è detto geometrico. In questo caso si denota con  $X/G$ .

Grazie alla teoria degli schemi e alla teoria GIT (Geometric Invariant Theory) si dimostrano le seguenti proposizioni.

**Proposizione 1.61.** *Sia  $G$  un gruppo ridotto che agisce su uno schema affine e noetheriano  $X$ . Allora lo schema affine noetheriano  $\text{Spec } \mathcal{O}(X)^G$  con la mappa indotta da  $\mathcal{O}(X)^G \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$  è un buon quoziente.*

La proposizione fornisce l'esistenza di un quoziente in un caso molto particolare, in compenso fornisce molte buone proprietà. La costruzione generale è più complessa e richiede alcune definizioni.

**Definizione 1.62.** Sia  $X$  uno schema quasi proiettivo con l'azione di un gruppo  $G$ , una linearizzazione è un fibrato in rette molto ampio<sup>4</sup>  $\pi : L \rightarrow X$  con un'azione di  $G$  su  $L$ , lineare sulle fibre e che renda la proiezione  $\pi$  equivariante. In altre parole che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} G \times L & \longrightarrow & L \\ \text{Id}_G \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G \times X & \longrightarrow & X \end{array}$$

commuti.

Facciamo un esempio:

*Esempio 3.* Prendo  $L$  il fibrato banale su  $X$  cioè  $L = X \times \mathbb{A}^1$ . Fissato un carattere  $\chi$  del gruppo si definisce l'azione di  $G$  su  $L$  data da  $g \cdot (x, v) \mapsto (gx, \chi(g)^{-1}v)$ . Sulle fibre è lineare perché è la moltiplicazione per scalare  $L_x \rightarrow L_{gx}$  e il diagramma sopra commuta, quindi la coppia  $(L, \pi)$  è una linearizzazione.

Data una linearizzazione si può definire l'insieme dei punti (semi-)stabili, nel seguente modo.

**Definizione 1.63.** Fissati  $X$ ,  $G$  e  $L$  come sopra si ha:

<sup>4</sup>La definizione generale non richiede l'ampiezza, ma a noi farà comodo in seguito

- Un punto  $x \in X$  si dice semistabile rispetto  $L$  (o  $L$ -semistabile) se esiste una sezione globale  $G$ -invariante non nulla su  $x$ .

$$\exists s \in \Gamma(X, L)^G \text{ tale che } s(x) \neq 0$$

Il sottoinsieme dei punti semistabili lo chiamo  $X^{ss}$ .

- Un punto si dice  $L$ -stabile se è  $L$ -semistabile, l'orbita è chiusa in  $X^{ss}$  e se lo stabilizzatore è finito. L'insieme dei punti stabili lo chiamo  $X^s$ .

I punti non semistabili saranno chiamati instabili. Il seguente teorema garantisce l'esistenza di un quoziente per  $X^{ss}$  e la dimostrazione, che non riporto, usa il risultato precedente sul quoziente di varietà affini.

**Teorema 1.64.** *Siano  $X$ ,  $G$  e  $L$  come sopra e supponiamo che  $X^{ss} \neq \emptyset$  sia non vuoto, allora:*

1. *Esiste un buon quoziente di  $X^{ss}$  rispetto l'azione di  $G$ .*
2. *Esiste un quoziente geometrico  $X^s$  rispetto l'azione di  $G$ , si ha un inclusione  $X^s/G \hookrightarrow X^{ss} // G$  e l'immagine è aperta.*
3. *La mappa  $X^{ss} \rightarrow X^{ss} // G$  è affine.*
4. *Il buon quoziente è dato da  $X^{ss} // G = \text{Proj} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^0(X, L^{\otimes n})^G$  e quindi è proiettivo sulla base  $\text{Spec } H^0(X, \mathcal{O}_X)^G = X // G$ .*

Per controllare la stabilità e la semistabilità di un punto esiste un comodo criterio. Sia  $\theta$  un sottogruppo isomorfo a  $\mathbb{G}_{m,k}$  di  $G$ , preso un punto  $x$  di una varietà suppongo che esista il limite

$$y = \lim_{t \rightarrow 0} \theta(t) \cdot x \tag{1.13}$$

Si ha che  $L_y$  è stabile per l'azione di  $\theta$  ed essendo di dimensione uno deve agire come  $t \mapsto t^r$  per qualche intero  $r = r(\theta, x)$ . Posso enunciare il criterio di Hilbert-Mumford.

**Teorema 1.65** (criterio di Hilbert-Mumford). *Sia  $X$  una varietà,  $G$  un gruppo algebrico che agisce su  $X$  e  $L$  una linearizzazione. Sia  $x \in X$  allora:*

- *il punto  $x \in X^{ss}$  se e solo se per ogni sottogruppo  $\theta$  il limite 1.13 non esiste o se esiste l'intero  $r(\theta, x) \leq 0$ .*
- *il punto  $x \in X^s$  se e solo se per ogni sottogruppo  $\theta$  il limite 1.13 non esiste o se esiste l'intero  $r(\theta, x) < 0$ .*

Voglio ora introdurre il numero di parametri di un insieme rispetto l'azione di un gruppo.

**Definizione 1.66.** Data l'azione di un gruppo  $G$  su un insieme  $X$  e un sottoinsieme costruibile  $U$  si definisce il numero di parametri come:

$$h_G(U) = \max_d \{ \dim(U \cap X_d) + d - \dim G \}$$

dove  $X_d$  è il costruibile formato dai punti che hanno stabilizzatore di dimensione  $d$ . Inoltre si definisce il numero di componenti di dimensione massima come:

$$t_G(U) = \sum_d \# \{ \text{componenti irriducibili di } U \cap X_d \text{ di dimensione } d + h_G(U) \}$$

## 1.10 Radici non isotrope

Una radice immaginaria  $\alpha$  si dice isotropa se  $q(\alpha) = 0$ , altrimenti non isotropa ( $q(\alpha) < 0$ ). In questa sezione studierò le radici non isotrope.

**Proposizione 1.67.** *Data una radice  $\alpha \in F$  non isotropica (cioè  $q(\alpha) < 0$ ), esiste un aperto denso di  $\text{Rep}(\alpha)$   $\text{Gl}(\alpha)$ -invariante formato da rappresentazioni indecomponibili.*

*Dimostrazione.* Siano  $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$  non nulli tali che  $\alpha = \beta + \gamma$ , voglio dimostrare che le rappresentazioni che si spezzano in somma di sue rappresentazioni di dimensione  $\beta$  e  $\gamma$  sono contenute in un chiuso proprio di  $\text{Rep}(\alpha)$ . Dato che queste possibili scritte sono finite allora l'unione delle rappresentazioni decomponibili sono contenute in un chiuso proprio e quindi il complementare è un aperto denso  $U$ . L'aperto cercato è  $\text{Gl}(\alpha)U$ .

Prendo in considerazione la mappa

$$\varphi : \text{Gl}(\alpha) \times \text{Rep}(\beta) \times \text{Rep}(\gamma) \longrightarrow \text{Rep}(\alpha)$$

che manda la tripla  $(g, Y, X)$  nella rappresentazione  $g(Y \oplus X)g^{-1}$ . Ovviamente è suriettiva sulle rappresentazioni che si spezzano nella somma di due della giusta dimensione. Mostro che la chiusura dell'immagine è un sottoinsieme proprio.

$$\dim \overline{\text{Im } \varphi} \leq \dim \text{Gl}(\alpha) - \dim H + \dim \text{Rep}(\beta) + \dim \text{Rep}(\gamma)$$

dove  $H = \text{Gl}(\beta) \times \text{Gl}(\gamma) < \text{Gl}(\alpha)$  è contenuto nella fibra di  $\varphi$ , infatti  $\varphi((g, h), Y, X) \simeq \varphi(\text{Id}, gYg^{-1}, hXh^{-1})$  per ogni rappresentazione  $X$  e  $Y$ . Si ottiene

$$\begin{aligned} \dim \overline{\text{Im } \varphi} &\leq \dim \text{Gl}(\alpha) - \beta^T \beta - \gamma^T \gamma + \dim \text{Rep}(\beta) + \dim \text{Rep}(\gamma) = \\ &= \dim \text{Gl}(\alpha) - q(\beta) - q(\gamma) < \dim \text{Gl}(\alpha) - q(\alpha) = \dim \text{Rep}(\alpha) \end{aligned}$$

Dove ho usato l'ipotesi  $q(\alpha) < q(\beta) + q(\gamma)$ . □

Definisco il cono nilpotente nell'algebra di Lie.

**Definizione 1.68.** Fissati  $Q$  e  $\alpha$  l'algebra di Lie associata a  $\text{Gl}(\alpha)$  è

$$\text{End}(\alpha) = \prod_{i \in Q_0} \text{End}(\alpha_i, k)$$

Il cono nilpotente è l'insieme degli endomorfismi nilpotenti non nulli.

$$N = \{\theta \in \text{End}(\alpha) \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } \theta^n = 0, \theta \neq 0\}$$

Questo spazio ha una naturale stratificazione data dalla forma di Jordan degli endomorfismi. Chiamo un endomorfismo di  $V$  di tipo  $c_V = (c^1, c^2, \dots, c^k)$  se è formato da  $c^j$  blocchi di Jordan di dimensione maggiore o uguale a  $j$ , con  $\dim V = k$ . Un elemento  $\theta \in N$  è di tipo  $c = (c_1, \dots, c_n)$  se ogni  $\theta_i$  è di tipo  $c_i = (c_i^1, \dots, c_i^{k_i})$ , il sottoinsieme degli endomorfismi di tipo  $c$  lo chiamo  $N_c$ .

In  $\text{Rep}(\alpha) \times N$  c'è una relazione di incidenza data da  $I = \{(x, \theta) \in \text{Rep}(\alpha) \times N \mid \theta \in \text{End}(x)\}$ . Osservare che nel caso in cui  $x$  sia indecomponibile gli endomorfismi sono tutti e soli della forma  $\lambda \text{Id} + \theta$  con  $\theta \in N$  e  $x\theta = \theta x$ . Questo perché  $\text{End}(x)$  è un anello locale, con massimale gli endomorfismi nilpotenti. È interessante studiare le proiezioni  $\pi_1 : \text{Rep}(\alpha) \times N \rightarrow \text{Rep}(\alpha)$  e  $\pi_2 : \text{Rep}(\alpha) \times N \rightarrow N$  assieme alle loro fibre. Lo studio lo faremo strato per strato, per  $\theta \in N$  definisco  $I_\theta = \pi_2^{-1}(\theta) \cap I$  e per  $x \in \text{Rep}(\alpha)$  l'analogo è  $\text{End}(x) \cap N = \pi_1^{-1}(x) \cap I$ .

**Lemma 1.69.** Lo strato  $N_c$  ha dimensione  $\alpha^T \alpha - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} (c_i^j)^2$  e per  $\theta \in N_c$  la dimensione di  $I_\theta$ , se non vuoto, è:

$$\dim I_\theta = \sum_{\gamma \in Q_1} \sum_{j=1}^{\min(k_{t(\gamma)}, k_{h(\gamma)})} c_{t(\gamma)}^j c_{h(\gamma)}^j$$

*Dimostrazione.* È nota la dimensione degli endomorfismi tra due blocchi di Jordan, siano  $J_n$  e  $J_m$  due blocchi di Jordan in  $V = k^n$  e  $W = k^m$  allora:

$$\dim \{f \in \text{Hom}(V, W) \mid J_m f = f J_n\} = \min(n, m) = \sum_{j=1}^{\min(n, m)} 1$$

Da qui è facile il calcolo per gli omomorfismi tra due elementi  $\theta'$  e  $\theta''$  di tipo  $c_V = (c_V^1, \dots, c_V^n)$  e  $d_W = (d_W^1, \dots, d_W^m)$ :

$$\dim \{f \in \text{Hom}(V, W) \mid \theta'' f = f \theta'\} = \sum_{j=1}^{\min(n, m)} c_V^j d_W^j$$

Per  $\theta' = \theta_{t(\gamma)}$  e  $\theta'' = \theta_{h(\gamma)}$  e sommando su  $\gamma \in Q_1$  si ottiene la formula voluta.

Per calcolare la dimensione di  $N_c$  uso il fatto che tutti gli elementi sono coniugati tramite  $\text{Gl}(\alpha)$  e ne fisso uno che chiamo  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \dim N_c &= \dim \text{Gl}(\alpha) - \dim\{g \in \text{Gl}(\alpha) \mid \theta g = g\theta\} \\ &= \alpha^T \alpha - \dim\{g \in \text{End}(\alpha) \mid \theta g = g\theta\} \\ &= \alpha^T \alpha - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} (c_i^j)^2 \end{aligned}$$

□

**Corollario 1.70.** *La dimensione di  $I$  è minore di  $\alpha^T \alpha - q(\alpha)$ .*

*Dimostrazione.* L'insieme  $I$  è unione dei  $\pi_2^{-1}(N_c)$  al variare delle partizioni  $c$  (in numero finito). La dimensione di  $\pi_2^{-1}(N_c) \cap I$  è:

$$\dim \pi_2^{-1}(N_c) \cap I \leq \dim N_c + \dim I_\theta = \alpha^T \alpha - \sum_j q(c^j)$$

Dove  $\theta$  è un qualsiasi elemento in  $N_c$ , la disuguaglianza  $\sum_j q(c^j) > q(\alpha)$  fornisce la tesi. L'uguaglianza si avrebbe solo per  $c = (\alpha, 0, \dots, 0)$  ma l'unico endomorfismo di tipo  $(\alpha)$  è quello nullo. □

Chiamando  $c^j = (c_1^j, c_2^j, \dots, c_n^j) \in \mathbb{N}^n$  eventualmente completando con zeri quando  $c_i^j$  non è definito si ha  $\alpha = \sum_{j=1}^{\max \alpha_i} c^j$ .

**Teorema 1.71.** *Sia  $\alpha$  radice immaginaria non isotropa, allora esiste un aperto denso di  $\text{Rep}(\alpha)$  formato da brick (quindi indecomponibili) contenente tutte le orbite di dimensione massima. Inoltre il numero di parametri è:*

$$h(\text{Ind}(\alpha)) = 1 - q(\alpha) \quad t(\text{Ind}(\alpha)) = 1$$

*Dimostrazione.* Per la proposizione 1.67 esiste un aperto denso di indecomponibili. Mostro che esiste un aperto denso formato da brick. Chiamo  $\text{Ind}(\alpha)_d$  il sottoinsieme localmente chiuso degli indecomponibili stabilizzatore  $d$ -dimensionale. Sia  $I_d = \pi_1^{-1}(\text{Ind}(\alpha)_d) \subseteq I$  esso è caratterizzato da:

$$I_d = \{(x, \theta) \mid x \text{ è indecomponibile, } \theta x = x\theta, \dim_k \text{End}(x) = d\}$$

Per  $x \in \text{Ind}(\alpha)_d$  la dimensione di  $\pi_1^{-1}(x)$  è  $\dim \text{End}(x) \cap N = d - 1$  (se  $\pi_1^{-1}(x)$  è non vuoto) e  $\dim I_d \leq \dim I < \alpha^T \alpha - q(\alpha)$ . Mettendo assieme i due calcoli si ottiene che  $\dim \text{Ind}(\alpha)_d = \dim I_d - \dim \pi_1^{-1}(x) < d - \alpha^T \alpha + 1 - q(\alpha)$  per ogni  $d > 1$ . Si ottiene che per  $d > 1$  il numero di parametri  $h(\text{Ind}(\alpha)_d) < 1 - q(\alpha)$  e  $\text{Ind}(\alpha)_d$  è di dimensione strettamente inferiore a quella di  $\text{Rep}(\alpha)$  e quindi esiste un aperto denso formato da brick. Questo aperto è irriducibile e ha dimensione pari a  $\dim \text{Rep}(\alpha) = \alpha^T \alpha - q(\alpha)$  perciò  $h(\text{Ind}(\alpha)_1) = \dim \text{Rep}(\alpha) + 1 - \alpha^T \alpha = 1 - q(\alpha)$ . Ovviamente si ha  $t(\text{Ind}(\alpha)) = t(\text{Ind}(\alpha)_1) = 1$ . □

## 1.11 Il teorema di Kac

Il teorema di Kac fornisce proprietà di  $\text{Ind}(\alpha)$  per una qualsiasi radice.

**Teorema 1.72** (di Kac). *Sia  $(Q, \Omega)$  un quiver e  $\alpha \in \mathbb{Z}^n$  allora*

$$\text{Ind}(Q, \Omega, \alpha) \neq \emptyset \iff \alpha \in \Phi^+$$

*In questo caso si ha  $h(\text{Ind}(Q, \Omega, \alpha)) = 1 - q(\alpha)$  e che  $t(\text{Ind}(Q, \Omega, \alpha)) = 1$ .*

La dimostrazione del teorema segue ovviamente dai seguenti due lemmi.

**Lemma 1.73.** *Per  $\alpha \in F$  allora vale il teorema di Kac 1.72.*

*Dimostrazione.* Se  $\alpha$  è isotropa allora il suo supporto è euclideo ed è un multiplo di  $\delta$ , ogni rappresentazione indecomponibile di dimensione  $m\delta$  è regolare quindi appartiene a un tubo. Ogni tubo di periodo uno contiene unica rappresentazione di dimensione  $m\delta$  e solo finiti tubi hanno periodo maggiore di uno. Per il teorema 1.58 i tubi sono parametrizzati da  $\mathbb{P}^1$  e dividendo  $\text{Ind}(Q, m\delta)$  nei costruibili con periodo uguale a uno e diverso da uno si ha che il numero di parametri del primo è uno e del secondo è zero. Si ha  $h(\text{Ind}(Q, m\delta)) = 1$  e  $t(\text{Ind}(Q, m\delta)) = 0$ .

Altrimenti la radice è non isotropa e per il teorema 1.71 della sezione relativa segue la tesi.  $\square$

**Lemma 1.74.** *Sia  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  e  $s_i$  la riflessione rispetto la radice semplice  $\epsilon_i$  allora si ha:*

$$\begin{aligned} h(\text{Ind}(Q, \Omega, \alpha)) &= h(\text{Ind}(Q, s_i\Omega, s_i\alpha)) \\ t(\text{Ind}(Q, \Omega, \alpha)) &= t(\text{Ind}(Q, s_i\Omega, s_i\alpha)) \end{aligned}$$

La dimostrazione del lemma è piuttosto complessa e sfrutta strumenti non introdotti, come teoria di Galois, campi finiti e conteggio dei punti razionali di uno schema su  $\mathbb{F}_{p^k}$  per calcolarne la sua dimensione. La dimostrazione si trova in [Kac83].

Dal teorema di Kac segue questo utilissimo corollario:

**Corollario 1.75.** *Il numero di rappresentazioni indecomponibili di dimensione  $\alpha$  (e  $t(\text{Ind}(Q, \Omega, \alpha))$ ) non dipende dall'orientazione del quiver.*

## Capitolo 2

# Varietà Quiver

In questo capitolo introduco le varietà quiver ed esporrò alcune proprietà. Il risultato principale è che le varietà quiver sono normali.

## 2.1 Prime definizioni

Dato un quiver  $(Q, \Omega)$  si può costruire un altro quiver chiamato  $\bar{Q}$  con gli stessi vertici e il doppio delle frecce. Le frecce sono tutte quelle originali  $\gamma \in Q_1$  e vengono aggiunte le frecce orientate in modo opposto  $\gamma^*$ .

$$\bar{Q}_1 = Q_1 \sqcup Q_1^{op}$$

Il quiver  $\bar{Q}$  non dipende dall'orientazione  $\Omega$  del quiver  $Q$ . La varietà  $\text{Rep}(\bar{Q}, \alpha)$  è canonicamente isomorfo al fibrato cotangente  $T^* \text{Rep}(Q, \alpha)$ . Per notazione se chiamo  $\gamma$  gli archi in  $Q_1$ , allora  $\gamma^*$  è il corrispondente arco in  $Q_1^{op}$  e  $(\gamma^*)^* = \gamma$ .

Il gruppo  $\text{Gl}(\alpha)$  agisce per coniugio sia su  $\text{Rep}(\bar{Q}, \alpha)$  sia su  $\text{Rep}(Q, \alpha)$ . In entrambe le azioni il sottogruppo  $k^* \text{Id}$  agisce banalmente, quindi il quoziente

$$G(\alpha) = \text{Gl}(\alpha) / k^* \text{Id}$$

agisce su  $\text{Rep}(\bar{Q}, \alpha)$ . Altro oggetto interessante è l'algebra di Lie  $\text{End}(\alpha) \stackrel{def}{=} \bigoplus_i \mathfrak{gl}(\alpha_i, k)$  e la sua sottoalgebra:

$$\text{End}_0(\alpha) \stackrel{def}{=} \left\{ \theta \in \text{End}(\alpha) \mid \sum_i \text{Tr} \theta_i = 0 \right\}$$

Quest'ultima algebra è il duale dell'algebra di Lie associata a  $G(\alpha)$ , essa è dotata di una naturale azione del gruppo  $G(\alpha)$  per coniugio.

Definisco ora la mappa momento

**Definizione 2.1.** Sia  $Q$  un quiver e  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , si definisce la mappa momento come

$$\begin{aligned} \mu_\alpha: \quad \text{Rep}(\bar{Q}, \alpha) &\longrightarrow \text{End}_0(\alpha) \\ x &\longmapsto \mu_\alpha(x) \end{aligned}$$

dove  $(\mu_\alpha(x))_i = \sum_{\substack{\gamma \in Q_1 \\ h(\gamma)=i}} x_\gamma x_{\gamma^*} - \sum_{\substack{\gamma \in Q_1 \\ t(\gamma)=i}} x_{\gamma^*} x_\gamma$ .

La mappa descritta è ben definita perché  $\text{Tr}(\mu_\alpha(x)) = 0$  ed è proprio la mappa momento per l'azione di  $G(\alpha)$  su  $T^* \text{Rep}(Q, \alpha)$ . La mappa momento dipende dall'orientazione del quiver  $Q$ , inoltre è equivariante per l'azione di  $G(\alpha)$ .

Fa comodo introdurre l'operatore  $\epsilon : \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) \rightarrow \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$  definito da:

$$(\epsilon x)_\gamma = x_\gamma \quad (\epsilon x)_{\gamma^*} = -x_{\gamma^*} \quad \forall \gamma \in Q_1$$

e la notazione di prodotto  $xy \in \text{End}(\alpha)$  definita da:

$$(xy)_i = \sum_{\substack{\gamma \in \overline{Q}_1 \\ h(\gamma)=i}} x_\gamma y_{\gamma^*}$$

La motivazione di queste notazioni è data da  $\mu_\alpha(x) = (\epsilon x)x$  e da un semplice conto sul differenziale  $d\mu_x$  della mappa momento. Il coefficiente di  $t \in k$  in  $\mu_\alpha(x + ty)$  è proprio  $\epsilon xy + \epsilon yx$  da cui la formula  $d\mu_x(y) = \epsilon xy + \epsilon yx$ .

Infine il fibrato cotangente è dotato di una forma simplettica in modo naturale, essa è la 1-forma tautologia definita da:

$$\omega(x, y) = \sum_i \text{Tr}((\epsilon xy)_i) = \sum_{\gamma \in Q_1} \text{Tr}(x_\gamma y_{\gamma^*}) - \text{Tr}(x_{\gamma^*} y_\gamma)$$

Il fatto che sia simplettica segue in modo ovvio da  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$  e osservo che è  $G(\alpha)$ -invariante, cioè per ogni  $g \in G(\alpha)$  si ha:

$$\omega(x, y) = \omega(g \cdot x, g \cdot y)$$

dove  $g \cdot x$  è l'azione di coniugio precedente definita da  $(g \cdot x)_\gamma = g_{h(\gamma)} x_\gamma g_{t(\gamma)}^{-1}$ .

Lo spazio  $\text{End}_0(\alpha)$  è dotato di una forma simmetrica  $\eta(\theta, \zeta) = \sum_i \text{Tr}(\theta_i \zeta_i)$ . Queste forme non degeneri ci permetteranno di identificare gli spazi  $\text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$  e  $\text{End}_0(\alpha)$  con i loro duali.

Si può definire il seguente bracket: dati  $x \in \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$  e  $\theta \in \text{End}(\alpha)$  ha senso il prodotto  $\theta x = \sum_\gamma \theta_{h(\gamma)} x_\gamma \in \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$  e  $x\theta = \sum_\gamma x_\gamma \theta_{t(\gamma)} \in \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$ . L'elemento  $[\theta, x] \in \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$  definito da  $\theta x - x\theta$  e coincide con:

$$[\theta, x]_\gamma = \theta_{h(\gamma)} x_\gamma - x_\gamma \theta_{t(\gamma)} \quad \forall \gamma \in \overline{Q}_1$$

Un facile conto mostra che vale la formula  $\omega(x\theta, y) = \omega(x, \theta y)$ .

**Proposizione 2.2.** *Vale la seguente formula*

$$\eta(\theta, d\mu_{\alpha, x}(y)) = \omega([\theta, x], y) \quad (2.1)$$

*Dimostrazione.* Fissati  $x, y \in \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$  e  $\theta \in \text{End}(\alpha)$  si ha:

$$\begin{aligned}
& \eta(\theta, d\mu_{\alpha, x}(y)) = \eta(\theta, \varepsilon xy + \varepsilon yx) = \\
& = \sum_i \sum_{\substack{\gamma \in Q_1 \\ h(\gamma)=i}} \text{Tr}(\theta_i x_\gamma y_{\gamma^*}) + \text{Tr}(\theta_i y_\gamma x_{\gamma^*}) - \sum_{\substack{\gamma \in Q_1 \\ t(\gamma)=i}} \text{Tr}(\theta_i x_{\gamma^*} y_\gamma) + \text{Tr}(\theta_i y_{\gamma^*} x_\gamma) \\
& = \sum_{\gamma \in Q_1} \text{Tr}(\theta_{h(\gamma)} x_\gamma y_{\gamma^*}) + \text{Tr}(\theta_{h(\gamma)} y_\gamma x_{\gamma^*}) - \text{Tr}(\theta_{t(\gamma)} x_{\gamma^*} y_\gamma) - \text{Tr}(\theta_{t(\gamma)} y_{\gamma^*} x_\gamma) \\
& = \sum_{\gamma \in Q_1} \text{Tr}(\theta_{h(\gamma)} x_\gamma y_{\gamma^*}) + \text{Tr}(x_{\gamma^*} \theta_{h(\gamma)} y_\gamma) - \text{Tr}(\theta_{t(\gamma)} x_{\gamma^*} y_\gamma) - \text{Tr}(x_\gamma \theta_{t(\gamma)} y_{\gamma^*}) \\
& = \sum_{\gamma \in Q_1} \text{Tr}(\theta_{h(\gamma)} x_\gamma y_{\gamma^*}) + \text{Tr}(x_{\gamma^*} \theta_{t(\gamma^*)} y_\gamma) - \text{Tr}(\theta_{h(\gamma^*)} x_{\gamma^*} y_\gamma) - \text{Tr}(x_\gamma \theta_{t(\gamma)} y_{\gamma^*}) \\
& = \sum_{\gamma \in Q_1} \text{Tr}([\theta, x]_\gamma y_{\gamma^*}) - \text{Tr}([\theta, x]_{\gamma^*} y_\gamma) \\
& = \omega([\theta, x], y)
\end{aligned}$$

□

**Corollario 2.3.** *Si ha la relazione*

$$\eta(\theta, \mu_\alpha(x)) = \omega(\theta x, x)$$

*Dimostrazione.* Si usano il teorema precedente e la relazione  $d\mu_{\alpha, x}(x) = 2\mu_\alpha(x)$ , si ha

$$\begin{aligned}
2\eta(\theta, \mu_\alpha(x)) &= \eta(\theta, d\mu_{\alpha, x}(x)) = \omega([\theta, x], x) = \omega(\theta x, x) - \omega(x\theta, x) = \\
&= \omega(\theta x, x) - \omega(x, \theta x) = 2\omega(\theta x, x)
\end{aligned}$$

□

Le uniche fibre della mappa momento  $G(\alpha)$ -invarianti sono esattamente le fibre dei punti  $\lambda \in \text{End}_0(\alpha)$  fissati da  $G(\alpha)$ . Il sottospazio fissato è contenuto in:

$$\text{End}(\alpha)^{G(\alpha)} = \prod_i M(\alpha_i, k)^{\text{Gl}(\alpha_i)} = \prod_i \lambda_i \text{Id}$$

dove  $\lambda_i \in k$  sono scalari. Definendo  $\lambda \cdot \alpha = \sum_i \lambda_i \alpha_i = \text{Tr} \lambda_i \text{Id}$ , il fissato è  $\text{End}_0(\alpha)^{G(\alpha)} = \{\prod_i \lambda_i \text{Id} \mid \lambda \cdot \alpha = 0\}$ . D'ora in poi  $\lambda$  sarà un elemento fissato da  $G(\alpha)$ .

Possiamo ora definire la varietà quiver di Nakajima.

**Definizione 2.4.** Fissato un quiver  $(Q, \omega)$ , un vettore di interi  $\alpha$ , un elemento  $\lambda \in \text{End}_0(\alpha)^{G(\alpha)}$  e un carattere  $\chi$  di  $G(\alpha)$  definisco:

$$\mathfrak{M}_\chi(\overline{Q}, \alpha, \lambda) = \mu_\alpha^{-1}(\lambda)^{ss} //_\chi G(\alpha)$$

Dove il carattere  $\chi$  definisce una linearizzazione come nell'esempio 3 e l'esistenza del quoziente è (quasi sempre) garantita dal teorema 1.64.

Quando non c'è ambiguità il quoziente verrà denotato con  $\mathfrak{M}_X(\lambda)$ .

Si ha un'importante proposizione:

**Proposizione 2.5.** *Sia  $x \in \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$  una rappresentazione, allora sono fatti equivalenti:*

1. *Lo stabilizzatore di  $x$  ( $G_x(\alpha)$ ) è finito.*
2. *L'algebra di Lie  $\text{Lie } G_x(\alpha) = 0$  è nulla.*
3. *Il differenziale  $d\mu$  è suriettivo in  $x$*

*Se vale una delle proprietà sopra allora  $\mu_\alpha^{-1}(\lambda)$  ha dimensione:*

$$\alpha^T \alpha - 2q(\alpha) + 1$$

*Dimostrazione.* La doppia implicazione fra i primi due punti è nota. L'equivalenza tra gli ultimi due punti discende dalla formula 2.1  $\eta(\theta, d\mu_x(y)) = \omega([\theta, x], y)$ .  $\theta$  è ortogonale all'immagine del differenziale se e solo se  $[\theta, x] = 0$ , al variare di  $\theta$  si ottiene la tesi.

Per calcolare la dimensione della fibra, si ha  $\dim \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) = 2q(\alpha)$  e  $\dim \text{End}_0(\alpha) = \alpha^T \alpha - 1$  la differenza è la dimensione della fibra perché il differenziale è suriettivo.  $\square$

Ricordo che  $A$  è la  $k$ -algebra dei cammini sul quiver  $Q$ .

**Proposizione 2.6.** *Fissato  $x \in \text{Rep}(Q, \alpha)$  si ha una naturale successione esatta di  $A$ -moduli:*

$$0 \rightarrow D \text{Ext}_A^1(x, x) \rightarrow \text{Rep}(Q^{op}, \alpha) \xrightarrow{c} \text{End}(\alpha) \xrightarrow{t} D \text{End}_A(x) \rightarrow 0$$

*Dove  $c$  è la mappa  $y \mapsto \sum_{\gamma \in Q} x_\gamma y_{\gamma^*} - y_{\gamma^*} x_\gamma$  e  $t$  manda  $\theta \in \text{End}(\alpha)$  in  $\eta(\theta, \cdot)$ .*

*Dimostrazione.* Data la successione 1.8 si applica il funtore  $\text{Hom}(\cdot, x)$  e si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{End}_A(x) \rightarrow \bigoplus_i \text{Hom}_A(Ae_i \otimes_k e_i X, X) \rightarrow \\ \rightarrow \bigoplus_\gamma \text{Hom}_A(Ae_{h(\gamma)} \otimes_k e_{t(\gamma)} X, X) \rightarrow \text{Ext}_A^1(x) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Usando la formula di aggiunzione e il fatto che  $\text{Hom}_A(Ae_i, X) \simeq e_i X$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{End}_A(x) \rightarrow \bigoplus_i \text{Hom}_k(e_i X, e_i X) \rightarrow \\ \rightarrow \bigoplus_\gamma \text{Hom}_k(e_{t(\gamma)} X, e_{h(\gamma)} X) \rightarrow \text{Ext}_A^1(x) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Osservo che  $\bigoplus_i \text{Hom}_k(e_i X, e_i X)$  è isomorfo a  $\text{End}(\alpha)$  come  $k$ -spazio vettoriale e analogamente  $\bigoplus_\gamma \text{Hom}_k(e_{t(\gamma)} X, e_{h(\gamma)} X)$  è isomorfo a  $\text{Rep}(Q, \alpha)$ . L'omomorfismo centrale manda  $\theta$  in  $[\theta, x]$ . Applico ora il funtore  $D \cdot$  e ottengo la successione:

$$0 \rightarrow D \text{Ext}_A^1(x, x) \rightarrow D \text{Rep}(Q, \alpha) \rightarrow D \text{End}(\alpha) \rightarrow D \text{End}_A(x) \rightarrow 0$$

Sia  $Q$  sia  $Q^{op}$  si possono pensare come sottografi di  $\bar{Q}$ , quindi si può pensare  $\text{Rep}(Q, \alpha) \subset \text{Rep}(\bar{Q}, \alpha)$  estendendo ogni rappresentazione con le mappe nulle, idem con  $Q^{op}$ . Ha quindi senso la scrittura  $xy$  con  $x \in \text{Rep}(Q, \alpha)$  e  $y \in \text{Rep}(Q^{op}, \alpha)$ , inoltre vale  $\epsilon x = x$  e  $\epsilon y = -y$ . Si ha un naturale accoppiamento  $\text{Rep}(Q, \alpha) \times \text{Rep}(Q^{op}, \alpha) \rightarrow k$  dato da  $(x, y) \mapsto \eta(xy, \text{Id})$ . Ciò permette di identificare  $D \text{Rep}(Q, \alpha)$  con  $\text{Rep}(Q^{op}, \alpha)$  e analogamente si identificano  $D \text{End}(\alpha)$  e  $\text{End}(\alpha)$  tramite  $\eta$ .

$$0 \rightarrow D \text{Ext}_A^1(x, x) \rightarrow \text{Rep}(Q^{op}, \alpha) \xrightarrow{c} \text{End}(\alpha) \rightarrow D \text{End}_A(x) \rightarrow 0$$

Dove la mappa  $c$  è ottenuta dalla composizione:

$$\text{Rep}(Q^{op}, \alpha) \rightarrow D \text{Rep}(Q, \alpha) \rightarrow D \text{End}(\alpha) \rightarrow \text{End}(\alpha)$$

che manda  $y$  prima in  $\eta(\cdot y, \text{Id})$  e poi in  $\eta([\cdot, x]y, \text{Id})$ . Questa ultima funzione calcolata in  $\theta \in \eta([\theta, x]y, \text{Id}) = \eta(\theta, xy - yx)$ , quindi  $c(y) = xy - yx = d\mu_x(y)$ .  $\square$

Si può pensare lo spazio affine  $\text{Rep}(\bar{Q}, \alpha)$  come il prodotto  $\text{Rep}(Q, \alpha) \times \text{Rep}(Q^{op}, \alpha)$ , chiamo  $\pi$  la proiezione sul primo fattore. Un fatto interessante è calcolare l'intersezione  $\pi^{-1}(x) \cap \mu_\alpha^{-1}(\lambda)$ .

**Teorema 2.7.** *Lo schema  $\pi^{-1}(x) \cap \mu_\alpha^{-1}(\lambda)$  è non vuoto se e solo se ogni addendo diretto  $x'$  di  $x$  soddisfa la condizione  $\lambda \cdot \dim x' = 0$ . Inoltre se soddisfa la condizione,  $\pi^{-1}(x) \cap \mu_\alpha^{-1}(\lambda)$  è isomorfo a  $D \text{Ext}_A^1(x, x)$ .*

*Dimostrazione.* Fissato un elemento  $x \in \text{Rep}(Q, \alpha)$ , considero le coppie  $(x, y) \in \text{Rep}(Q, \alpha) \times \text{Rep}(Q^{op}, \alpha)$ . La condizione  $\mu_\alpha((x, y)) = \lambda$  equivale a  $c(y) = \lambda$  e per la successione esatta della proposizione 2.6 si ha  $\lambda \in \text{Im } c = \text{Ker } t$ . Se esiste almeno un sollevamento  $(x, y)$  allora  $\eta(\lambda, \theta) = 0$  per ogni  $\theta \in \text{End}_A(x)$ . Sia  $\theta \in \text{End}_A(x)$  la proiezione su  $x'$ , si ha  $\eta(\lambda, \theta) = \sum_i \lambda_i \text{Tr}(\theta_i) = \sum_i \lambda_i \dim(x')_i = \lambda \cdot \dim x'$

Per il viceversa basta verificare che il teorema valga per i moduli indecomponibili. Sia  $x$  indecomponibile, ogni endomorfismo di  $x$  è somma di uno nilpotente e uno semisemplice. Se  $\theta \in \text{End}_A(x)$  è nilpotente allora  $\eta(\lambda, \theta) = \sum_i \lambda_i \text{Tr}(\theta_i) = 0$ . Se  $\theta' \in \text{End}_A(x)$  è semisemplice allora è un multiplo dell'identità perché  $x$  è indecomponibile. In conclusione si ottiene  $\theta' = a \text{Id}$  e dato che  $\eta(\lambda, \theta') = a\lambda \cdot \dim x = 0$  si ottiene che  $\lambda \in \text{Ker } t$ . Esiste  $y \in \text{Rep}(Q^{op}, \alpha)$  tale che la rappresentazione con mappe  $x_\gamma$  per  $\gamma \in Q$  e  $y_\gamma$  per  $\gamma \in Q^{op}$  è in  $\mu_\alpha^{-1}(\lambda)$ .

Per l'ultima parte si ha  $\pi^{-1}(x) \cap \mu_\alpha^{-1}(\lambda) = \{x\} \times c^{-1}(\lambda) \simeq D \text{Ext}_A^1(x, x)$   $\square$

## 2.2 Sui punti stabili

Lo scopo di questa sezione è esplicitare un criterio pratico per caratterizzare i punti stabili e semistabili. Per far ciò useremo i fatti della sezione sui quozienti geometrici e in particolare il criterio di Hilbert-Mumford 1.65.

Fissiamo meglio la notazione, per tutto la sezione fissiamo un quiver  $(Q, \Omega)$  e un vettore di naturali  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Fissati spazi vettoriali  $V_i$  di dimensione  $\alpha_i$ , ogni elemento dello spazio  $\text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$  è il dato di applicazioni lineari  $x_\gamma : V_{t(\gamma)} \rightarrow V_{h(\gamma)}$  e  $x_{\gamma^*} : V_{h(\gamma)} \rightarrow V_{t(\gamma)}$ . La fibra in  $\lambda$  è  $\mu_\alpha^{-1}(\lambda) = \{x \mid \epsilon x x = \lambda\}$ . Prendiamo in considerazione solo i caratteri di  $G(\alpha)$  della forma  $\chi(g) = \prod_{i \in I} (\det g_i)^{\chi_i}$  con  $\chi_i$  interi. Per essere ben definiti si deve avere che  $\chi(t \text{Id}) = 0$  cioè che  $\chi \cdot \alpha = \sum_i \chi_i \alpha_i = 0$ .

Un fatto fondamentale è la corrispondenza tra alcuni sottogruppi a un parametro di  $G(\alpha)$  e filtrazioni di  $V$  stabili per  $x$ . Fornisco ora un enunciato più preciso:

**Proposizione 2.8.** *Fisso una rappresentazione  $x \in \mu_\alpha^{-1}(\lambda)$ .*

*Per ogni sottogruppo a un parametro  $\theta : \mathbb{G}_{m,k} \rightarrow G$  tale che esista il limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t)x$  si associa in modo canonico una filtrazione di  $V$  di spazi vettoriali  $x$ -invarianti.*

*Viceversa ogni filtrazione come sopra è indotta da un sottogruppo a un parametro.*

Più importante del enunciato sopra è la costruzione che si usa nella dimostrazione seguente.

*Dimostrazione.* Fisso un sottogruppo  $\theta$ , poiché le matrici  $\{\theta(t)_i\}_t$  commutano esiste una decomposizione di ogni  $V_i$  in autospazi generalizzati.

$$V_i = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_i^n$$

dove i  $V_i^n$  sono i sottospazi generalizzati di  $\theta(t)_i$  relativi all'autovalore  $t^n$ . Essi non dipendono da  $t$ . Poiché esiste il limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t)x$  si deve avere che  $x_\gamma V_{t(\gamma)}^m$  è contenuto in  $\bigoplus_{n \geq m} V_{h(\gamma)}^n$ , infatti fissato  $\gamma \in \overline{Q}_1$  e  $v \in V_{t(\gamma)}^m$ :

$$\begin{aligned} \left( \lim_{t \rightarrow 0} \theta(t)x_\gamma \right) v &= \lim_{t \rightarrow 0} \theta(t)_{h(\gamma)} x_\gamma \theta(t)_{t(\gamma)}^{-1} v \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{-m} \theta(t)_{h(\gamma)} x_\gamma v \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{-m} \theta(t)_{h(\gamma)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lim_{t \rightarrow 0} t^{n-m} w_n \end{aligned}$$

Il limite esiste quindi  $w_n = 0$  per tutti gli  $n < m$  (le somme indicizzate su  $\mathbb{Z}$  sono somme finite). Definendo  $V_i^{\geq m} = \bigoplus_{n \geq m} V_i^n$  si ha che i sottospazi

$\{V_i^{\geq m}\}_i$  sono  $x$  stabili e quindi sottorappresentazioni. Essi sono nulli per  $m \gg 0$  e coincidono con  $V$  per  $m \ll 0$ , si ha quindi la filtrazione:

$$\dots \subseteq V^{\geq m+1} \subseteq V^{\geq m} \subseteq V^{\geq m-1} \subseteq \dots$$

e prendendo solo i termini irridondanti si ottiene la filtrazione finita:

$$0 = V^0 \subsetneq V^1 \subsetneq \dots \subsetneq V^{N-1} \subsetneq V^N = V \quad (2.2)$$

Viceversa fissata una filtrazione come sopra per ogni  $j \leq N$  e per ogni  $i \in Q_0$  posso prendere  $\dim V_i^j / V_i^{j-1}$  vettori in  $V_i^j \subset V_i$  tali che siano base di  $V_i^j / V_i^{j-1}$ . Chiamo  $W_i^j$  il sottospazio generato da questa base e  $W^j$  la collezione al variare di  $i \in Q_0$ , in altri termini ho scelto un sollevamento di  $V^j / V^{j-1}$  in  $V$ .

Definisco il sottogruppo  $\theta(t)$  di  $G(\alpha)$  come  $\theta(t)|_{W^j} = t^j \text{Id}$ . È ovvio che la filtrazione indotta da  $\theta(t)$  è quella di partenza.  $\square$

Possiamo ora analizzare la condizione di (semi-)stabilità.

**Teorema 2.9.** *Il punto  $x \in \mu_\alpha^{-1}(\lambda)$  è  $\chi$  semistabile se e solo se non ha sottorappresentazioni  $W \subset V$  con  $\chi \cdot \dim W = \sum_i \chi_i \dim W_i > 0$ .*

*Il punto  $x \in \mu_\alpha^{-1}(\lambda)$  è  $\chi$  stabile se e solo se non ha sottorappresentazioni  $W \subset V$  non banali con  $\chi \cdot \dim W \geq 0$ .*

*Dimostrazione.* Usando il teorema di Hilbert-Mumford 1.65, riconduco la condizione di (semi-)stabilità al fatto che per ogni sottogruppo  $\theta$  tale che esista il limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t)x$  allora  $r(\theta, x)$  è non negativo (risp. positivo).

Se esiste il limite sopra allora fissato un punto  $(x, v)$  di  $L_x$  si ha:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t)(x, v) = \left( \lim_{t \rightarrow 0} \theta(t)x, \lim_{t \rightarrow 0} \chi(\theta(t))^{-1}v \right)$$

Per calcolare  $r$  basta determinare il carattere di  $\mathbb{G}_{m,k}$  della rappresentazione  $\chi \circ \theta$ , sia  $\{V^{\geq n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  la filtrazione associata a  $\theta$ :

$$\begin{aligned} r &= - \sum_i \chi_i \log_t \det(\theta_i(t)) = - \sum_i \chi_i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \log_t \det(\theta_i(t)|_{V_i^n}) \\ &= - \sum_i \chi_i \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \dim V_i^n = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \sum_i \chi_i \left( \dim V_i^{\geq n} - \dim V_i^{\geq n+1} \right) \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \chi \cdot \dim V^{\geq n} - \chi \cdot \dim V^{\geq n+1} \\ &= - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi \cdot \dim V^{\geq n} \end{aligned}$$

Dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che gli addendi sono definitivamente nulli dato che  $\chi \cdot \dim V = \chi \cdot \alpha = 0$  per il fatto di essere nullo su  $k \text{Id}$ .

Per concludere la dimostrazione basta usare il fatto dimostrato nella proposizione precedente che la filtrazione  $0 \subsetneq W \subsetneq V$  è indotta da un opportuno sottogruppo  $\theta_W$ . Quindi  $r(\theta_W, x) = -\chi \cdot \dim W$ . Inoltre per ogni  $\theta \neq 0$  la filtrazione ottenuta è propria (ha almeno un elemento non banale), se la somma  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi \cdot \dim V^{\geq n}$  è positiva (non negativa) allora un suo termine è positivo (non negativo)  $\chi \cdot \dim W > 0$ .  $\square$

Voglio definire una filtrazione particolare, usualmente chiamata di Jordan-Hölder. Fissato un elemento  $x \in \text{Rep}(\overline{G}, \alpha)$  che sia  $\chi$ -semistabile posso prendere una filtrazione di  $V$   $x$ -stabile, esse sono sottorappresentazioni di  $x$ .

$$0 = V^0 \subsetneq V^1 \subsetneq \dots \subsetneq V^{N-1} \subsetneq V^N = V$$

Richiedo che  $V^i$  siano  $\chi$ -semistabili, condizione necessaria e sufficiente per  $\chi$  di essere un carattere di  $G(\dim V^i)$  è che  $\chi \cdot \dim V^i = 0$ . Se  $\chi$  è un carattere di  $G(\dim V^i)$  allora per il teorema 2.9  $V^i$  è semistabile. Una filtrazione i cui termini siano semistabili (equivalentemente  $\chi \cdot \dim V^i = 0$ ) e che sia massimale tra queste la chiamo di Jordan-Hölder. I quozienti successivi  $V^i/V^{i-1}$  sono  $\chi$ -stabili per la caratterizzazione 2.9. Definisco la rappresentazione graduata associata.

**Definizione 2.10.** Data una filtrazione  $x$ -stabile  $V^i$  posso definire  $\text{gr } V$  come la collezione di spazi vettoriali  $\left\{ \bigoplus_i V_j^i / V_j^{i-1} \right\}_j$ . Definisco la rappresentazione graduata  $\text{gr } x$  associata alla filtrazione come la rappresentazione con spazi vettoriali  $\text{gr } V$  e mappe  $(\text{gr } x)_\gamma : (\text{gr } V)_{t(\gamma)} \rightarrow (\text{gr } V)_{h(\gamma)}$  definite da  $(\text{gr } x)_\gamma = (x_\gamma^1, \dots, x_\gamma^N)$  dove le mappe  $x_\gamma^i : V_{t(\gamma)}^i / V_{t(\gamma)}^{i-1} \rightarrow V_{h(\gamma)}^i / V_{h(\gamma)}^{i-1}$  sono la restrizione di  $x_\gamma$  passata al quoziente.

Preso una filtrazione di Jordan-Hölder di  $x$  il graduato  $\text{gr } x$  a meno di isomorfismo non dipende dalla filtrazione scelta, inoltre è ancora una filtrazione  $\chi$ -semistabile. Esso è un elemento dell'unica orbita chiusa in  $\overline{G(\alpha)x}$ , cioè l'unica rappresentazione semisemplice nella chiusura. Questo procedimento è analogo ma più complesso a quello della proposizione 1.17.

## 2.3 Risoluzioni di $\mathfrak{M}_0(\lambda)$

Se si prende in considerazione il carattere banale  $\chi(g) = 1$  la varietà  $\mathfrak{M}_\chi(\lambda)$  è usualmente denotata con  $\mathfrak{M}_0(\lambda)$ .

Prendendo il carattere banale si ha che i punti semistabili  $\text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)^{\chi_{ss}}$  coincidono con l'intero spazio. Per ogni carattere  $\chi$  si ha l'inclusione dell'aperto  $\mu^{-1}(\lambda)^{\chi_{ss}} \hookrightarrow \mu^{-1}(\lambda)$ , questa mappa induce una mappa sui quozienti:

$$\pi : \mathfrak{M}_\chi(\lambda) \rightarrow \mathfrak{M}_0(\lambda)$$

Essa è indotta dall'inclusione

$$H^0(\mu_\alpha^{-1}(\lambda), \mathcal{O}(\mu_\alpha^{-1}(\lambda)))^G \hookrightarrow \bigoplus_n H^0(\mu_\alpha^{-1}(\lambda), L^{\otimes n})^G$$

inoltre il morfismo  $\pi$  è proiettivo.

La seguente descrizione fornisce un modo pratico per lavorare sulla mappa  $\pi$ .

**Proposizione 2.11.** *Fissato  $x \in \mu^{-1}(\lambda)^{\chi_{ss}}$  un punto  $\chi$ -semistabile, l'immagine di  $[x]$  tramite  $\pi$  è rappresentata da  $\text{gr } x$  per una filtrazione massimale di  $V$ .*

$$\pi([x]) = [\text{gr } x]$$

*Dimostrazione.* Prendo in considerazione il chiuso  $\overline{G(\alpha)x}$ , esso ha un'unica orbita chiusa e scelgo un punto  $z$  in essa. Esiste un sottogruppo a un parametro  $\theta$  tale che  $\lim_{t \rightarrow 0} \theta(t)x = z$ , questo sottogruppo induce una filtrazione. Questa filtrazione ha la proprietà che  $[\text{gr } x] = [z]$  poiché sono entrambi somma diretta delle stesse rappresentazioni  $\chi$ -stabili.  $\square$

È immediato il seguente corollario:

**Corollario 2.12.** *Due punti  $[x], [y] \in \mathfrak{M}_\chi(\lambda)$  hanno la stessa immagine tramite  $\pi$  ( $\pi(x) = \pi(y)$ ) se e solo se i loro graduati rispetto a due filtrazioni massimali sono nella stessa orbita (cioè isomorfi  $\text{gr } x \simeq \text{gr } y$ ).*

## 2.4 Funtori di riflessione generalizzati

Innanzitutto definisco un'azione del gruppo di Weyl su  $k^n$  nel seguente modo. L'azione dei generatori è:

$$(r_i(\lambda))_j = \lambda_j - (\epsilon_i, \epsilon_j)\lambda_i \quad \forall j$$

Si osserva che vale  $\lambda^T s_i(\alpha) = r_i(\lambda)^T \alpha$ , infatti:

$$r_i(\lambda)^T \alpha = \sum_j (\lambda_j - (\epsilon_i, \epsilon_j)\lambda_i)\alpha_j = \sum_j \lambda_j \alpha_j - \sum_j \lambda_i(\alpha, \epsilon_i) = \lambda^T s_i(\alpha)$$

Diamo la definizione di vertice ammissibile.

**Definizione 2.13.** Un vertice  $i$  si dice ammissibile per  $\lambda$  se non ci sono loop sul vertice  $i$  e  $\lambda_i \neq 0$ .

Se una rappresentazione  $x$  del quiver  $\overline{Q}$  soddisfa la relazione  $\varepsilon xx = \lambda$  allora è un modulo su  $A/(\varepsilon xx - \lambda)$ , chiamo questa  $k$ -algebra  $\Pi^\lambda$ . Gli elementi in  $\mu_\alpha^{-1}(\lambda)$  sono  $\Pi^\lambda$ -moduli.

Introduco ora dei funtori che chiamo  $\tau_i$  applicabili solo se il vertice  $i$  è ammissibile per  $(\lambda, \alpha)$  e che mandano  $\Pi^\lambda$ -moduli di dimensione  $\alpha$  in  $\Pi^{r_i \lambda}$ -moduli di dimensione  $s_i(\alpha)$ .

Fisso un'orientazione di  $Q$  in modo tale che  $i$  sia un pozzo. Coerentemente con la notazione della definizione 1.29, fissato un vertice  $i$  ammissibile per  $(\lambda, \alpha)$  e una rappresentazione  $x \in \Pi^\lambda$  di dimensione  $\alpha$ , ho le mappe:

$$l : \bigoplus_{\substack{\gamma \in Q_1 \\ h(\gamma)=i}} V_{t(\gamma)} \longrightarrow V_i$$

$$\tilde{l} : V_i \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\gamma \in Q_1 \\ h(\gamma)=i}} V_{t(\gamma)}$$

Definite rispettivamente da  $l(v_{\gamma_1}, \dots, v_{\gamma_m}) = \frac{1}{\lambda_i} (x_{\gamma_1}(v_{\gamma_1}) + \dots + x_{\gamma_m}(v_{\gamma_m}))$  e  $\tilde{l}(v) = (x_{\gamma_1^*}(v_{\gamma_1}), \dots, x_{\gamma_m^*}(v_{\gamma_m}))$ . Si ha la relazione  $\tilde{l}l = \text{Id}_{V_i}$  quindi l'elemento  $\tilde{l} \in \text{End} \left( \bigoplus_{\substack{\gamma \in Q_1 \\ h(\gamma)=i}} V_{t(\gamma)} \right)$  è idempotente. Chiamo  $W_i = \text{Ker } l = \text{Im}(1 - \tilde{l})$  e definisco le mappe al variare di  $\gamma \in Q_1$  e  $h(\gamma) = i$ :

$$y_\gamma = -\lambda_i (\text{Id} - \tilde{l}) j_{V_{t(\gamma)}} : V_{t(\gamma)} \rightarrow W_i$$

$$y_{\gamma^*} = \pi_\gamma : W_i \rightarrow V_{t(\gamma)}$$

Per  $j \neq i$  definisco  $W_j = V_j$  e per gli altri archi definisco le mappe  $y_\gamma = x_\gamma$ .

**Definizione 2.14.** Il funtore  $\tau_i$  manda una rappresentazione  $x$  di  $\overline{Q}$  nella rappresentazione  $y$  di  $\overline{Q}$ .

Si hanno le seguenti successioni esatte:

$$0 \rightarrow V_i \xrightarrow{\tilde{l}} \bigoplus_{\substack{\gamma \in Q_1 \\ h(\gamma)=i}} V_{t(\gamma)} \xrightarrow{k = \langle y_{\gamma_1}, \dots, y_{\gamma_m} \rangle} W_i \rightarrow 0$$

$$0 \leftarrow V_i \xleftarrow{l} \bigoplus_{\substack{\gamma \in Q_1 \\ h(\gamma)=i}} V_{t(\gamma)} \xleftarrow{\tilde{k} = \langle y_{\gamma_1^*}, \dots, y_{\gamma_m^*} \rangle} W_i \leftarrow 0$$

Osservando che anche  $1 - \tilde{h}h$  è idempotente si ha  $k\tilde{k} = -\lambda_i \text{Id}_{W_i}$  e  $\tilde{k}k = \lambda_i(\tilde{l}l - \text{Id})$ .

**Proposizione 2.15.** La rappresentazione  $\tau_i(x)$  è in  $\mu_{s_i(\alpha)}^{-1}(r_i(\lambda))$ .

*Dimostrazione.* Nel vertice  $i$  si ha  $(\mu_{s_i(\alpha)}(y))_i = k\tilde{k} = -\lambda_i \text{Id}_{V_i}$ . Per i vertici  $j$  adiacenti a  $i$ , chiamando  $\hat{x}$  la rappresentazione ottenuta eliminando tutti gli archi incidenti in  $i$ , si ha:

$$\begin{aligned} (\mu_{s_i(\alpha)}(y))_j &= (\varepsilon\hat{x}\hat{x})_j - \sum_{\substack{h(\gamma)=i \\ t(\gamma)=j}} y_{\gamma^*} y_{\gamma} = (\varepsilon\hat{x}\hat{x})_j - \pi_j \tilde{k}k i_j \\ &= (\varepsilon\hat{x}\hat{x})_j + \lambda_i \pi_j \tilde{l} i_j + n_{i,j} \lambda_i \text{Id}_{V_j} \\ &= (\varepsilon\hat{x}\hat{x})_j + \sum_{\substack{h(\gamma)=i \\ t(\gamma)=j}} x_{\gamma^*} x_{\gamma} - (\epsilon_i, \epsilon_j) \lambda_i \text{Id}_{V_j} \\ &= (\mu_{\alpha}(x))_j - (\epsilon_i, \epsilon_j) \lambda_i \text{Id}_{V_j} \end{aligned}$$

Dove la mappa  $\mu_{s_i(\alpha)}$  ha sottointesa l'orientazione  $s_i\Omega$ . Quindi  $\mu_{s_i(\alpha)}(\tau_i x) = \prod_k (r_i(\lambda))_k \text{Id}_{W_k}$ .  $\square$

**Proposizione 2.16.** *Se  $i$  è un vertice ammissibile, allora esiste uno schema  $T$  ridotto e mappe  $f : T \rightarrow \mu_{\alpha}^{-1}(\lambda)$  e  $g : T \rightarrow \mu_{s_i\alpha}^{-1}(r_i\lambda)$  tale che siano rispettivamente un  $\text{Gl}((s_i\alpha)_i)$  e un  $\text{Gl}(\alpha_i)$  bundle*

*Dimostrazione.* Considero  $Q'$  il quiver ottenuto da  $Q$  rimuovendo il vertice  $i$  e tutti gli archi incidenti su  $i$ , ogni rappresentazione  $x \in \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$  corrisponde la coppia  $(\hat{x}, \tilde{x})$ . Con  $\hat{x}$  denoto la restrizione di  $x$  a  $Q'$ , con  $\tilde{x}$  la restrizione agli archi incidenti su  $x$ . Sia  $Z = \bigoplus_{\substack{\gamma \in Q_1 \\ h(\gamma)=i}} V_{t(\gamma)}$  e considero il sottoschema:

$$S \subset \text{Rep}(\overline{Q}', \hat{\alpha}) \times \text{Hom}(Z, V_i) \times \text{Hom}(V_i, Z) \times \text{Hom}(Z, W_i) \times \text{Hom}(W_i, Z)$$

Descritto dalle equazioni

$$S = \left\{ (w, x, x^*, y, y^*) \mid \tilde{l} = \text{Id}_{V_i} \quad k\tilde{k} = \text{Id}_{W_i} \quad \tilde{l} + \tilde{k}k = \text{Id}_Z \right\}$$

dove come sopra  $l$  dipende da  $x, x^*$  e  $k$  da  $y, y^*$  riscalato di un fattore  $\frac{1}{\lambda_i}$ . Lo schema  $S$  ha equazioni ridotte. Le proiezioni  $\pi_1 : S \rightarrow \text{Rep}(Q, \alpha)$  e  $\pi_2 : S \rightarrow \text{Rep}(Q, s_i\alpha)$  sono rispettivamente  $\text{Gl}((s_i\alpha)_i)$  e  $\text{Gl}(\alpha_i)$  bundle. Infatti  $\dim Z = \alpha_i + (s_i\alpha)_i$  e le condizioni sono equivalenti a spezzare lo spazio  $Z$  in due sottospazi  $V_i$  e  $W_i$  di dimensione rispettivamente  $\alpha_i$  e  $(s_i\alpha)_i$ .

Restringendo  $\pi_1$  a  $f : T = \pi_1^{-1}(\mu_{\alpha}^{-1}(\lambda)) \rightarrow \mu_{\alpha}^{-1}(\lambda)$  le condizioni di  $S$  implicano che  $\pi_2$  si restringe a  $g : T \rightarrow \mu_{s_i\alpha}^{-1}(r_i\lambda)$ .  $\square$

**Corollario 2.17.** *Gli schemi  $\mu_{\alpha}^{-1}(\lambda)$  e  $\mu_{s_i\alpha}^{-1}(r_i\lambda)$  hanno lo stesso numero di componenti irriducibili e dimensioni legate dalla formula:*

$$\dim \mu_{\alpha}^{-1}(\lambda) - \dim \mu_{s_i\alpha}^{-1}(r_i\lambda) = (s_i\alpha)_i^2 - \alpha_i^2 = s_i(\alpha)^T s_i(\alpha) - \alpha^T \alpha$$

## 2.5 Sistemi di radici generalizzati

Si vuole studiare l'insieme:

$$\{(\alpha, \lambda) \mid \text{esiste modulo semplice in } \mu_\alpha^{-1}(\lambda)\}$$

Esso è ovviamente contenuto in  $\{(\alpha, \lambda) \mid \mu_\alpha^{-1}(\lambda) \neq \emptyset \text{ e } \text{Ind}(Q, \alpha) \neq \emptyset\}$ , studierò questi insiemi fissato  $\lambda$  e al variare di  $\alpha$ .

Introduco una relazione di equivalenza  $\sim$  tra le coppie  $(\alpha, \lambda)$  essa è la più piccola relazione di equivalenza generata da  $(\alpha, \lambda) \sim (s_i \alpha, r_i \lambda)$  dove  $i$  è un vertice ammissibile per  $\lambda$ .

Una decomposizione di un vettore  $\alpha$  è una coppia  $(k, \beta)$  tale che  $k$  sia una collezione di  $r$  interi  $k_i$  e  $\beta$  di  $r$  vettori  $\beta^i$  in  $\mathbb{N}^n$ , si deve avere  $\alpha = \sum_{i=1}^r k_i \beta^i$ .

**Definizione 2.18.** Fissato  $\lambda \in k^n$  definisco gli insiemi:

$$R_\lambda = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \lambda \cdot \alpha = 0\}$$

$$\Sigma_\lambda = \left\{ \alpha \in R_\lambda \mid \forall r > 2 \forall (k, \beta) \begin{cases} \alpha = \sum_{i=1}^r k_i \beta^i \\ p(\alpha) > \sum_{i=1}^r k_i p(\beta^i) \\ \beta^i \in \mathbb{N} R_\lambda \setminus \{0\} \text{ e } \lambda \cdot \beta^i = 0 \quad \forall i \end{cases} \right\}$$

$$F_\lambda = \{\alpha \in R_\lambda \mid (\alpha', \epsilon_i) \leq 0 \quad \forall (\alpha', \lambda') \sim (\alpha, \lambda) \text{ e } \forall i \text{ tale che } \lambda'_i = 0\}$$

L'ultimo insieme è una sorta di regione fondamentale rispetto a  $\lambda$ , nel caso  $\lambda = 0$  coincide con  $F$ . Osservare che  $\mathbb{N} R_\lambda = \mathbb{N} \Sigma_\lambda$ , per usare una notazione univoca questo insieme sarà sempre chiamato  $\mathbb{N} R_\lambda$ . Inoltre è facile creare esempi in cui  $\{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid \lambda \cdot \alpha\} \supsetneq \mathbb{N} R_\lambda$ .

**Teorema 2.19.** *Si ha la seguente caratterizzazione:*

$$\Sigma_\lambda = \{\alpha \in R_\lambda \mid \text{esiste modulo semplice in } \mu_\alpha^{-1}(\lambda)\}$$

$$\mathbb{N} R_\lambda = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid \mu_\alpha^{-1}(\lambda) \neq \emptyset\}$$

La prima identità implica banalmente la seconda. Questo teorema sarà dimostrato più avanti, intanto mostro che questi insiemi sono invarianti per riflessioni.

**Lemma 2.20.** *Gli insiemi  $R_\lambda$ ,  $\mathbb{N} R_\lambda$  e  $\Sigma_\lambda$  sono invarianti per l'azione delle riflessioni rispetto vertici ammissibili, cioè:*

$$\alpha \in R_\lambda \iff s_i \alpha \in R_{r_i \lambda}$$

e analoghi per  $\mathbb{N} R_\lambda$  e  $\Sigma_\lambda$ .

Il lemma sopra si estende a coppie equivalenti: sia  $\alpha \in R_\lambda$  (o in  $\mathbb{N} R_\lambda$  o in  $\Sigma_\lambda$ ) e  $(\alpha', \lambda') \sim (\alpha, \lambda)$  allora  $\alpha' \in R_{\lambda'}$  (o in  $\mathbb{N} R_{\lambda'}$  o in  $\Sigma_{\lambda'}$ ).

*Dimostrazione.* Per  $R_\lambda$ , fissata una riflessione  $s_i$ , essa manda radici positive in radici positive eccetto per  $\alpha = \epsilon_i$ . Se  $\alpha = \epsilon_i$  allora la condizione  $0 = \lambda \cdot \alpha = \lambda_i$  implica che la riflessione  $s_i$  non è ammissibile. Il lemma è quindi ovvio per  $\mathbb{N}R_\lambda$  e per  $\Sigma_\lambda$  si deduce per invarianza dei polinomi  $p(\alpha) = p(s_i\alpha)$ .  $\square$

**Lemma 2.21.** *Sia  $\alpha \in \mathbb{N}R_\lambda \setminus \{0\}$  e supponiamo che per ogni  $\beta \in \mathbb{N}R_\lambda \setminus \{0\}$  tale che  $\alpha - \beta \in \mathbb{N}R_\lambda \setminus \{0\}$  soddisfi  $(\beta, \alpha - \beta) \leq -2$ . Allora  $\alpha$  appartiene a  $R_\lambda$ .*

*Dimostrazione.* Passo 1: a meno di equivalenza trovo una coppia  $(\alpha', \lambda')$  tali che  $\lambda'_i \neq 0 \Rightarrow (\alpha', \epsilon_i) \leq 0$ .

Sia  $(\alpha', \lambda')$  la coppia con  $\alpha'$  minimale tra tutte le coppie equivalenti a  $(\alpha, \lambda)$ , poiché  $\alpha \in \Phi^+$  allora  $\alpha' \in \mathbb{N}^n$ . Sia  $i$  un vertice con  $\lambda'_i \neq 0$ , se c'è un loop in  $i$  allora  $(\alpha', \epsilon_i) \leq 0$  altrimenti  $i$  è ammissibile e l'elemento  $(s_i\alpha', r_i\lambda')$  è maggiore di  $(\alpha', \lambda')$ . Si ha  $0 \leq s_i(\alpha') - \alpha' = -(\alpha', \epsilon_i)\epsilon_i$  cioè  $(\alpha', \epsilon_i) \leq 0$ .

Passo 2: Se  $\lambda_i = 0$  e  $(\alpha, \epsilon_i) > 0$  allora  $\alpha - \epsilon_i \in \mathbb{N}R_\lambda$ .

Osservo che non ci devono essere loop in  $i$  e decomposto  $\alpha = \sum_j \beta^j$  in somma di radici  $\beta^j \in R_\lambda$  suppongo tutti i  $\beta^j$  diversi da  $\epsilon_i$  altrimenti vale la tesi. Nonostante  $i$  non sia ammissibile, posso applicare  $s_i$  alle radici:  $s_i\alpha = \sum_j s_i\beta^j \in \mathbb{N}R_\lambda$ . La condizione appena trovata implica  $\alpha - \epsilon_i = s_i\alpha + ((\alpha, \epsilon_i) - 1)\epsilon_i \in \mathbb{N}R_\lambda$ .

Passo 3: Se  $\alpha$  soddisfa le ipotesi del lemma allora ha supporto connesso.

Scrivo  $\alpha = \sum_j \beta^j$  come somma di radici  $\beta^j \in R_\lambda$  e sia  $C$  una componente connessa del supporto. I  $\beta^j$  hanno supporto connesso perché in  $\Phi^+$ , definisco  $\gamma = \sum_{\text{supp } \beta^j \subseteq C} \beta^j$  e si ha  $(\gamma, \alpha - \gamma) = 0$  con  $\gamma, \alpha - \gamma \in \mathbb{N}R_\lambda$  da cui  $\alpha = \gamma$ . Quindi il supporto di  $\alpha$  è  $C$  ed è connesso.

Passo 4: conclusione.

Scelgo la coppia equivalente del passo 1, continuo a chiamarla  $(\alpha, \lambda)$ . Suppongo  $\alpha \notin F$ , quindi esiste  $i$  con  $(\alpha, \epsilon_i) > 0$  (ovviamente  $i$  non deve avere loop). Per la scelta della coppia  $(\alpha, \lambda)$  si deve avere  $\lambda_i = 0$ , per il passo 2 si ha  $\alpha - \epsilon_i \in \mathbb{N}R_\lambda$ . Se  $\alpha - \epsilon_i \neq 0$  si ottiene:

$$-2 \geq (\alpha - \epsilon_i, \epsilon_i) = (\alpha, \epsilon_i) - 2 > -2$$

Ho l'uguaglianza  $\alpha = \epsilon_i$  da cui  $\alpha \in \Phi^+$  e infine la tesi  $\alpha \in R_\lambda$ .  $\square$

**Lemma 2.22.** *Sia  $\alpha \in \mathbb{N}R_\lambda \setminus \{0\}$ , sono equivalenti:*

1.  $\alpha \in \Sigma_\lambda$ .
2. Per ogni  $\beta \in \mathbb{N}R_\lambda \setminus \{0\}$  tale che  $\alpha - \beta \in \mathbb{N}R_\lambda \setminus \{0\}$  si ha  $(\beta, \alpha - \beta) \leq -2$

*Dimostrazione.* Definisco una buona decomposizione di  $\alpha$  una collezione  $\{\beta^i\}_{i=1, \dots, r}$  tali che:

- $\alpha = \sum_{i=1}^r \beta^i$ .
- $\beta^i \in \mathbb{N} R_\lambda \setminus \{0\}$ .
- $p(\alpha) \leq \sum_{i=1}^r p(\beta^i)$ .

Tra tutte le buone decomposizioni di  $\alpha$  ne scelgo una con  $r$  massimo:  $\alpha = \sum_{i=1}^r \beta^i$ . Un facile conto mostra che:

$$p(\beta) \leq p(\gamma) + p(\beta - \gamma) \iff (\gamma, \beta - \gamma) \geq -1$$

La massimalità della buona decomposizione implica  $(\gamma, \beta^i - \gamma) \leq -2$  cioè per il lemma 2.21  $\beta^i \in R_\lambda$ . Si ha quindi  $\alpha \in \Sigma_\lambda \iff r = 1 \iff (2)$ .  $\square$

Il seguente teorema fornisce informazioni sulla dimensione di  $\mu_\alpha^{-1}(\lambda)$ .

**Teorema 2.23.** *Siano  $(\alpha, \lambda)$  tale che  $\alpha \in \mathbb{N} R_\lambda$ . Sia  $m$  il massimo di  $\sum_i k_i p(\beta^i)$  al variare delle decomposizioni  $\sum_i k_i \beta^i = \alpha$  tali che  $\beta_i$  radici e  $\lambda \cdot \beta^i = 0$  per ogni  $i$ , la dimensione della fibra  $\mu_\alpha^{-1}(\lambda)$  è:*

$$\dim \mu_\alpha^{-1}(\lambda) = \alpha^T \alpha - q(\alpha) + m$$

La dimostrazione fa uso del teorema 2.7 e del teorema di Kac 1.72, ricordo che  $h_G(V)$  è il numero di parametri da cui dipendono le orbite in  $V$ . Serve prima dare una definizione.

Fissati  $Q$  e  $\alpha$  si partiziona  $\text{Rep}(Q, \alpha)$  in costruibili chiamati  $I(k, \beta) = I(k_1, \beta^1, \dots, k_r, \beta^r)$  al variare di  $k_i$  tra gli interi positivi e  $\beta^i \in \mathbb{N}^n$ . Si definisce

$$I(k, \beta) = \left\{ x \in \text{Rep}(Q, \alpha) \mid x \simeq \bigoplus_{i=1}^r (x^i)^{k_i} \begin{cases} x_i \text{ indecomponibili} \\ \dim x^i = \beta^i \quad \forall i \\ x^i \not\cong x^j \quad i \neq j \end{cases} \right\}$$

Ovviamente al variare di  $(k, \beta)$  tali che  $\sum_{i=1}^r k_i \beta^i = \alpha$  questi insiemi partizionano  $\text{Rep}(Q, \alpha)$ . Essendo in numero finito e localmente chiusi ne esiste un unico denso nello spazio (irriducibile)  $\text{Rep}(Q, \alpha)$ . Inoltre  $I(1, \alpha) = \text{Ind}(\alpha)$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione consiste nel analizzare il morfismo  $\pi : \mu_\alpha^{-1}(\lambda) \rightarrow \text{Rep}(Q, \alpha)$  e calcolare la dimensione della controimmagine di un costruibile  $U \subseteq \text{Im } \pi$  tramite la formula:

$$\dim \pi^{-1}U = h_{G(\alpha)}(U) + \alpha^T \alpha - q(\alpha) \quad (2.3)$$

e calcolare  $h_{G(\alpha)}(U)$  come il massimo dei  $h_{G(\alpha)}(U_d)$  al variare delle decomposizioni di  $\alpha$ .

Dimostro la formula 2.3. Partiziono  $U$  negli insiemi costruibili  $U_d$  formati dai punti il cui stabilizzatore per l'azione di  $G(\alpha)$  ha dimensione  $d$ .

Riduco al caso  $U = U_d$ , infatti  $\dim \pi^{-1}U = \max_d(\dim \pi^{-1}U_d)$  e  $h_{G(\alpha)}(U) = \max_d(h_{G(\alpha)}(U_d))$ . La dimensione della fibra di un punto  $x \in U_d$  è  $\dim \pi^{-1}(x) = \dim \text{Ext}_A^1(x, x)^* = \dim \text{End}_A(x) - q(\alpha) = d + 1 - q(\alpha)$ . Essendo le fibre irriducibili e equidimensionali per il lemma precedente si ha:

$$\dim \pi^{-1}U_d = \dim \pi^{-1}(x) + \dim U_d = \dim U_d + d + 1 - q(\alpha) \quad (2.4)$$

D'altra parte ogni orbita in  $U_d$  ha dimensione  $\dim G(\alpha) - \dim G(\alpha)_x = \dim G(\alpha) - d$ , si ha:

$$h_{G(\alpha)}(U_d) = \dim U_d - \dim G(\alpha) + d = \dim U_d - \alpha^T \alpha + d + 1 \quad (2.5)$$

Di conseguenza mettendo insieme le formule 2.4 e 2.5 si ha la tesi  $\dim \pi^{-1}U_d = h_{G(\alpha)}U_d + \alpha^T \alpha - q(\alpha)$ .

Per calcolare il numero di parametri dell'insieme  $U$  ( $h_{G(\alpha)}(U)$ ), partiziono  $U$  negli insiemi  $I(k, \beta)$ . Si ha  $h_{G(\alpha)}(U) = \max_{(k, \beta)} \{h_{G(\alpha)}(I(k, \beta))\}$ . Fissata una base di  $V$  e un ordinamento delle radici  $\beta^i$  si ha un'inclusione  $\prod_i \text{Rep}(Q, \beta^i)^{k_i} \subseteq \text{Rep}(Q, \alpha)$  che manda la collezione di rappresentazioni nella somma diretta di esse. Questa mappa si restringe a  $\prod_i \text{Ind}(\beta^i)^{k_i} \subseteq I(k, \beta)$  e chiamo  $H$  il sottogruppo di  $G(\alpha)$  isomorfo a  $\prod_i \text{Gl}(\beta^i)^{k_i} / {}_k \text{Id}$  usando la precedente base di  $V$ . Ogni orbita in  $I(k, \beta)$  interseca  $\prod_i \text{Ind}(\beta^i)^{k_i}$  e chiamato  $x$  un punto dell'intersezione essa coincide con  $Hx$ . Si ha la formula:

$$h_{G(\alpha)}(I(k, \beta)) = h_H \left( \prod_i \text{Ind}(\beta^i)^{k_i} \right) = \sum_i k_i h_{G(\beta^i)}(\text{Ind} \beta^i) = \sum_i k_i p(\beta^i)$$

Osservo che il teorema 2.7 fornisce condizioni necessarie e sufficienti per determinare se  $I(k, \beta)$  è contenuto o disgiunto dall'immagine di  $\pi$ . Se  $\lambda \cdot \beta^i \neq 0$  per qualche indice  $i$  allora i due insiemi sono disgiunti, altrimenti è contenuto. Sia  $U$  l'unione dei  $I(k, \beta)$  contenuti nell'immagine di  $\pi$  e unendo le due parti della dimostrazione si ottiene:

$$\dim \mu_\alpha^{-1}(\lambda) = h_{G(\alpha)}(U) + \alpha^T \alpha - q(\alpha) = m + \alpha^T \alpha - q(\alpha)$$

□

## 2.6 Regione fondamentale rispetto a $\lambda$

In questa lunga sezione vogliamo descrivere in modo combinatorio gli elementi in  $F_\lambda$  che non stanno in  $\Sigma_\lambda$ . Il teorema che classifica queste radici sarà fondamentale per la dimostrazione dell'esistenza di una decomposizione canonica e per fornire proprietà delle varietà quiver. Globalmente i lemmi e le dimostrazioni risultano molto tecnici.

Ricordo la definizione 2.18 della regione fondamentale rispetto a  $\lambda$ :

$$F_\lambda = \{\alpha \in R_\lambda \mid (\alpha', \epsilon_i) \leq 0 \quad \forall (\alpha', \lambda') \sim (\alpha, \lambda) \text{ e } \forall i \text{ tale che } \lambda'_i = 0\}$$

Questo insieme servirà a studiare le radici immaginarie contenute in  $\Sigma_\lambda$ . È ovvio che per coppie equivalenti  $(\alpha, \lambda) \sim (\alpha', \lambda')$  si ha:

$$\alpha \in F_\lambda \iff \alpha' \in F_{\lambda'}$$

**Osservazione 2.24.** *Se  $\alpha \in F_\lambda$  esiste una coppia equivalente  $(\alpha', \lambda')$  con  $\alpha'$  nella regione fondamentale  $F$ .*

*Dimostrazione.* Per il passo 1 della dimostrazione del lemma 2.21 posso trovare una coppia equivalente con  $(\alpha', \epsilon_i) \leq 0$  per ogni  $i$  tale che  $\lambda'_i \neq 0$ . La definizione di  $F_\lambda$  fornisce la proprietà anche per gli indici con  $\lambda'_i = 0$ .  $\square$

Non è vero in generale che  $F_\lambda \subseteq \Sigma_\lambda$ , per questo studieremo gli elementi in  $F_\lambda \setminus \Sigma_\lambda$ .

Si vorrebbe che per ogni  $\beta < \alpha \in F_\lambda$  si avesse  $(\beta, \alpha - \beta) \leq -2$  per usare la caratterizzazione del lemma 2.22. Il seguente risultato va in questa direzione.

**Lemma 2.25.** *Sia  $\alpha \in F_\lambda$  e  $\beta \in \mathbb{N}R_\lambda \setminus \{0\}$  tale che  $\alpha - \beta \in \mathbb{N}R_\lambda \setminus \{0\}$ . Se  $\alpha$  è non isotropa ( $q(\alpha) < 0$ ) allora  $(\beta, \alpha - \beta) < 0$*

*Dimostrazione.* Per assurdo suppongo  $(\beta, \alpha - \beta) \geq 0$  e sia  $(\alpha', \lambda')$  la coppia equivalente con  $\alpha' \in F$ . Si ha:

$$q(\alpha') = q(\alpha' - \beta') + q(\beta') + (\beta', \alpha' - \beta') \geq q(\alpha' - \beta') + q(\beta')$$

Per il lemma 1.25 si deve avere  $q(\alpha') = q(\alpha) = 0$  contro l'ipotesi.  $\square$

L'ostruzione per  $\alpha \in F_\lambda$  non-isotropo ad appartenere a  $\Sigma_\lambda$  è data dai  $\beta \in \mathbb{N}R_\lambda \setminus \{0\}$  tali che  $\alpha - \beta \in \mathbb{N}R_\lambda$  e  $(\beta, \alpha - \beta) = -1$ . Essi si chiamano (-1)-vettori per la coppia  $(\alpha, \lambda)$ .

**Lemma 2.26.** *Sia  $\alpha \in F_\lambda \setminus \Sigma_\lambda$ , se  $\beta$  è un (-1)-vettore per  $(\alpha, \lambda)$  esiste una coppia equivalente  $(\alpha', \lambda')$  e un (-1)-vettore  $\beta' \in \mathbb{N}R_{\lambda'} \cap F$  con  $\beta' \leq \beta$ . Inoltre scegliendo opportunamente  $(\alpha', \lambda')$  si ha  $(\alpha' - \beta', \epsilon_i) \leq 0$  ogni volta che  $(\beta', \epsilon_i) = 0$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\beta'$  minimale tra i (-1)-vettori di coppie equivalenti a  $(\alpha, \lambda)$  e minori di  $\beta$ ; tra tutte le coppie equivalenti a  $(\alpha, \lambda)$  e con (-1)-vettore  $\beta'$  ne scelgo una con  $\alpha'$  minimale (e la chiamerò  $(\alpha', \lambda')$ ).

Mostro che  $\beta'$  appartiene a  $F$ . Sia  $i$  un vertice senza loop ( $q(\epsilon_i) = 1$ ), se  $\lambda'_i = 0$  allora  $\epsilon_i \in R_\lambda$  e si deve avere  $(\beta', \epsilon_i) \leq 0$ . Per il passo 2 del lemma 2.21  $\beta' - \epsilon_i$  sarebbe in  $\mathbb{N}R_\lambda$  e (-1)-vettore:

$$\begin{aligned} (\beta' - \epsilon_i, \alpha' - \beta' + \epsilon_i) &= (\beta', \alpha' - \beta') - q(\epsilon_i) - (\alpha', \epsilon_i) + 2(\beta', \epsilon_i) \\ &\geq -1 - 2 - 0 + 2 = -1 \end{aligned}$$

L'altra disuguaglianza è fornita dal lemma 2.25. L'altro caso è con  $\lambda'_i \neq 0$ , il vertice  $i$  sarebbe ammissibile per  $(\alpha', \lambda')$  e  $s_i(\beta')$  sarebbe  $(-1)$ -vettore per  $(s_i\alpha', r_i\lambda')$  contraddicendo la minimalità di  $\beta'$ .

Per dimostrare l'ultima parte si distinguono i casi  $\lambda'_i = 0$  e diverso da zero. Nel primo si ha  $(\alpha' - \beta', \epsilon_i) = (\alpha', \epsilon_i) \leq 0$  perché  $\alpha \in F_\lambda$ . Nel secondo si usa la minimalità di  $\alpha'$ , poiché  $i$  è ammissibile e  $s_i\beta' = \beta'$  si deve avere  $\alpha' \leq s_i\alpha'$  ( $\alpha' - \beta' \leq s_i(\alpha' - \beta')$ ) cioè  $(\alpha' - \beta', \epsilon_i) \leq 0$ .  $\square$

Sia  $\beta'$  come nel lemma, si deve avere:

$$-1 = (\beta', \alpha' - \beta') = \sum_i (\alpha'_i - \beta'_i)(\beta', \epsilon_i)$$

Poiché  $\beta' \in F$  tutti gli addendi eccetto uno devono essere nulli. Esiste un vertice critico  $r$  tale che  $\alpha'_r - \beta'_r = 1$  e  $(\beta', \epsilon_r) = -1$ , per tutti gli altri vertici  $i$  si deve avere  $(\beta', \epsilon_i) = 0$  o  $\alpha'_i = \beta'_i$ . Tutti i  $(-1)$ -vettori che soddisfano le proprietà qui sopra si dicono divisori per  $(\alpha', \lambda')$ .

**Lemma 2.27.** *Fissati  $\alpha \in F_\lambda \setminus \Sigma_\lambda$  e  $\beta$   $(-1)$ -vettore, siano  $(\alpha', \lambda')$  e  $\beta'$  come nel lemma precedente. Se  $q(\alpha) < 0$  allora  $\beta'$  appartiene a  $\Sigma_{\lambda'}$ .*

*Dimostrazione.* Uso il lemma 2.22, per ogni  $\gamma \in \mathbb{N}R_{\lambda'}$  con  $0 < \gamma < \beta'$  sia  $\gamma$  sia  $\beta' - \gamma$  non sono  $(-1)$ -vettori per  $\alpha'$  per minimalità di  $\beta'$ :

$$\begin{aligned} (\gamma, \beta' - \gamma) + (\gamma, \alpha' - \beta') &= (\gamma, \alpha' - \gamma) \leq -2 \\ (\gamma, \beta' - \gamma) + (\alpha' - \beta', \beta' - \gamma) &= (\alpha' - \beta' + \gamma, \beta' - \gamma) \leq -2 \end{aligned}$$

Sommando le due disequazioni si ottiene  $2(\gamma, \beta' - \gamma) - 1 \leq -4$  quindi  $(\gamma, \beta' - \gamma) \leq -2$ .  $\square$

Fissato  $(\alpha, \lambda)$  prendo un elemento minimo con  $\alpha'$  tra tutte le coppie equivalenti e mi restringo al suo supporto. Per comodità di notazione continuerò a chiamare il quiver  $Q$  e la coppia minima  $(\alpha, \lambda)$ . Una radice si dice sincera se il suo supporto è l'intero quiver. La radice  $\alpha$  e tutti i suoi coniugati sono sinceri per minimalità.

**Proposizione 2.28.** *Sia  $\beta$  un divisore per  $(\alpha, \lambda)$  allora  $\beta$  e  $\alpha - \beta$  non possono essere entrambi sinceri*

*Dimostrazione.* Per assurdo suppongo sia  $\alpha - \beta$  sia  $\beta$  sinceri. Osservo preliminarmente che  $\alpha_i - \beta_i \neq 0$  quindi  $(\beta, \epsilon_i) = 0$  per ogni vertice  $i$  diverso da  $r$ .

Per prima cosa voglio dimostrare che  $Q$  è un albero. Per far ciò studio i sottoquiver euclidei:

**Lemma 2.29.** *Sia  $r$  il vertice critico per  $\beta$  e  $Q'$  un sottoquiver euclideo ( $\beta$  sincero e  $\text{supp}(\alpha - \beta) \supseteq Q'$ ), allora  $r$  è in  $Q'$  e non è un vertice di estensione.*

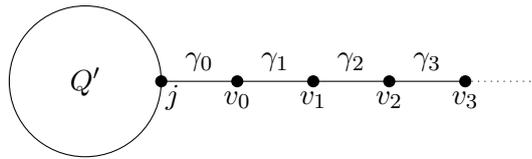
*Dimostrazione.* Definisco per ogni  $i \in Q'$  gli interi non negativi  $s_i$  dati da:

$$\begin{aligned} s_i &\stackrel{def}{=} (\beta|_{Q'}, \epsilon_i)_{Q'} - (\beta, \epsilon_i)_Q = \\ &= 2\beta_i - \sum_{\substack{t(\gamma)=i \\ \gamma \in Q'}} \beta_{h(\gamma)} - \sum_{\substack{h(\gamma)=i \\ \gamma \in Q'}} \beta_{t(\gamma)} - 2\beta_i + \sum_{\substack{t(\gamma)=i \\ \gamma \in Q}} \beta_{h(\gamma)} + \sum_{\substack{h(\gamma)=i \\ \gamma \in Q}} \beta_{t(\gamma)} = \\ &= \sum_{\substack{t(\gamma)=i \\ \gamma \in Q \setminus Q'}} \beta_{h(\gamma)} + \sum_{\substack{h(\gamma)=i \\ \gamma \in Q \setminus Q'}} \beta_{t(\gamma)} \end{aligned}$$

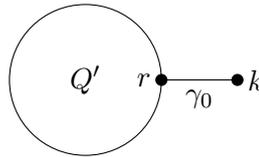
Sia  $\delta$  la radice immaginaria minima di  $Q'$ , si ha  $(\beta, \delta) = (\beta|_{Q'}, \delta) - \sum_i \delta_i s_i = -\sum_i \delta_i s_i$ . D'altra parte  $(\beta, \epsilon_i) = 0$  per ogni vertice  $i$  diverso da  $r$  e  $(\beta, \delta) = \delta_r$ . Se  $r$  non fosse in  $Q'$  si avrebbe  $-\sum_i \delta_i s_i = 0$  e essendo tutti addendi positivi si ha  $s_i = 0$  per ogni vertice in  $Q'$ . Dato che  $\beta$  è sincero si deve avere che non esistono archi con un solo estremo in  $Q'$ , quindi il sottoquiver è una componente connessa e per connessione  $Q = Q'$  (anche come archi). Da qui si ottiene l'assurdo che  $r \notin Q' = Q$ , ottengo che  $r$  deve stare in tutti i sottoquiver euclidei.

Manca da dimostrare che  $r$  non è un vertice d'estensione. Se si avesse  $\delta_r = 1$  allora  $1 = \sum_{i \in Q'} \delta_i s_i$  e ci sarebbe un unico arco  $\gamma_0$  non in  $Q'$  con un estremo  $j$  in  $Q'$  di estensione e l'altro ( $k$ ) in  $Q \setminus Q'$ . La condizione  $s_j = 1$  implica anche  $\beta_k = 1$ . Ricordando che per ogni vertice non in  $Q'$  si ha  $(\beta, \epsilon_i) = 0$  si ottiene  $0 = 2\beta_k - \beta_j - \text{roba}$ , distinguo i casi:

$\beta_j = 1$ : Esiste un solo altro arco  $\gamma_1$  diverso da  $\gamma_0$  incidente a  $v_0 \stackrel{def}{=} k$ , l'altro suo estremo lo chiamo  $v_1$  e si ha  $\beta_{v_1} = 1$ . Applico nuovamente il ragionamento su  $v_1$  e ottengo un nuovo arco  $\gamma_2$  e un nuovo vertice  $v_2$ , induttivamente si dimostra che il grafo deve essere infinito.



$\beta_j = 2$  e  $j = r$ : Si ha  $\alpha_r - \beta_r = 1$  e non ci sono altri archi incidenti su  $k$ , come in figura.



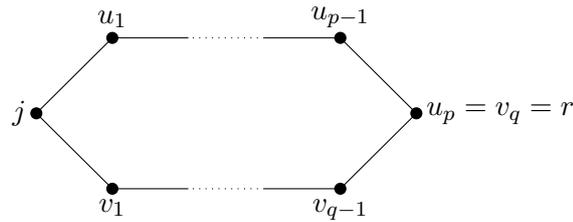
Inoltre:

$$0 \geq (\alpha, \epsilon_k) = (\alpha - \beta, \epsilon_k) = 2(\alpha_k - \beta_k) - (\alpha_r - \beta_r) = -1 + 2(\alpha_k - \beta_k)$$

Da cui l'assurdo  $\alpha_k - \beta_k = 0$ .

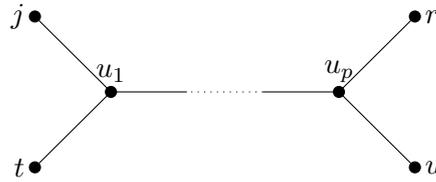
$j \neq r$ : Sia  $\zeta = \beta|_{Q'}$ , esso ha le proprietà  $(\zeta, \epsilon_i)_{Q'} = 0$  per ogni  $i \neq r, j$  e  $(\zeta, \epsilon_j)_{Q'} = (\beta, \epsilon_j) + s_j = 1$ . Dimostro, grazie alla classificazione dei grafi euclidei, che un tale  $\zeta$  non può esistere. A meno di sommare a  $\zeta$  un multiplo di  $\delta$  posso supporre  $\zeta_j = 0$ .

$\tilde{A}_n$ : Uso la notazione in figura:

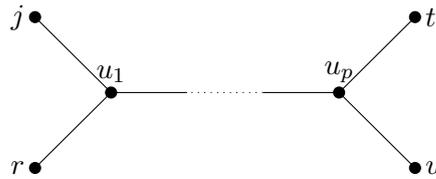


Si ha  $\zeta_{u_i} = i\zeta_{u_1}$ ,  $\zeta_{v_i} = i\zeta_{v_1}$  e  $\zeta_{u_1} + \zeta_{v_1} = -1$ . Essendo  $u_p = v_q$  si ha  $\zeta_{u_1 p} = \zeta_{v_1 q}$  di conseguenza  $\zeta_{u_1}$  e  $\zeta_{v_1}$  hanno lo stesso segno. La somma dei due è  $-1$  da cui l'assurdo.

$\tilde{D}_n$ : Ci sono due casi a seconda se i vertici  $j$  e  $r$  sono vicini o lontani:

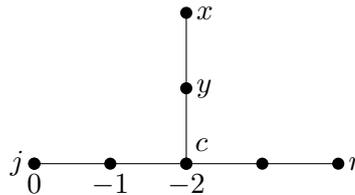


Semplicemente si ha  $-1 = \zeta_j = \zeta_{u_1} = 2\zeta_t$ , da cui l'assurdo.



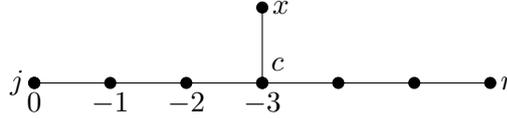
In questo caso le condizioni sono  $\zeta_{u_p} = 2\zeta_t = 2\zeta_u$  e  $\zeta_{u_1} = \zeta_{u_2} = \dots = \zeta_{u_p}$ . Inoltre  $-1 = \zeta_j = \zeta_{u_1}$ , ma  $-1$  non è pari.

$\tilde{E}_6$ : Per la condizione  $\zeta_j = 0$  si hanno i valori di  $\zeta$  come in figura.



Inoltre  $2\zeta_x = \zeta_y$  e  $3\zeta_x = \zeta_c$ , da cui l'assurdo che  $-2$  non è divisibile per  $3$ .

$\tilde{E}_7$ : Per la condizione  $\zeta_j = 0$  si hanno i valori di  $\zeta$  come in figura.



Inoltre  $2\zeta_x = \zeta_c = -3$ , da cui l'assurdo.

$\tilde{E}_8$ : Ha solo un vertice d'estensione quindi  $r = j$ .

□

Dimostrato il lemma uso i sottoquiver euclidei per ottenere informazioni sul quiver  $Q$  e su dove sia  $r$ . Se  $Q$  avesse un ciclo, un loop o un arco doppio allora si avrebbe un sottoquiver di tipo  $\tilde{A}_n$  (rispettivamente  $\tilde{A}_0$  e  $\tilde{A}_1$ ) e tutti i loro vertici sarebbero di estensione. Ricordo che  $Q$  non è né euclideo né Dynkin perché  $q(\alpha) < 0$ , se elimino da  $Q$  il vertice  $r$  ottengo un numero finito di componenti connesse. Esse devono essere di tipo Dynkin altrimenti  $r$  sarebbe contenuto in una di quelle componenti. Mostro che le componenti connesse non possono essere di tipo  $A_n$  e  $D_n$ .

Sia  $\xi \in \mathbb{Q}^n$  con entrate positive,  $(\xi, \epsilon_r) = -1$ ,  $\xi_r = 0$  e  $(\xi, \epsilon_i) \in \mathbb{N}$  si ha:

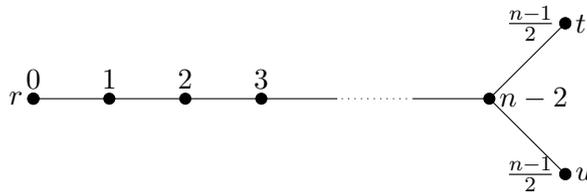
$$0 \geq (\alpha, \xi) = (\alpha - \beta, \xi) = \sum_i (\alpha - \beta)_i (\xi, \epsilon_i) = -1 + \sum_{i \neq r} (\alpha - \beta)_i (\xi, \epsilon_i)$$

Dato che  $\alpha - \beta$  è sincero tutti gli addendi devono essere nulli tranne al più uno che può valere 1.

Applico questo ragionamento ai seguenti quiver con nei vertici i valori di  $\xi_i$ :

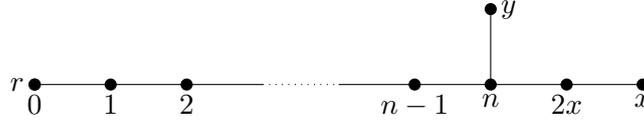


Si ottiene  $(\xi, \epsilon_n) = 2n - (n - 1) = n + 1$  quindi l'assurdo.

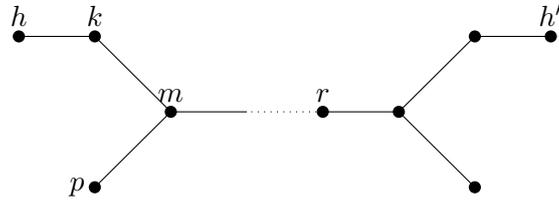


Si ottiene  $(\xi, \epsilon_t) = (\xi, \epsilon_u) = 2 \frac{n-1}{2} - (n - 2) = 1$  quindi l'assurdo.

L'ultimo caso rimasto è che la componente connessa sia della forma:



Con  $1 \leq n \leq 4$  perché altrimenti conterrebbe  $\tilde{E}_8$ , inoltre ci sono almeno due componenti connesse in  $Q \setminus r$  perché  $Q$  non è dynkin o euclideo. Necessariamente  $Q$  contiene un sottoquiver  $Q' = \tilde{D}_n$  e sia  $\delta$  la sua radice immaginaria minima. Poiché  $r$  non è di estensione  $\delta_r = 2$  e tornando alla dimostrazione del lemma precedente si ha  $2 = \delta_r = \sum_i \delta_i s_i$  e sapendo che almeno due sono non nulli si ottiene  $\beta_h = \beta_{h'} = 1$ .

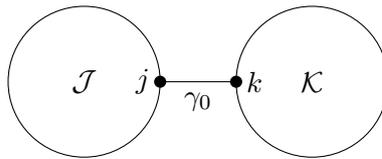


Un conto su  $0 = (\beta, \epsilon_p) = 2\beta_p - \beta_m$  e su  $0 = (\beta, \epsilon_k) = 2\beta_k - \beta_m - \beta_h$  porta a concludere che  $\beta_h$  sia pari. Da cui la dimostrazione della proposizione.  $\square$

**Teorema 2.30** (di classificazione). *Sia  $\alpha \in F_\lambda \setminus \Sigma_\lambda$  allora esiste una coppia equivalente  $(\alpha', \lambda')$  con supporto  $Q'$  tale che valga almeno una delle seguenti:*

- I Il grafo  $Q'$  è Dynkin e  $\alpha' = m\delta$  con  $m > 1$ .
- II L'insieme  $Q'_0$  si partiziona come  $\mathcal{J} \sqcup \mathcal{K}$  con  $\lambda' \cdot \alpha'_{|\mathcal{K}} = 0$  (e  $\lambda' \cdot \alpha'_{|\mathcal{L}} = 0$ ):

**Figura 1**



Con  $\alpha'_j = \alpha'_k = 1$ .

- III Il quiver si spezza come sopra con  $\lambda' \cdot \alpha'_{|\mathcal{K}} = 0$  ( $\lambda' \cdot \alpha'_{|\mathcal{L}} = 0$ ). Inoltre  $\alpha'_j = 1$ , il quiver ristretto a  $\mathcal{K}$  è euclideo e  $\alpha'_{|\mathcal{K}} = m\delta$  con  $m > 2$ .

Prima di continuare con la dimostrazione del teorema, fornirò alcuni esempi.

*Esempio 4.* Prendo in considerazione il quiver:

$$Q : 1 \xrightarrow{\gamma_1} 2 \rightleftarrows \gamma_2$$

Scelgo  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , la matrice di associata al grafo è  $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . I prodotti scalari sono:

$$(\alpha, \epsilon_1) = 0 \quad (\alpha, \epsilon_2) = -1$$

quindi  $q(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2}(0 - 2) = -1$  e  $p(\alpha) = 1 - q(\alpha) = 2$ . Il gruppo di Weyl è generato da  $s_1$  quindi  $\mathcal{W} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  e  $\alpha$  appartiene a  $F$ . Scelgo  $\lambda = 0$  e mostro che  $\alpha \in F_0 \setminus \Sigma_0$ . Come già osservato  $F_0 = F$  e  $q(\epsilon_1) = 1$  e  $q(\epsilon_2) = 0$  quindi  $p(\epsilon_1) = 0$  e  $p(\epsilon_2) = 1$ . Inoltre  $R_0 = \Phi^+$  che contiene  $\epsilon_1$  come unica radice reale, esplicito gli insiemi:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid b \geq 2a \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a + c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{N} \right\}$$

$$s_1 F = \left\{ \begin{pmatrix} b - a \\ b \end{pmatrix} \mid b \geq 2a \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a + c \\ 2a + c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{N} \right\}$$

Da cui si osserva che  $\epsilon_2$  è radice immaginaria e in  $\Sigma_0$  perché indecomponibile in  $\Phi^+$ . Si ha:

$$p(\alpha) = 2 = p(\epsilon_1) + p(\epsilon_2) + p(\epsilon_2)$$

quindi  $\alpha \notin \Sigma_0$ . Il vettore  $\alpha$  è di tipo (III).

Se si sceglie  $\lambda = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  si ha:

$$R_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{N} \right\}$$

In questo caso  $\mathbb{N}R_\lambda = R_\lambda = \mathbb{N}\alpha$  ed essendo  $\alpha$  indecomponibile nel reticolo appartiene a  $\Sigma_\lambda$ . Si osserva che  $\alpha$  è l'unico elemento in  $\Sigma_\lambda$ .

Fornisco degli esempi di quiver di tipo (II).

*Esempio 5.* Sia  $\mathcal{K}$  il supporto di un quiver con  $\beta$  radice immaginaria non isotropica ( $q(\beta) < 0$  con supporto connesso), suppongo che esista un vertice  $k$  con  $\beta_k = 1$  e fisso un  $\lambda'$  tale che  $\lambda' \cdot \beta = 0$ . Sia  $\mathcal{J}$  il supporto di  $\gamma$  con le stesse proprietà di sopra e  $\gamma_j = 1$  e con  $\lambda'' \cdot \gamma = 0$ . Costruisco un nuovo quiver  $Q$  ottenuto dall'unione disgiunta dei due a cui viene attaccato un arco tra  $k$  e  $j$ , l'orientazione ha poca importanza. Estendendo a zero le radici  $\beta$  e  $\gamma$  si ottengono due radici, la somma  $\alpha = \beta + \gamma$  è ancora una radice immaginaria non isotropica poiché  $(\beta, \gamma) = -1$ . Inoltre chiamando  $\lambda = \lambda' + \lambda''$  (opportunamente estesi a zero) si ha  $\lambda \cdot \alpha = 0$ . Ovviamente  $\alpha \in F_\lambda$  e  $\beta$  è (-1)-vettore, quindi  $\alpha \notin \Sigma_\lambda$ . La radice è di tipo (II).

Fornisco un esempio concreto col seguente quiver:

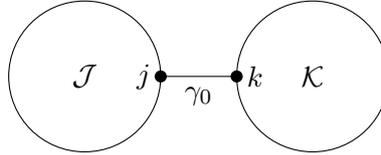
$$Q : 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} 2 \longrightarrow 3 \xrightarrow{\quad} 4 \curvearrowright$$

Scegliendo  $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\lambda' = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ -b \end{pmatrix}$  con  $a, b \in k$  si

ha l'esempio desiderato.

**Proposizione 2.31.** *Sia  $\alpha$  sincero,  $\beta$  divisore per  $(\alpha, \lambda)$  non sincero e  $\alpha - \beta$  non sincero, allora  $(\alpha, \lambda)$  è di tipo (II).*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{K} = \text{supp } \beta$  e  $\mathcal{J} = Q \setminus \mathcal{K}$ , se si avesse  $\mathcal{J} = \text{supp } \alpha - \beta$  si avrebbe la tesi. Dimostro che  $\beta$  e  $\alpha - \beta$  hanno supporti disgiunti: c'è almeno un arco  $\gamma_0$  che connette  $\mathcal{K}$  a  $\mathcal{J}$ . Chiamo l'estremo in  $\mathcal{J}$   $j$  e l'estremo in  $\mathcal{K}$   $k$ . Poiché  $(\beta, \epsilon_j) < 0$  e  $\alpha_j - \beta_j \neq 0$  allora si deve avere che il vertice  $j$  è il vertice critico ( $j = r$ ). Si ha quindi un unico arco tra  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{K}$  e  $\beta_k = \alpha_j = 1$ .

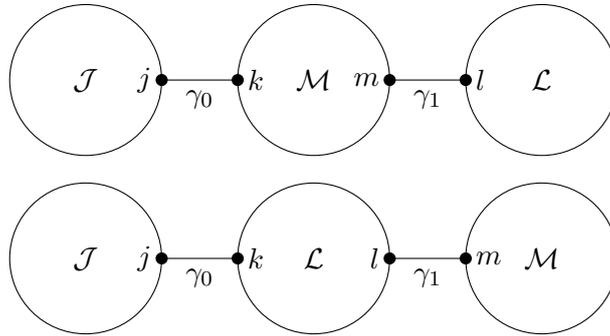


Vale che  $(\alpha - \beta, \epsilon_i) \leq 0$  (ovvio per  $i = j$ ) perché o  $(\beta, \epsilon_i) = 0$  o  $\alpha_i - \beta_i = 0$ .

$$-1 = (\alpha - \beta, \beta) = \sum_{i \neq j} \beta_i (\alpha - \beta, \epsilon_i)$$

Ogni termine è intero non positivo quindi esiste  $l$  tale che  $\beta_l = 1$ ,  $(\alpha - \beta, \epsilon_l) = -1$  e  $(\alpha - \beta, \epsilon_i) = 0$  per ogni  $i$  in  $\mathcal{K} \setminus \{l\}$ . Questo vertice è quasi un vertice critico per il  $(-1)$ -vettore  $\alpha - \beta$ .

Partiziono il quiver  $\mathcal{K}$  in base al supporto di  $\alpha - \beta$ :  $\mathcal{L} = \mathcal{M} \cap \text{supp}(\alpha - \beta)$  e  $\mathcal{M} = \mathcal{K} \setminus \mathcal{L}$ . Sia  $\gamma_1$  un arco che unisce  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{L}$  con estremi  $m \in \mathcal{M}$  e  $l' \in \mathcal{L}$ , questo arco esiste se e solo se  $\mathcal{M} \neq \emptyset$ . Un conto mostra che  $l = l'$  infatti  $(\alpha - \beta, \epsilon_{l'}) < 0$ ,  $\gamma_1$  è l'unico arco tra  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{L}$  e  $\alpha_m - \beta_m = 1$ .



Per il lemma 2.29  $\mathcal{M}$  non deve contenere sottografi euclidei, infatti  $r \notin \mathcal{M}$ , in particolare  $\mathcal{M}$  è dynkin e chiamo il relativo quiver  $Q'$ . Sia  $\gamma$  la restrizione di  $\alpha - \beta$  a  $Q'$ , il secondo caso non può occorrere perché si avrebbe

$(\gamma, \epsilon_i)_{Q'} = (\alpha - \beta, \epsilon_i)_Q + (\alpha - \beta)_l \delta_{i,m} = 0$  per ogni  $i$  in  $\mathcal{M}$ , cioè  $\gamma$  radice immaginaria.

Passando al primo caso e continuando a chiamare  $\beta$  la sua restrizione a  $Q'$  si ha:

$$\begin{aligned} (\beta, \epsilon_m)_{Q'} &= (\beta, \epsilon_m)_Q + \beta_l = 1 \\ (\gamma, \epsilon_k)_{Q'} &= (\gamma, \epsilon_k)_Q + \gamma_j = 1 \end{aligned}$$

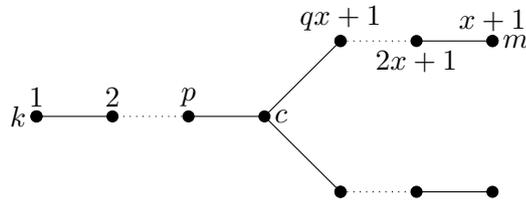
Inoltre  $\beta_k = \gamma_m = 1$ ,  $(\beta, \epsilon_i)_{Q'} = 0$  e  $(\gamma, \epsilon_j)_{Q'} = 0$  per ogni  $i, j \in \mathcal{M}$ ,  $i \neq m$  e  $j \neq k$ . Dimostro che non possono esistere due tali vettori e quindi  $\mathcal{M} = \emptyset$ . Escludo il caso  $k = m$  poiché  $(\beta, \beta) = \beta_m(\beta, \epsilon_m) = 1$  che non è pari. Sia  $\beta$  che  $\gamma$  sono fedeli quindi i vertici  $k$  e  $m$  devono avere esattamente un arco incidente. Divido in due casi:

$A_n$ : Si deve avere  $\beta$  come in figura.



L'assurdo è  $1 = (\beta, \epsilon_m) = 2n - n + 1 = n + 1$ .

$D_n, E_n$ : Sia  $p$  la lunghezza del braccio con estremo  $k$  e  $q$  di quello con estremo  $m$  e chiamo  $x + 1$  il valore di  $\beta$  in  $m$ . Per simmetria in  $\beta$  e  $\gamma$  posso supporre  $p \leq q$ .

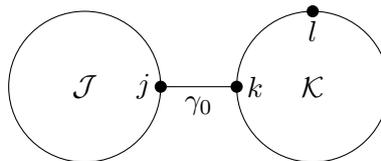


Calcolo  $\beta_c = p + 1 = (q + 1)x + 1$  da cui  $p = (q + 1)x$  contro l'ipotesi  $p > q$ .

□

**Proposizione 2.32.** *Se il divisore  $\beta$  non è sincero e  $\alpha - \beta$  è sincero allora  $(\alpha, \lambda)$  è di tipo (III).*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{K}$  il supporto di  $\beta$ , come prima si ha che il vertice critico è  $j$ :



Sia  $Q'$  la restrizione di  $Q$  a  $\mathcal{K}$  e per ogni  $i \in \mathcal{K}$   $(\beta, \epsilon_i)_{Q'} = 0$ .  $\mathcal{K}$  è connesso altrimenti sarebbe somma di  $\beta_1$  e  $\beta_2$  con  $(\beta_1, \beta_2) = 0$  da cui l'assurdo:

$$-1 = (\beta, \alpha - \beta) = (\beta_1, \alpha - \beta_1) + (\beta_2, \alpha - \beta_2) \leq -1 - 1 = -2$$

Per il corollario 1.21 si deve avere  $Q'$  euclideo e  $\beta = c\delta$  con  $c > 0$ . La condizione  $\beta_k = \beta_l = 1$  implica  $c = 1$  e per la stessa dimostrazione di 2.29 nel caso " $r \neq j$ " applicata a  $\zeta = \beta$  si ottiene  $l = k$ . Infine  $(\alpha - \beta, \epsilon_i)_{Q'} = 0$  per ogni  $i \in \mathcal{K} \setminus \{l\}$  e  $(\alpha - \beta, \epsilon_l)_{Q'} = (\alpha - \beta, \epsilon_l)_Q + (\alpha - \beta)_j = -1 + 1 = 0$ . Quindi anche  $\alpha - \beta$  ristretto a  $Q'$  è un multiplo di  $\delta$  e segue la tesi.  $\square$

*Dimostrazione teorema 2.30 di classificazione.* Sia  $(\alpha'', \lambda'')$  la coppia equivalente con  $\alpha'' \in F_{\lambda''}$ .

Se  $q(\alpha) = 0$  allora  $\alpha$  è nel radicale della forma simmetrica associata e quindi per il corollario 1.21 il supporto è euclideo e  $\alpha'' = k\delta$ , poiché  $\alpha'' \notin \Sigma_{\lambda''}$  si deve avere  $k > 1$ . Questo è il caso (I).

Altrimenti  $q(\alpha) < 0$  e quindi esiste un (-1)-vettore  $\beta'$  che sia anche divisore per  $(\alpha', \lambda')$  (coppia equivalente a  $(\alpha, \lambda)$ ). Se  $\beta'$  è sincero allora  $\alpha' - \beta'$  non è sincero e quindi esiste un divisore  $\tilde{\beta}$  con supporto contenuto in  $\text{supp } \alpha' - \beta'$ , quindi non sincero. Continuerò a chiamare il divisore non sincero  $\beta'$ , a seconda se  $\alpha' - \beta'$  è sincero o meno si applicano le proposizioni 2.31 e 2.32.  $\square$

## 2.7 Estendere un quiver euclideo

Sia  $Q'$  un quiver euclideo e  $k$  un vertice d'estensione,  $Q$  il quiver ottenuto aggiungendo un nuovo vertice  $j$  e un arco  $\gamma$  da  $j$  a  $k$ . Scelgo un  $\lambda \in k^n$  con  $\lambda_j = 0$  e se  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  chiamo  $\alpha'$  la restrizione a  $Q'$  ( $\alpha' = \alpha - \alpha_j \epsilon_j$ ). Si ha il seguente teorema:

**Teorema 2.33.** *Se  $\alpha \in \Sigma_\lambda$ ,  $\alpha_j = 1$  ed esiste un intero  $m$  con  $m\delta - \alpha' \in \mathbb{N}R_\lambda$  allora  $\alpha = \epsilon_j$ .*

Innanzitutto dimostro che una radice che soddisfa le condizioni del lemma deve essere reale. Il grosso problema nella dimostrazione del teorema è che l'associazione  $\alpha \mapsto \alpha'$  non è equivariante per il gruppo di Weyl perché non commuta con  $s_k$ .

**Lemma 2.34.** *Sia  $\alpha$  come da teorema 2.33, allora  $\alpha$  è radice reale e  $p(\alpha) = 0$ .*

*Dimostrazione.* Per la precisione dimostro che esiste una sequenza di riflessioni ammissibili in vertici diversi da  $j$  tale che la coppia  $(\alpha, \lambda)$  sia equivalente a  $(\epsilon_j, \nu)$ . Prendo la coppia equivalente  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\lambda})$  con  $\tilde{\alpha}$  minimale, come da soliti ragionamenti  $(\tilde{\alpha}, \epsilon_i) \leq 0$  per ogni  $i \neq j$ . Inoltre queste riflessioni lasciano  $\delta$  invariato e mantengono la condizione  $\tilde{\lambda} \cdot \delta = 0$  e  $\tilde{\alpha}_j = 1$ . Mi basta

dimostrare che la restrizione  $\tilde{\alpha}'$  è nulla. Si ha  $(\tilde{\alpha}', \epsilon_i) \leq 0$  per ogni  $i \neq k$  e  $(\tilde{\alpha}', \epsilon_k) = (\tilde{\alpha}, \epsilon_k) + \alpha_j \leq 1$ . Ci sono due casi:

$(\tilde{\alpha}', \epsilon_k) = 1$ : Si ha

$$0 = (\tilde{\alpha}', \delta) = \sum_{i \neq j} \delta_i(\tilde{\alpha}', \epsilon_i) = 1 + \sum_{i \neq j, k} \delta_i(\tilde{\alpha}', \epsilon_i)$$

L'ultima somma è di termini negativi quindi esiste un vertice di estensione  $r$  con  $(\tilde{\alpha}', \epsilon_i) = -1$ . Ho già dimostrato nella dimostrazione 2.29 che un tale vettore con  $r \neq k$  non può esistere.

$(\tilde{\alpha}', \epsilon_k) \leq 0$ : il supporto di  $\tilde{\alpha}'$  è euclideo quindi  $\alpha' = m\delta$ . Scopro che  $\tilde{\alpha} = \epsilon_j + m\delta$  e che:

$$\tilde{\lambda} \cdot \tilde{\epsilon}_j = \tilde{\lambda} \cdot \tilde{\alpha} - m\tilde{\lambda} \cdot \delta = \lambda \cdot \alpha = 0$$

Quindi  $\epsilon_j, \delta \in \mathbb{N}R_{\tilde{\lambda}}$  e la condizione  $\tilde{\alpha} \in \Sigma_{\tilde{\lambda}}$  si porta a:

$$p(\tilde{\alpha}) = -m(\epsilon_j, \delta) = m = p(\epsilon_j) + mp(\delta)$$

Questo è impossibile se  $m > 0$  quindi  $\tilde{\alpha}' = 0$ . □

Serve definire un ordinamento totale  $\prec$  su  $k$  (a caratteristica zero) tale che coincida con l'ordine classico sui naturali, rispetti la somma ed per ogni elemento del campo esiste un naturale maggiore di lui.

Chiamo  $Q''$  il grafo di Dynkin ottenuto da  $Q'$  togliendo il vertice d'estensione  $k$ .

**Lemma 2.35.** *Esiste una coppia  $(\beta, \nu)$  equivalente a  $(\alpha, \lambda)$  con  $\nu_i \succeq 0$  per ogni  $i \in Q''$ . Inoltre per ogni  $\gamma \in \mathbb{N}R_\nu$  con  $\gamma_j = 0$  allora esiste un intero  $r$  tale che  $\gamma_i = r\delta_i$  per ogni vertice con  $\nu_i \neq 0$*

*Dimostrazione.* Poiché  $Q''$  è Dynkin il gruppo generato dalle riflessioni nei vertici in  $Q''$  è finito. Sia  $k \in \mathbb{Z}^n$  tale che  $Ck > 0$ , una facile verifica sui grafi di Dynkin garantisce l'esistenza. I coniugati di  $\lambda$  per riflessioni ammissibili è un insieme finito e sia  $\nu$  tale che il prodotto scalare  $\lambda \cdot k$  sia massimo. Per massimalità  $(r_i\nu) \cdot k = \nu \cdot k - (Ck)\nu_i \preceq \nu \cdot k$  per ogni vertice  $i$  ammissibile quindi  $\nu_i \succeq 0$ , per i vertici non ammissibili si ha  $\nu_i = 0$ .

La seconda parte basta dimostrarlo per ogni elemento in  $\Sigma_\nu$ . Tutti gli elementi sono minori di  $\delta$  quindi a meno di cambiare  $\gamma$  con  $\delta - \gamma$  posso supporre  $\gamma_k = 0$ . La condizione  $\nu \cdot \gamma = 0$  implica  $\sum_{i \neq j, k} \gamma_i \nu_i = 0$ , in particolare tutti gli addendi sono nulli. La condizione  $\gamma_i \nu_i = 0$  impone la tesi. □

*Dimostrazione del teorema 2.33.* Se  $\lambda = 0$  allora  $\alpha$  si decompone in  $\sum_i \alpha_i \epsilon_i$ , siccome  $p(\alpha) = 0$  e  $p(\epsilon_i) \geq 0$  si avrebbe  $p(\alpha) \leq \sum_i \alpha_i p(\epsilon_i)$  contro l'ipotesi  $\alpha \in \Sigma_\lambda$ . Quindi suppongo  $\lambda \neq 0$  e rimpiazzo  $(\alpha, \lambda)$  con  $(\beta, \nu)$  del lemma sopra, si ha ancora  $\nu_j = 0$ . Anche la restrizione di  $\nu$  a  $Q''$  è non nulla

altrimenti si avrebbe anche  $0 = \nu \cdot \delta = \nu_k$  nullo e  $\nu$  costantemente zero contro l'ipotesi  $\lambda \neq 0$ . Le riflessioni applicate fin'ora sono in vertici diversi da  $j$  e  $k$ , quindi si ha  $s_i(\alpha') = (s_i\alpha)'$ , cioè le ipotesi del teorema valgono ancora per la coppia  $(\beta, \nu)$ . Inoltre  $(m\delta - \beta')_i = r\delta_i$  per ogni  $i \in Q'$  con  $\nu_i \neq 0$ . Calcolo  $(\beta' - (m-r)\delta, \gamma)$  al variare di  $i \neq j$  usando l'invarianza per riflessioni. Poiché  $\beta$  e  $\epsilon_j$  sono coniugati, per ogni  $\gamma \in \mathbb{N}R_\nu$  con  $\gamma_j = 0$  si ha  $(\beta, \gamma) \leq 0$

$$(\beta' - (m-r)\delta, \gamma) = (\beta - (m-r)\delta, \gamma) - (\epsilon_j, \gamma) = (\beta, \gamma) + \gamma_k \leq \gamma_k$$

Inoltre se  $\gamma \leq \delta$  si ha la stessa disuguaglianza cioè  $(\beta' - (m-r)\delta, \gamma) \geq \gamma_k - 1$ . Infine  $(\beta' - (m-r)\delta, \epsilon_i) \leq 0$  per ogni  $i$  con  $\nu_i \neq 0$ .

Dimostro che il vettore  $\xi = \beta' - (m-r)\delta$  è nullo. Si ha  $-1 \leq (\xi, \delta - \epsilon_k) = \sum_{i \neq j, k} \delta_i(\xi, \epsilon_i)$ , tutti gli addendi sono non positivi. Si ha  $(\xi, \epsilon_k) = 0$  per doppia disuguaglianza e uno degli addendi deve essere negativo (se  $\xi \neq 0$ ). Fisso il vertice  $\bar{i}$  tale che  $(\xi, \epsilon_{\bar{i}}) = -1$ , per il caso " $j \neq r$ " della dimostrazione del lemma 2.29 applicato a  $\zeta = -\xi$  un tale vettore non può esistere.

Infine  $\xi = 0$  implica  $\beta' = 0$  cioè  $\alpha' = 0$  e  $\alpha = \epsilon_j$ .  $\square$

## 2.8 Decomposizione canonica

Ricordo che per ogni  $\alpha$  esiste unico strato  $I(k, \beta)$  in  $\text{Rep}(Q, \alpha)$  denso.

**Definizione 2.36.** La decomposizione canonica di  $\alpha$  è l'unica scrittura  $\alpha = \sum_{i=1}^r m_i \sigma^i$  tale che  $I(m, \sigma)$  sia denso in  $\text{Rep}(Q, \alpha)$ .

Notare che condizione necessaria per cui  $I(m, \sigma)$  sia denso in  $\text{Rep}(Q, \alpha)$  è che  $I(1, \sigma^i)$  sia denso in  $\text{Rep}(Q, \sigma^i)$  per ogni indice  $i = 1, \dots, r$ . In altre parole le radici  $\sigma$  devono essere radici di Schur. Fa comodo introdurre la notazione  $p(\alpha) = 1 - q(\alpha)$  in modo tale che se su un vertice  $i$  ci sono  $n_{i,i}$  loop allora  $p(\epsilon_i) = n_{i,i}$ . Inoltre per il teorema di Kac 1.72  $p(\alpha)$  è la dimensione delle rappresentazioni indecomponibili di dimensione  $\alpha$ .

**Teorema 2.37.** Ogni elemento  $\alpha \in \mathbb{N}R_\lambda \setminus \{0\}$  ha una decomposizione canonica  $\alpha = \sum_i k_i \sigma_i$  tale che:

- Le radici  $\sigma_i \in \Sigma_\lambda$  e i  $k_i$  sono interi positivi.
- Ogni altra decomposizione in somma di elementi in  $\Sigma_\lambda$  è un raffinamento della decomposizione canonica.

**Lemma 2.38.** Diviso il grafo come in figura 1, sia  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  e suppongo  $\alpha_j = 1$ ,  $\lambda \cdot \alpha|_{\mathcal{K}} = \lambda \cdot \alpha|_{\mathcal{J}} = 0$ . Vale che:

$$\alpha \in \mathbb{N}R_\lambda \iff \alpha|_{\mathcal{J}} \in \mathbb{N}R_\lambda \text{ e } \epsilon_j + \alpha|_{\mathcal{K}} \in \mathbb{N}R_{\lambda|_{\mathcal{K}}}$$

Per il teorema 2.7 entrambe le condizioni sono equivalenti all'esistenza di un elemento in  $\mu_\alpha^{-1}(\lambda)$ .

*Dimostrazione.* Se  $\alpha \in \mathbb{N}R_\lambda$  allora esiste un modulo  $x \in \mu_\alpha^{-1}(\lambda)$ , la condizione  $\lambda \cdot \alpha|_{\mathcal{J}} = 0$  implica:

$$0 = \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{\substack{\gamma \in Q_1 \\ t(\gamma)=j}} \text{Tr } x_{\gamma^*} x_\gamma = \sum_{\gamma \in (Q|_{\mathcal{J}})_1} \text{Tr}(x_{\gamma^*} x_\gamma - x_\gamma x_{\gamma^*}) + \text{Tr } x_{\gamma_0} x_{\gamma_0^*}$$

Poiché  $\text{Tr } x_{\gamma_0} x_{\gamma_0^*} = 0$  e  $\alpha_j = 1$  si ha  $x_{\gamma_0} x_{\gamma_0^*} = 0$ . Chiamato  $Q'$  il quiver contenente tutte le frecce in  $\mathcal{K}$  e  $\gamma_0$ ,  $Q_{\mathcal{J}}$  quello contenente tutte le altre frecce, si ha  $x|_{\mathcal{J}} \in \mathbb{N}R_\lambda$ . Ovviamente si ha  $\lambda|_{\mathcal{K}} \cdot \epsilon_j = 0$  quindi  $x|_{Q'} \in \mathbb{N}R_{\lambda|_{\mathcal{K}}}$ . Decomponendo  $x|_{\mathcal{J}}$  e  $x|_{Q'}$  in indecomponibili si ottiene  $\alpha|_{\mathcal{J}} \in \mathbb{N}R_\lambda$  e  $\epsilon_j + \alpha|_{\mathcal{K}} \in \mathbb{N}R_{\lambda|_{\mathcal{K}}}$ .

Viceversa siano  $y \in \mu_{\alpha|_{\mathcal{J}}}^{-1}(\lambda|_{\mathcal{J}})$  e  $z \in \mu_{\epsilon_j + \alpha|_{\mathcal{K}}}^{-1}(\lambda|_{\mathcal{K}})$ . La rappresentazione di dimensione  $\alpha$  ottenuta unendo  $y$  e  $z$  è in  $\mu_\alpha^{-1}(\lambda)$  quindi  $\alpha \in R_\lambda$ .  $\square$

*Dimostrazione del teorema 2.37.* Sia  $j$  un vertice ammissibile per  $(\alpha, \lambda)$ ,  $\sum_i k_i \sigma_i$  è la decomposizione canonica di  $\alpha$  se e solo se  $\sum_i k_i s_j \sigma_i$  è la decomposizione canonica di  $s_j \alpha$  rispetto a  $r_j \lambda$ . Dimostro la tesi per induzione sulla lunghezza della più lunga decomposizione di  $\alpha$  in elementi di  $\Sigma_\lambda$ .

Per ogni  $\alpha \in \mathbb{N}R_\lambda$  o esiste una coppia equivalente e un vertice  $j$  senza loop con  $\lambda'_j = 0$  e  $(\alpha', \epsilon_j) > 0$  oppure una coppia equivalente con  $\alpha' \in F_\lambda$  (dimostrato nel primo passo di 2.21).

Nel primo caso ogni decomposizione di  $\alpha$  in  $\sum_i \beta^i$  deve avere almeno un termine con  $(\beta^i, \epsilon_j) > 0$ . La condizione  $\beta^i \in \Sigma_\lambda$  implica  $-2 \geq (\epsilon_j, \beta^i - \epsilon_j) = (\beta^i, \epsilon_j) - 2$  se  $\beta^i \neq \epsilon_j$ . Per ipotesi  $(\beta^i, \epsilon_j) > 0$  quindi  $\beta^i = \epsilon_j$ . La decomposizione canonica di  $\alpha$  è data dalla decomposizione canonica di  $\alpha - \epsilon_j$  unita a  $\epsilon_j$ .

Nel secondo caso  $\alpha$  appartiene a  $F_\lambda$ , se  $\alpha \in \Sigma_\lambda$  la decomposizione canonica di  $\alpha$  è  $\alpha$  stesso. Altrimenti per  $\alpha \in F_\lambda \setminus \Sigma_\lambda$  si hanno i tre casi del teorema 2.30 di classificazione.

I Sia  $Q$  euclideo e  $\alpha = m\delta$ , tutti gli elementi indecomponibili di  $\mathbb{N}R_\lambda$  sono minori o uguali a  $\delta$ . Inoltre ogni decomposizione di  $m\delta$  in elementi di  $\Sigma_\lambda$  è un raffinamento di

$$m\delta = \underbrace{\delta + \delta + \cdots + \delta}_m$$

Infine  $\delta \in \Sigma_\lambda$  implica che questa è la decomposizione canonica di  $m\delta$ .

II Con la notazione del teorema se  $\alpha$  si decompone come somma di elementi in  $\Sigma_\lambda$  allora tutti gli addendi sono contenuti in  $\mathcal{K}$  o in  $\mathcal{J}$ . Dimostro per assurdo che tutti gli addendi appartengono o a  $\mathcal{K}$  o a  $\mathcal{J}$ . Se esiste  $\beta$

con  $\text{supp } \beta \not\subseteq \mathcal{K}$  e  $\text{supp } \beta \not\subseteq \mathcal{J}$  allora  $\beta_j = \beta_k = 1$ . Tutti gli altri addendi hanno supporto connesso e quindi contenuto in  $\mathcal{K}$  o in  $\mathcal{J}$ , in particolare dato che  $\lambda \cdot \alpha_{|\mathcal{K}} = 0$  si ha  $\lambda \cdot \beta_{|\mathcal{K}} = 0$ . Infine  $\beta_{|\mathcal{K}}, \beta_{|\mathcal{J}} \in \mathbb{N} R_\lambda$  applicando due volte il lemma 2.38 e  $(\beta_{|\mathcal{K}}, \beta_{|\mathcal{J}}) = -1$ . Si ha  $p(\beta) = p(\beta_{|\mathcal{K}}) + p(\beta_{|\mathcal{J}})$  contro l'ipotesi  $\beta \in \Sigma_\lambda$ .

Ogni addendo di ogni decomposizione ha supporto contenuto in una delle due parti quindi la decomposizione canonica di  $\alpha$  è la somma delle decomposizioni canoniche di  $\alpha_{|\mathcal{K}}$  e di  $\alpha_{|\mathcal{J}}$ .

III Sia  $\beta \in \Sigma_\lambda$  un qualsiasi elemento di una decomposizione di  $\alpha$ , mostro per assurdo che il suo supporto è in  $\mathcal{K}$  o in  $\mathcal{J}$ . La conclusione seguirebbe facilmente unendo le decomposizioni canoniche di  $\alpha_{|\mathcal{K}}$  e di  $\alpha_{|\mathcal{J}}$ . Posso supporre il supporto di  $\beta$  connesso quindi  $\beta_j = 1$ , tutti gli altri fattori della decomposizione hanno supporto contenuto in  $\mathcal{J}$  o in  $\mathcal{K}$ ; in conclusione  $\lambda \cdot \beta_{|\mathcal{K}} = 0$  e  $\lambda \cdot \beta_{|\mathcal{J}} = 0$ . Per il lemma 2.38  $\beta_{|\mathcal{J}} \in \mathbb{N} R_\lambda$  e  $\epsilon_j + \beta_{|\mathcal{K}} \in \mathbb{N} R_{\lambda_{|\mathcal{K}}}$  inoltre  $m\delta - \beta_{|\mathcal{K}} \in \mathbb{N} R_\lambda$  perché è somma dei fattori con supporto contenuto in  $\mathcal{K}$ . Per il teorema 2.33 ogni decomposizione di  $\epsilon_j + \beta_{|\mathcal{K}}$  deve avere un fattore  $\epsilon_j$ , in particolare  $\epsilon_j + \beta_{|\mathcal{K}} \notin \Sigma_\lambda$ . Usando la caratterizzazione 2.22 esiste  $\gamma \in \mathbb{N} R_\lambda$  con  $\gamma_j = 0$  e  $(\gamma, \epsilon_j + \beta_{|\mathcal{K}} - \gamma) \geq -1$ . Anche  $(\gamma, \beta - \gamma) \geq -1$  contro l'ipotesi  $\beta \in \Sigma_\lambda$ .

□

## 2.9 Decomposizione della varietà quiver

Questa sezione è dedicata a dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 2.39.** *Sia  $\sum_i k_i \sigma_i$  la decomposizione canonica di  $\alpha$ , la varietà quiver di  $\alpha$  è isomorfa a:*

$$\mathfrak{M}_0(\alpha, \lambda) \simeq \prod_{p(\sigma^i)=1} S^{k_i} \mathfrak{M}_0(\sigma_i, \lambda) \times \prod_{p(\sigma^i)>1} \mathfrak{M}_0(\sigma_i, \lambda)$$

Dove con  $S^k X$  si intende il prodotto simmetrico di  $k$  copie di  $X$  ( $S^k X = X^k // S_k$ ).

Il teorema fornisce una decomposizione della varietà quiver come prodotto di altre varietà quiver. Osservare che per le radici reali la varietà quiver è un punto, quindi nella decomposizione vengono ignorate, la radici isotrope compaiono nella prima produttoria. Quelle non isotrope compaiono con molteplicità uno perché  $\Sigma_\lambda \cap \{\alpha \mid p(\alpha) > 1\}$  è un cono.

L'algebra  $k[\text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)]$  ha come base:

$$k[\text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)] = k[\{x_{\gamma, i, j} \mid \substack{\gamma \in \overline{Q}_1 \\ 1 \leq i \leq h(\gamma) \\ 1 \leq j \leq t(\gamma)}\}]$$

Dove  $x_{\gamma,i,j}$  è la funzione che associa a una rappresentazione l'entrata  $(i, j)$  della matrice associata a  $\gamma$ . Dato un cammino chiuso  $p = \gamma_n \gamma_{n-1} \cdot \gamma_1$  la funzione  $\text{Tr}_p : \text{Rep}(Q, \alpha) \rightarrow k$  associa a una rappresentazione  $X$  la traccia della matrice  $X_{\gamma_n} X_{\gamma_{n-1}} \cdot X_{\gamma_1}$ . La funzione  $\text{Tr}_p$  è polinomiale nelle funzioni  $x_{\gamma,i,j}$ , quindi si ha l'inclusione  $k[\{\text{Tr}_p\}] \subseteq k[\{x_{\gamma,i,j}\}]$ .

Per le dimostrazioni è utile il seguente teorema che non dimostro, la dimostrazione si trova in [Le Bru].

**Teorema 2.40** (First Fundamental Theorem). *L'anello degli invarianti  $k[\text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)]^{G(\alpha)}$  è generato dalle funzioni  $\text{Tr}_p$  al variare di  $p$  tra i cammini chiusi su  $Q$  di lunghezza almeno uno. Inoltre per generare basta prendere in considerazione solo i cammini di lunghezza minore o uguale a  $(\sum_i \alpha_i)^2$ .*

Le funzioni  $\text{Tr}_p$  soddisfano delle relazioni in  $k[\text{Rep}(Q, \alpha)]$ , esse sono date dall'annullamento del polinomio caratteristico di  $X_{\gamma_n} X_{\gamma_{n-1}} \cdot X_{\gamma_1}$ . Per la precisione i coefficienti del polinomio caratteristico sono esprimibili in funzione della traccia delle potenze della matrice. Denoto con  $\chi_A(t)$  il polinomio caratteristico di  $A$ , esso è della forma:

$$\chi_A(t) = \sum_i q_i(\text{Tr}_p, \text{Tr}_{pp}, \dots, \text{Tr}_{p^n})(A)t^i$$

La condizione  $\chi_A(A) = 0$  fornisce  $\alpha_{h(p)}^2$  relazioni tra le funzioni  $\text{Tr}_{p^i}$  e  $x_{\gamma,i,j}$ . Per completezza enuncio il secondo teorema sugli invarianti, esso però non sarà utilizzato.

**Teorema 2.41** (Second Fundamental Theorem). *Le uniche relazioni tra i generatori  $\{\text{Tr}_p\}$  al variare dei cammini chiusi  $p$  sono tutte e sole quelle fornite da  $\chi_A(A) = 0$  in  $k[\{x_{\gamma,i,j}\}]$ .*

**Lemma 2.42.** *Sia  $i$  un vertice con  $\lambda_i = 0$  e  $(\alpha, \epsilon_i) > 0$  allora*

$$\mathfrak{M}_0(\alpha, \lambda) \simeq \mathfrak{M}_0(\alpha - \epsilon_i, \lambda)$$

*Dimostrazione.* La decomposizione canonica di  $\alpha$  ha un termine uguale a  $\epsilon_i$ , quindi ogni decomposizione di una rappresentazione in indecomponibili contiene un addendo di dimensione  $\epsilon_i$  quindi semplice. La mappa  $\mu_{\alpha - \epsilon_i}^{-1}(\lambda) \hookrightarrow \mu_{\alpha}^{-1}(\lambda)$  induce una corrispondenza biunivoca tra le varietà  $\Theta : \mathfrak{M}_0(\alpha - \epsilon_i, \lambda) \rightarrow \mathfrak{M}_0(\alpha, \lambda)$ . Per dimostrare che è un isomorfismo basta dimostrare che è un'immersione chiusa, cioè che la mappa  $\Theta^* : k[\mu_{\alpha}^{-1}(\lambda)]^{G(\alpha)} \rightarrow k[\mu_{\alpha - \epsilon_i}^{-1}(\lambda)]^{G(\alpha - \epsilon_i)}$  è suriettiva. Per ogni cammino  $p$  le tracce relative ad  $\alpha$  e  $\alpha - \epsilon_i$  coincidono quindi la mappa  $\Theta^*$  è suriettiva.  $\square$

**Lemma 2.43.** *Sia  $Q$  un quiver euclideo, la somma diretta di rappresentazioni  $\prod_{i=1}^m \mu_{\delta}^{-1}(\lambda) \rightarrow \mu_{m\delta}^{-1}(\lambda)$  induce un isomorfismo tra le varietà:*

$$S^m \mathfrak{M}_0(\delta, \lambda) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_0(m\delta, \lambda)$$

*Dimostrazione.* Per la decomposizione canonica, ogni rappresentazione si spezza in indecomponibili che possono essere raggruppati a formare sottorappresentazioni di dimensione  $\delta$ . In particolare la mappa indotta da  $\prod_{i=1}^m \mu_\delta^{-1}(\lambda) \rightarrow \mu_{m\delta}^{-1}(\lambda)$  induce una mappa  $f : S^m \mathfrak{M}_0(\delta, \lambda) \rightarrow \mathfrak{M}_0(m\delta, \lambda)$  suriettiva. Basta dimostrare che è un'immersione chiusa, cioè che la mappa

$$f^* : k[\mu_{m\delta}^{-1}(\lambda)]^{G(m\delta)} \longrightarrow \left( T^m k[\mu_\delta^{-1}(\lambda)]^{G(\delta)} \right)^{S^m}$$

è suriettiva (con  $T^m A$  indico la  $m$ -esima potenza tensoriale).

I cammini che partono e arrivano in un vertice  $k$  di estensione sono sufficienti a generare  $k[\mu_\delta^{-1}(\lambda)]$ . Questo risultato si trova nell'articolo [CB1998], mettendo insieme i teoremi 0.1 e 0.2 oppure per il corollario 8.11: in particolare, chiamato  $I$  l'ideale generato dalle relazioni  $\mu_\delta(x) = \lambda$ , si ha l'isomorfismo:

$$e_k \left( A(\overline{Q})/I \right) e_k \xrightarrow{\sim} k[\mu_\delta^{-1}(\lambda)]^{G(\delta)}$$

Avendo  $\delta_k = 1$  non è necessario prendere la traccia, ma basta semplicemente la matrice  $1 \times 1$  ottenuta componendo quelle lungo il cammino  $p$ .

Siano  $y_{p,i}$  indeterminate al variare di  $p$  tra i cammini chiusi con estremi in  $k$  e  $1 \leq i \leq m$ , si ha il morfismo suriettivo  $k[\{y_{p,i}\}] \rightarrow T^m k[\mu_\delta^{-1}(\lambda)]^{G(\delta)}$  dato da  $y_{p,i} \mapsto \text{Tr}_p \circ \pi_i$ . Esso induce una suriezione

$$k[\{y_{p,i}\}]^{S^m} \rightarrow \left( T^m k[\mu_\delta^{-1}(\lambda)]^{G(\delta)} \right)^{S^m}$$

Al variare dei naturali  $r_p$  gli elementi  $\sum_i \prod_p (y_{p,i})^{r_p}$  sono una base delle funzioni simmetriche. L'anello  $\left( T^m k[\mu_\delta^{-1}(\lambda)]^{G(\delta)} \right)^{S^m}$  è generato dalle funzioni  $\sum_i \left( \prod_p (\text{Tr}_p)^{r_p} \right) \pi_i$ . Dato che  $\delta_k = 1$  si ha la formula, altrimenti falsa,  $\text{Tr}_p \text{Tr}_q = \text{Tr}_{pq}$  e  $\sum_i \text{Tr}_{p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_N^{r_N}} \pi_i$  generano. Rimane solo da osservare che  $f^*(\text{Tr}_p) = \sum_i \text{Tr}_p \pi_i$  da cui la suriettività.  $\square$

**Lemma 2.44.** *Sia  $Q$  un quiver e  $Q_0 = \mathcal{K} \sqcup \mathcal{J}$  una partizione dei vertici. Se ogni fattore di ogni decomposizione di  $\alpha$  ha supporto contenuto in  $\mathcal{K}$  o in  $\mathcal{J}$  allora sono isomorfe:*

$$\mathfrak{M}_0(\alpha, \lambda) \simeq \mathfrak{M}_0(\alpha|_{\mathcal{K}}, \lambda) \times \mathfrak{M}_0(\alpha|_{\mathcal{J}}, \lambda)$$

*Dimostrazione.* L'inclusione di  $\mu_{\alpha|_{\mathcal{K}}}^{-1}(\lambda) \times \mu_{\alpha|_{\mathcal{J}}}^{-1}(\lambda) \hookrightarrow \mu_\alpha^{-1}(\lambda)$  induce un'immersione chiusa  $\mathfrak{M}_0(\alpha|_{\mathcal{K}}, \lambda) \times \mathfrak{M}_0(\alpha|_{\mathcal{J}}, \lambda) \rightarrow \mathfrak{M}_0(\alpha, \lambda)$ . Essa è suriettiva per ipotesi, quindi è un isomorfismo.  $\square$

La dimostrazione ricalca completamente la struttura della dimostrazione del teorema 2.37.

*Dimostrazione.* Dimostro la tesi per induzione sulla lunghezza della decomposizione canonica. Per la proposizione 2.16 se  $i$  è ammissibile per  $(\alpha, \lambda)$  le varietà quiver  $\mathfrak{M}(\alpha, \lambda)$  e  $\mathfrak{M}(s_i\alpha, r_i\lambda)$  sono isomorfe. A meno di passare a coppie equivalenti posso supporre  $\alpha \in F_\lambda$  o che esiste un vertice  $i$  con  $\lambda_i = 0$  e  $(\alpha, \epsilon_i) > 0$ . Nel secondo caso il lemma 2.42 permette di ricondursi a una radice  $\alpha - \epsilon_i$  con una decomposizione canonica di lunghezza inferiore. Nel primo caso se  $\alpha$  appartiene a  $\Sigma_\lambda$  non c'è niente da dire in quanto  $\alpha$  è la decomposizione canonica. Se  $\alpha \in F_\lambda \setminus \Sigma_\lambda$  il teorema 2.30 di classificazione permette di distinguere tre casi.

I Sia  $Q$  euclideo e  $\alpha = m\delta$ , siamo nelle ipotesi del lemma 2.43 e esso fornisce la decomposizione voluta.

II e III In entrambi i casi ogni fattore della decomposizione ha supporto contenuto in  $\mathcal{K}$  o in  $\mathcal{J}$ . Il lemma 2.44 porta alla conclusione.

□

## 2.10 Morfismi étale locali

Per questo paragrafo  $x \in \mu_\alpha^{-1}(\lambda)$  sarà un punto con orbita chiusa, cioè una rappresentazione semisemplice. Il suo stabilizzatore verrà chiamato  $G_x$  e l'algebra di Lie relativa con  $\text{End}(\alpha)_x = \{\theta \in \text{End}(\alpha) \mid [\theta, x] = 0\}$ , osservo che  $G_x$  è un gruppo riduttivo e l'algebra  $\text{End}(\alpha)_x$  è  $G_x$ -stabile. Esiste un ortogonale di  $\text{End}(\alpha)$   $G_x$ -stabile che denoterò con  $L$ .

$$\text{End}(\alpha) = \text{End}(\alpha)_x \oplus L$$

Si ha la successione esatta corta:

$$0 \rightarrow \text{End}(\alpha)_x \rightarrow \text{End}(\alpha) \xrightarrow{[\cdot, x]} \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$$

Chiamo  $B$  l'immagine dell'ultima mappa, essa è  $G_x$  equivariante quindi ha un complementare  $C$   $G_x$ -invariante. Sia  $B^\perp$  l'ortogonale di  $B$  rispetto la forma  $\omega$  e chiamo  $D$  l'intersezione  $B^\perp \cap C$ , essa è  $G_x$  stabile.

$$\text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) = B \oplus C \tag{2.6}$$

**Lemma 2.45.** *Si hanno le proprietà:*

1. vale il contenimento  $B \subseteq B^\perp$ .
2. si ha la decomposizione  $B^\perp = B \oplus D$ .
3. la forma  $\omega$  ristretta a  $D$  è non degenera.
4. vale la formula sulle dimensioni  $\dim D = \dim C - \dim L$ .

5. si ha la decomposizione  $C = C^\perp \oplus D$ .
6. vale infine  $D^\perp = B \oplus C^\perp$ .

*Dimostrazione.*

1. Per ogni  $a$  e  $b \in \text{End}(\alpha)$  si ha:

$$\begin{aligned}
 \omega([a, x], [b, x]) &= \omega(ax, bx) + \omega(xa, xb) - \omega(xa, bx) - \omega(ax, xb) = \\
 &= \underbrace{\omega(axb, x) + \omega(x, axb)}_{=0} - \omega(x, abx) + \omega(x, bax) \\
 &= \omega(abx, x) - \omega(bax, x) = \eta(ab - ba, \mu_\alpha(x)) \\
 &= \eta(ab - ba, \lambda) = \sum_i \lambda_i \text{Tr}([a, b]_i) = 0
 \end{aligned}$$

da cui  $B \subseteq B^\perp$ .

2. Ovvio da  $B^\perp = B^\perp \cap (B \oplus C) = B \oplus D$ .
3. Dalla decomposizione 2.6 e dal fatto che  $\omega$  è non degenerare si ottiene che  $\text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) = B^\perp \oplus C^\perp = B \oplus D \oplus C^\perp$ . Fisso  $y$  in  $D$  e poiché  $\omega$  è non degenerare esiste un elemento  $b + d + c$  con  $b \in B$ ,  $d \in D$  e  $c \in C^\perp$  tale che  $0 \neq \omega(y, b + d + c) = \omega(y, d)$ . Quindi  $d$  garantisce che la forma  $\omega|_D$  sia non degenerare.
4. La mappa  $[\cdot, x]$  è un isomorfismo tra  $L$  e  $B$ , quindi  $\dim B = \dim L$ . Inoltre  $B^\perp + C = \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$  e  $\dim \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) = \dim B + \dim B^\perp$ , si ha:
 
$$\dim D = \dim B^\perp + \dim C - \dim M = \dim C - \dim B = \dim C - \dim L$$
5. Prima si osserva che l'inclusione  $B \subseteq B^\perp$  implica  $C \supseteq C^\perp$ , poi si ha  $C = C \cap (C^\perp \oplus B^\perp) = C^\perp \oplus D$ .
6. È ovvio che  $D \subseteq C$  quindi  $D^\perp \supseteq C^\perp$  e  $D^\perp \supseteq B$ . Inoltre  $B \cap C^\perp = 0$  quindi per dimensione si ha  $D^\perp = B \oplus C^\perp$ .

□

Dal lemma discende la decomposizione:

$$\text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) = B \oplus \underbrace{D \oplus C^\perp}_C$$

Chiamo  $\pi_L$  è la proiezione da  $\text{End}(\alpha)$  su  $L$  e  $\pi_x$  la proiezione su  $\text{End}(\alpha)_x$ . Fissati  $x$  come sopra e  $y$  in  $C$ ,  $\theta \in \text{End}(\alpha)_x$  e  $\zeta \in L$  voglio calcolare  $\eta(\theta +$

$\zeta, \mu_\alpha(x+y)$ ). In particolare lo voglio scrivere in funzione di  $\eta(\theta + \zeta, \mu_\alpha(x))$  e di  $\eta(\theta, \pi_x \mu_\alpha(y))$ . Per far ciò serve prima definire:

$$\begin{aligned} \nu_x: \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) &\longrightarrow L \subset \text{End}(\alpha) \\ y &\longmapsto \pi_L(\mu(y) + d\mu_{\alpha,x}(y)) \end{aligned}$$

Usando il corollario 2.3 si ottiene:

$$\begin{aligned} \eta(\theta + \zeta, \mu(x+y)) &= \omega((\theta + \zeta)(x+y), x+y) = \\ &= \omega((\theta, \zeta)x, x) + \omega(\theta y, y) + \omega(\theta x, y) + \omega(\theta y, x) + \omega(\zeta(x+y), y) + \omega(\zeta y, x) \end{aligned}$$

Gli addendi  $\omega(\theta x, y) + \omega(\theta y, x) = \omega(\theta x, y) - \omega(x\theta, y)$  non contribuiscono perché per ipotesi  $[\theta, x] = 0$ . Inoltre gli addendi  $\omega(\zeta(x+y), y) + \omega(\zeta y, x)$  coincidono con  $\eta(\zeta, \nu_x(y))$ . Si ha

$$\eta(\theta + \zeta, \mu_\alpha(x+y)) = \eta(\theta + \zeta, \mu_\alpha(x)) + \eta(\theta, \pi_x \mu_\alpha(y)) + \eta(\zeta, \nu_x(y)) \quad (2.7)$$

Questa scrittura mette in evidenza le parti di  $\mu_\alpha(x+y) - \mu_\alpha(x)$  ortogonali a  $\text{End}(\alpha)_x$  e a  $L$ .

**Lemma 2.46.** *Per ogni  $\theta \in \text{End}(\alpha)_x$  e  $y \in B$  si ha:*

$$\eta(\theta, \mu_\alpha(y)) = 0$$

*Dimostrazione.* Esiste  $\zeta \in \text{End}(\alpha)$  tale che  $y = [\zeta, x]$ .

$$\begin{aligned} \eta(\theta, \mu_\alpha([\zeta, x])) &= \frac{1}{2}\omega([\theta, [\zeta, x]], [\zeta, x]) = \\ &= \frac{1}{2}\omega([\theta, \zeta], x, [\zeta, x]) + \frac{1}{2}\omega([\zeta, [\theta, x]], [\zeta, x]) \end{aligned}$$

Il primo addendo è nullo perché  $B$  è isotropo e il secondo perché  $[\theta, x] = 0$ .  $\square$

**Lemma 2.47.** *Il differenziale di  $\nu_x$  in zero è*

$$d(\nu_x)_0 = (d\mu_{\alpha,x})|_C$$

*Inoltre il tangente a  $\nu^{-1}(0)$  è  $D$  e  $0 \in \nu^{-1}(0)$  è un punto liscio.*

*Dimostrazione.* Poiché  $d\mu_0(y) = 0$  e  $d\mu_{\alpha,x}$  è lineare si ha  $d(\nu_x)_0 = (d\mu_{\alpha,x})|_C$ . Il nucleo è  $\text{Ker } d\mu_{\alpha,x} \cap C = B^\perp \cap C = D$  e la liscenza segue dalla suriettività del differenziale che segue dalla formula delle dimensioni 4 del lemma 2.45.  $\square$

Chiamo  $\pi_x \circ \mu_\alpha$  con  $\mu_\alpha^x$  e la restrizione a  $D$  la chiamo  $\hat{\mu}_\alpha$ .

**Lemma 2.48.** *La mappa  $y \mapsto x + y$  da  $C$  in  $\text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$  si restringe a  $(\mu_\alpha^x)^{-1}(0) \cap \nu_x^{-1}(0)$  in  $\mu_\alpha^{-1}(\lambda)$ . Essa è  $G_x$  equivariante e suriettiva.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione è ovvia dalla formula 2.7 che diventa  $\eta(\theta + \zeta, \mu_\alpha(x + y)) = \eta(\theta + \zeta, \mu_\alpha(x))$  e implica  $\mu_\alpha(x + y) = \mu_\alpha(x) = \lambda$ . Sia  $y \in \mu_\alpha^{-1}(\lambda)$ , per mostrare la suriettività si usa sempre la formula al variare di  $\theta$  e  $\zeta$  e si deduce  $\mu_\alpha^x(y) = 0$  e  $\nu_x(y) = 0$ .  $\square$

In altre parole il lemma dice che il diagramma è cartesiano:

$$\begin{array}{ccc} (\mu_\alpha^x)^{-1}(0) \cap \nu_x^{-1}(0) & \longrightarrow & \mu_\alpha^{-1}(\lambda) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ C & \longrightarrow & \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) \end{array}$$

Ricordo un noto teorema di Luna dimostrato nell'articolo [Luna].

**Teorema 2.49** (Luna's slice theorem). *Sia  $G$  un gruppo riduttivo che agisce su una varietà affine  $X$ , sia  $x \in X$  un punto con orbita  $Gx$  chiusa. Allora esiste una sottovarietà  $V$  di  $X$  localmente chiusa tale che:*

1.  $V$  è affine e contiene  $x$ .
2.  $V$  è invariante per lo stabilizzatore di  $x$  ( $G_x$ ).
3. L'immagine della mappa  $G$ -equivariante  $\psi : G \times_{G_x} V \rightarrow X$  è un aperto  $U$   $G$ -invariante.
4. La mappa  $\psi : G \times_{G_x} V \rightarrow U$  è étale.
5. La mappa  $\psi/G : V // G_x \xrightarrow{\cong} (G \times_{G_x} V) // G \rightarrow U // G$  è étale.
6. Il seguente diagramma è cartesiano:

$$\begin{array}{ccc} G \times_{G_x} V & \xrightarrow{\psi} & U \\ \downarrow \varphi & \square & \downarrow \pi \\ V // G_x & \xrightarrow{\psi/G} & U // G \end{array}$$

Vorrei applicare il teorema a  $V = (\mu_\alpha^x)^{-1}(0) \cap \nu_x^{-1}(0)$  e a  $U = \mu_\alpha^{-1}(\lambda)$ , con la mappa  $y \mapsto x + y$ . Purtroppo il teorema fornisce solo l'esistenza della sottovarietà  $V$  quindi ripercorrerò la dimostrazione del teorema per mostrare che  $V$  può essere scelto come  $(\mu_\alpha^x)^{-1}(0) \cap \nu_x^{-1}(0)$ . La parte del teorema che servirà è il punto 5.

**Teorema 2.50.** *La mappa  $(\mu_\alpha^x)^{-1}(0) \cap \nu_x^{-1}(0) // G_x \rightarrow \mathfrak{M}_0(\alpha, \lambda)$  è étale nell'origine.*

*Dimostrazione.* Prendo in considerazione il diagramma

$$\begin{array}{ccc} G \times C & \longrightarrow & \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) \\ \downarrow & \nearrow & \\ G \times_{G_x} C & & \end{array}$$

Dove la mappa in alto è data da  $(g, y) \mapsto g(x + y)$  e  $G \times_{G_x} C$  è il quoziente di  $G \times C$  per l'azione di  $G_x$ . Il differenziale della mappa in alto nell'origine è suriettivo perché  $\text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) = B \oplus C$ . Le dimensioni di  $\text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$  e  $G \times_{G_x} C$  coincidono, infatti:

$$\begin{aligned} \dim \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) &= \dim B + \dim C = \underbrace{\dim \text{End}(\alpha) - \dim \text{End}(\alpha)_x}_{=\dim L} + \dim C \\ &= \dim G - \dim G_x + \dim C \end{aligned}$$

Segue immediatamente che la mappa  $\phi : G \times_{G_x} C \rightarrow \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$  è étale in  $(\text{Id}, 0)$  (vedi corollario 3.27 [Liu, p 141]). La varietà  $\text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$  è normale in 0 quindi si può applicare il lemma fondamentale dell'articolo [Luna, p 94]. In particolare la mappa  $\phi/G : C // G_x \simeq (G \times_{G_x} C) // G \rightarrow \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) // G$  è étale in  $(\text{Id}, 0)$ . Per il lemma 2.48 passato al quoziente per  $G$  si ottiene che il seguente diagramma è cartesiano:

$$\begin{array}{ccc} (\mu_\alpha^x)^{-1}(0) \cap \nu_x^{-1}(0) // G_x & \longrightarrow & \mathfrak{M}_0(\alpha, \lambda) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ C // G_x & \longrightarrow & \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) // G \end{array}$$

Per la proposizione 3.22 del libro [Liu, p 140], il base change di morfismi étale è étale, da cui la tesi.  $\square$

Sia  $\pi : C \rightarrow D$  la mappa di proiezione.

**Lemma 2.51.** *Sia  $y \in C \cap (\mu_\alpha^x)^{-1}(0)$  allora:*

$$y \in D \iff y \in \nu_x^{-1}(0)$$

*Inoltre il diagramma è cartesiano:*

$$\begin{array}{ccc}
(\mu_\alpha^x)^{-1}(0) \cap \nu_x^{-1}(0) & \longrightarrow & \hat{\mu}_\alpha^{-1}(0) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\nu_x^{-1}(0) & \xrightarrow{\pi|_{\nu_x^{-1}(0)}} & D
\end{array}$$

*Dimostrazione.* Dato che  $\mu_\alpha^x(y) = 0$  si ha per ogni  $\theta \in L$ :

$$\eta(\theta, \nu_x(y)) = \eta(\theta, d\mu_{\alpha,x}(y)) = \omega([\theta, x], y)$$

quindi

$$\nu_x(y) = 0 \Leftrightarrow y \in B^\perp \Leftarrow y \in D$$

Per la seconda parte basta notare che  $\hat{\mu}(y) = 0$  se e solo se  $\mu_\alpha^x(y) = 0$  e  $y \in D$ .  $\square$

**Teorema 2.52.** *Il morfismo  $\pi$  induce una mappa  $(\mu_\alpha^x)^{-1}(0) \cap \nu_x^{-1}(0) // G_x \rightarrow \hat{\mu}_\alpha^{-1}(0) // G_x$  étale nell'origine.*

*Dimostrazione.* La mappa  $\pi|_{\nu_x^{-1}(0)}$  è étale in 0 perché tra varietà lisce della stessa dimensione ( $\dim \nu_x^{-1}(0)$ ) e con differenziale da  $T_0 \nu_x^{-1}(0) = D$  in  $D$  che coincide con l'identità.  $D$  è normale nell'origine, per il lemma 3 di [Luna, p 93] la mappa  $\pi/G_x : \nu_x^{-1}(0) // G_x \rightarrow D // G_x$  è étale nell'origine. Infine il diagramma cartesiano 2.51 passa al quoziente per  $G_x$ :

$$\begin{array}{ccc}
(\mu_\alpha^x)^{-1}(0) \cap \nu_x^{-1}(0) // G_x & \longrightarrow & \hat{\mu}_\alpha^{-1}(0) // G_x \\
\downarrow & & \downarrow \\
\nu_x^{-1}(0) // G_x & \xrightarrow{\pi/G_x} & D // G_x
\end{array}$$

Il base change di mappe étale è étale e segue banalmente la tesi.  $\square$

## 2.11 Un nuovo quiver

In questa sezione si vuole descrivere la mappa  $\hat{\mu}$  come la mappa momento rispetto ad un nuovo quiver  $Q'$ . Per fornire questa descrizione si devono calcolare sia  $\text{End}(\alpha)_x$  sia  $D$  e nuovi parametri  $Q'$  e  $\alpha'$ . Questa descrizione dipende strettamente dal tipo di  $x$ .

Fissiamo un punto  $x$  con orbita chiusa di tipo  $(m, \beta)$ , cioè in  $I(m, \beta)$ . La rappresentazione  $x$  è isomorfa alla somma diretta  $\bigoplus_{i=1}^r x_i^{m_i}$  con  $x_i$  semplici di dimensione  $\beta_i$ . Gli endomorfismi che commutano con  $x$  sono:

$$\text{End}(\alpha)_x = \bigoplus_{i=1}^r \text{Mat}(m_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^r k^{m_i} \otimes_k (k^{m_i})^*$$

Dato che gli  $x_i$  sono non isomorfi tra loro e con anello degli endomorfismi banale.

Voglio decomporre  $D$  in  $\text{End}(\alpha)_x$ -bimoduli semplici; essi sono della forma  $k^{m_i} \otimes_k (k^{m_j})^*$ . Per trovare la decomposizione di  $D$  mostro prima quelle di  $\text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$ ,  $B$  e  $C^\perp$ . Si hanno gli isomorfismi di  $\text{End}(\alpha)$  moduli:

$$B \simeq \text{End}(\alpha) / \text{End}(\alpha)_x$$

$$C^\perp \simeq \text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) / B^\perp \simeq \left( \text{End}(\alpha) / \text{End}(\alpha)_x \right)^*$$

Per continuare i conti serve un lemma

**Lemma 2.53.** *Il modulo  $k^{\alpha_i} \otimes_k (k^{\alpha_j})^*$  si spezza come  $\text{End}(\alpha)_x$ -moduli semplici nel seguente modo:*

$$k^{\alpha_i} \otimes_k (k^{\alpha_j})^* \simeq \bigoplus_{a,b} (k^{m_a} \otimes_k (k^{m_b})^*)^{\beta_i^a \beta_j^b}$$

*Dimostrazione.* Il modulo sinistro  $k^{\alpha_i}$  si spezza come  $\bigoplus_{a=1}^r (k^{m_a})^{\beta_i^a}$  in somma diretta di  $\text{End}(\alpha)_x$ -moduli sinistri semplici. Per la distributività del prodotto tensore sulla somma diretta si ottiene il risultato.  $\square$

Il modulo  $\text{End}(\alpha)$  si decompone in  $\text{End}(\alpha)_x$ -moduli semplici

$$\text{End}(\alpha) = \bigoplus_i k^{\alpha_i} \otimes_k (k^{\alpha_i})^* \simeq \bigoplus_{a,b} (k^{m_a} \otimes_k (k^{m_b})^*)^{\sum_i \beta_i^a \beta_i^b}$$

Il quoziente (e il suo duale) si decompone come:

$$\text{End}(\alpha) / \text{End}(\alpha)_x \simeq \bigoplus_{a,b} (k^{m_a} \otimes_k (k^{m_b})^*)^{\sum_i \beta_i^a \beta_i^b - \delta_{a,b}}$$

Infine il bimodulo  $\text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$  si decompone come:

$$\text{Rep}(\overline{Q}, \alpha) \simeq \bigoplus_{\gamma \in Q_1} (k^{m_{h(\gamma)}} \otimes_k (k^{m_{t(\gamma)}})^*) \simeq \bigoplus_{a,b} (k^{m_a} \otimes_k (k^{m_b})^*)^{\sum_{i,j} n_{i,j} \beta_i^a \beta_j^b}$$

In conclusione,

$$D \simeq \bigoplus_{a,b} (k^{m_a} \otimes_k (k^{m_b})^*)^{\sum_{i,j} n_{i,j} \beta_i^a \beta_j^b - 2 \sum_i \beta_i^a \beta_i^b + 2\delta_{a,b}}$$

dove l'esponente è proprio  $2\delta_{a,b} - (\beta^a, \beta^b)_Q$ .

Per avere  $\text{End}(Q, \alpha)_x = \text{End}(Q', \alpha')$  bisogna prendere  $Q'_0$  di cardinalità  $r$  e  $\alpha' = m$ . Per quanto riguarda gli archi la condizione  $\text{Rep}(Q', m) = D$  implica che il quiver  $\overline{Q}'$  deve avere  $2\delta_{a,b} - (\beta^a, \beta^b)_Q$  archi tra i vertici  $a$  e  $b$ . Così si determinano gli archi di  $Q'$  e l'orientazione non ha importanza.

A seguito di questa osservazione e della sezione precedente si può enunciare e dimostrare l'importante teorema:

**Teorema 2.54.** *Sia  $x \in \mathfrak{M}_0(\alpha, \lambda)$  una rappresentazione di tipo  $I(k, \sigma)$ . Esistono due intorni di  $x \in \mathfrak{M}_0(Q, \alpha, \lambda)$  e di  $0 \in \mathfrak{M}_0(Q', k, 0)$  isomorfi tramite mappe étale.*

*Dimostrazione.* È sufficiente comporre le mappe fornite dai teoremi 2.50 e 2.52 per ottenere che la mappa è ben definita e étale in  $x$ . Si deduce che esistono due intorni étale isomorfi, poiché il luogo étale è aperto.  $\square$

**Corollario 2.55.** *Immediata conseguenza è che il punto  $x$  è normale se e solo se è normale l'origine di  $\mathfrak{M}_0(k, 0)$ .*

*Dimostrazione.* Si usa il corollario 3.24 del [Liu, p 140]: se  $f$  è étale in  $x$  allora  $x$  è normale se e solo se  $f(x)$  è normale.  $\square$

## 2.12 Richiami sulla normalità

In questa sezione richiamo alcune proprietà e caratterizzazioni classiche degli schemi normali. Esse sono fondamentali per la dimostrazione della normalità delle varietà quiver, ma non sono interessanti per la discussione globale sulle varietà quiver. Per questo motivo la maggior parte delle dimostrazioni sono rimandate alla letteratura a riguardo.

La prima cosa da notare è che la definizione di normalità è locale e basta verificarla sui punti chiusi.

**Definizione 2.56.** Uno schema localmente noetheriano  $X$  ha la proprietà  $R_k$  se è regolare in tutti i punti di codimensione minore di  $k + 1$ . Lo schema ha la proprietà  $S_i$  (di Serre) se per ogni  $z \in X$  si ha

$$\text{Depth}(\mathcal{O}_{X,z}) \geq \min\{i, \text{codim}_X z\}$$

Queste proprietà sono utili perché esiste una caratterizzazione della normalità di uno schema in termini di esse.

**Teorema 2.57** (criterio di Serre). *Sia  $X$  uno schema localmente noetheriano e connesso, allora sono equivalenti*

- $X$  è normale.
- Valgono le proprietà  $R_1$  e  $S_2$ .

La dimostrazione del teorema si trova in [Liu, p 339] (Teorema 2.23). La profondità dell'anello locale è legata alla coomologia locale dal seguente lemma.

**Lemma 2.58.** *Sia  $z \in X$  un punto in uno schema localmente noetheriano, sono equivalenti:*

- $\text{Depth } \mathcal{O}_{X,z} \geq n$

- I gruppi di coomologia locale  $H_z^j(X)$  sono nulli per ogni  $j < n$ .

La dimostrazione si trova in [Hart, p 44], Teorema 3.8.

Per calcolare la coomologia locale è utile la proposizione 1.9 di [Hart, p 9] che fornisce una successione esatta lunga in coomologia.

**Lemma 2.59.** *Sia  $Z$  un chiuso di  $X$ ,  $U$  un aperto e  $V$  il suo complementare, si ha la successione esatta lunga:*

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H_{Z \cap V}^0(X) & \longrightarrow & H_Z^0(X) & \longrightarrow & H_{Z \cap U}^0(X) \longrightarrow \\
& & \longleftarrow & & \longleftarrow & & \longleftarrow \\
& & H_{Z \cap V}^1(X) & \longrightarrow & H_Z^1(X) & \longrightarrow & H_{Z \cap U}^1(X) \longrightarrow \\
& & \longleftarrow & & \longleftarrow & & \longleftarrow \\
& & H_{Z \cap V}^2(X) & \longrightarrow & H_Z^2(X) & \longrightarrow & H_{Z \cap U}^2(X) \longrightarrow \cdots \\
& & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
& & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
& & H_{Z \cap V}^n(X) & \longrightarrow & H_Z^n(X) & \longrightarrow & H_{Z \cap U}^n(X)
\end{array}$$

Infine vale una formula di escissione (Proposizione 1.3 [Hart, p 5]).

**Lemma 2.60.** *Sia  $X$  uno schema localmente noetheriano,  $Z$  un chiuso e  $U$  un aperto di  $X$ , si ha:*

$$H_{Z \cap U}^i(X) \simeq H_Z^i(U)$$

Ci serve enunciare un teorema che estende la normalità di un aperto  $U$  in un quoziente a tutta la varietà.

**Proposizione 2.61.** *Sia  $X$  uno schema che soddisfa la seconda condizione di Serre ( $S_2$ ) e  $U$  un aperto normale di  $X // G$ . Suppongo inoltre che sia  $Z = X // G \setminus U$  sia  $\pi^{-1}(Z)$  abbiano codimensione almeno due. Allora  $X // G$  è normale.*

*Dimostrazione.* La proprietà  $R_1$  vale su  $X // G$  perché vale su  $U$  che ha complementare di codimensione almeno due. Mostro che  $S_2$  vale su  $X // G$  e quindi  $X // G$  è normale. Per i lemmi precedenti devo mostrare che per ogni  $j < \min\{2, \text{codim}_{X // G} z\}$  si ha  $H_z^j(X // G) = 0$ . Fisso  $z \in X$ , chiamo  $Z$  la chiusura di  $z$  e  $V$  il complementare di  $U$ . Per la normalità di  $U$  si ha  $0 = H_{Z \cap U}^j(U) = H_{Z \cap U}^j(X // G)$  per ogni  $j < \min\{2, \text{codim}_{X // G} Z\}$ . Usando la successione esatta lunga si ottiene  $H_Z^j(X // G) = H_{Z \cap V}^j(X // G)$ , quest'ultimo si immerge in  $H_{\pi^{-1}(Z \cap V)}^j(X)$ . Per ipotesi  $\text{codim}_X \pi^{-1}(Z \cap V) \geq \text{codim}_X \pi^{-1}(Z) \geq 2$ , quindi poiché vale la condizione  $S_2$  su  $X$  allora  $H_Z^j(X // G) \subseteq H_{\pi^{-1}(Z \cap V)}^j(X) = 0$  per ogni  $j < \min\{2, \text{codim}_{X // G} Z\}$ .  $\square$

## 2.13 Normalità della varietà quiver

In questa sezione metto insieme tutti i risultati del capitolo per dimostrare che le varietà quiver  $\mathfrak{M}_0(Q, \alpha, \lambda)$  sono normali.

L'insieme degli elementi di tipo  $(k, \beta)$  in  $\text{Rep}(Q, \alpha)$  è stato chiamato  $I(k, \beta)$ , dato che ora lavoro in  $\text{Rep}(\overline{Q}, \alpha)$  chiamo l'insieme degli elementi di tipo  $(k, \beta)$   $\bar{I}(k, \beta)$  per sottolineare che sono rappresentazioni del quiver raddoppiato.

**Definizione 2.62** (quasi Klein). Una coppia  $(Q, \alpha)$  si dice “quasi Klein” se il quiver ha un solo punto ( $\#Q_0 = 1$ ) e  $\alpha = \alpha_1 = 1$  oppure se  $Q$  è ottenuto da un quiver euclideo aggiungendo qualche loop in qualche (anche più di uno) vertice di estensione e  $\alpha = \delta$ .

**Lemma 2.63.** *Sia  $\alpha \in \Sigma_0$  sincero tale che la coppia  $(Q, \alpha)$  non sia quasi Klein. Se  $\bar{I}(k, \beta)$  è non vuoto allora vale almeno una delle due seguenti condizioni:*

1.  $\sum_j k_j < \sum_i \alpha_i$ .
2.  $p(\alpha) - \sum_j p(\beta^j) \geq 2$ .

*Dimostrazione.* Suppongo che non valgano le condizioni 1 e 2 e dimostro che il quiver deve essere quasi Klein. Si ha:

$$\alpha^T \alpha = \sum_{s,t} k_s k_t (\beta^s)^T \beta^t \geq \sum_s k_s^2$$

Siccome non vale 1 si deve avere uguaglianza, quindi  $(\beta^s)^T \beta^t = 0$  per  $s \neq t$  e che  $\sum_i \beta_i^s = 1$ . In altre parole  $\beta^t = \epsilon_t$  dato che  $\alpha$  è sincero, a meno di rinominare vertici del quiver, suppongo  $\alpha_i = k_i$ . Uso l'ipotesi che  $\alpha \in \Sigma_0$  quindi o  $Q$  ha un vertice e  $\alpha = 1$  (quasi Klein) o  $\alpha$  si decompone e si deve avere:

$$\sum_i k_i p(\epsilon_i) < p(\alpha) < 2 + \sum_i p(\epsilon_i)$$

Perché la decomposizione è non banale. Si ha la disuguaglianza  $\sum_i (k_i - 1)p(\epsilon_i) = \sum_i (k_i - 1)n_{i,i} \leq 0$  quindi  $k_i = 1$  se c'è almeno un loop su  $i$  ( $(k_i - 1)n_{i,i} = 0$ ) e  $p(\alpha) = 1 + \sum_i k_i p(\epsilon_i) = 1 + \sum_i p(\epsilon_i) = 1 + \sum_i n_{i,i}$ .

Voglio calcolare  $\frac{1}{2} \sum_i k_i ((\epsilon_i, \alpha - \epsilon_i) + 2)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_i k_i ((\epsilon_i, \alpha - \epsilon_i) + 2) &= \frac{1}{2} \left( (\alpha, \alpha) + \sum_i k_i (2 - (\epsilon_i, \epsilon_i)) \right) \\ &= 1 - p(\alpha) + \sum_i k_i (1 - q(\epsilon_i)) \\ &= 1 - p(\alpha) + \sum_i k_i p(\epsilon_i) = 0 \end{aligned}$$

Per la caratterizzazione di  $\Sigma_0$  2.22 si ha  $(\epsilon_i, \alpha - \epsilon_i) \leq -2$  quindi per l'uguaglianza sopra si ottiene  $(\epsilon_i, \alpha - \epsilon_i) = -2$ . Sia  $Q'$  il quiver ottenuto da  $Q$  eliminando tutti i loop, per ogni  $i$  si ha:

$$0 = (\epsilon_i, \alpha - \epsilon_i)_Q + 2 = (\epsilon_i, \alpha)_Q + 2n_{i,i} = (\epsilon_i, \alpha)_{Q'}$$

Di conseguenza  $Q'$  è euclideo e  $\alpha = a\delta$  per il Corollario 1.21. Se  $Q$  ha un loop in  $i$  allora  $\alpha_i = 1$  e  $\alpha = \delta$ . Altrimenti  $Q = Q'$  e l'ipotesi  $\alpha \in \Sigma_0$  implica  $\alpha = \delta$ .  $\square$

**Lemma 2.64** (caso quasi Klein). *Se la coppia  $(Q, \alpha)$  è quasi Klein allora la varietà  $\mathfrak{M}_0(\alpha, 0)$  è normale.*

*Dimostrazione.* Se  $Q$  ha un loop  $\gamma$  in  $i$  allora  $\alpha_i = 1$ , in questo caso  $\gamma$  non compare nelle relazioni imposte da  $\mu_\alpha$ . Nel caso in cui  $Q$  abbia un solo punto allora  $\mathfrak{M}_0(1, 0) = \mathbb{A}^{2r}$  dove  $r$  è il numero di loop di  $Q$ . Altrimenti sia  $Q'$  il quiver (euclideo) senza loop  $\mathfrak{M}_0^Q(\alpha, 0) = \mathfrak{M}_0^{Q'}(\alpha, 0) \times \mathbb{A}^{2r}$  dove  $r$  è il numero complessivo di loop. La varietà  $\mathfrak{M}_0^{Q'}(\alpha, 0)$  ha singolarità di tipo Klein quindi è normale, come dimostrato in [CB1998, pp 629,630].  $\square$

**Teorema 2.65.** *Per ogni  $Q$ ,  $\alpha$  e  $\lambda$  la varietà  $\mathfrak{M}_0(\alpha, \lambda)$  è normale.*

*Dimostrazione.* Per il Corollario 2.55 posso ricondirmi a dimostrare la tesi solo per il caso  $\lambda = 0$ . Voglio dimostrare la tesi per induzione su  $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ . Per il passo base  $\sum_i \alpha_i = 1$  è basta restringersi al supporto di  $\alpha$  e quindi lavorare col quiver formato da un punto e  $m$  loop. Poiché  $\alpha_1 = 1$  l'algebra  $\text{End}_0(\alpha) = 0$  e il gruppo  $G(\alpha) = \{\text{Id}\}$  sono banali cioè  $\mu_\alpha = 0$  e  $\mathfrak{M}_0(\alpha, 0) \simeq \mathbb{A}^{2m}$  che è ovviamente normale.

Dimostro ora il passo induttivo, supponendo la tesi vera per tutti gli  $\mathfrak{M}_0(\sigma, 0)$  con  $\sum_j \sigma_j < \sum_i \alpha_i$ . Poiché il prodotto simmetrico di varietà normali è normale e la stessa proprietà vale per il prodotto di due varietà, usando la decomposizione del teorema 2.39 nel caso  $\lambda = 0$  mi riconduco al caso  $\alpha \in \Sigma_0$ . Notare che questo passaggio non modifica  $\lambda = 0$ . Se la coppia  $(Q, \alpha)$  è quasi Klein allora la tesi segue dal lemma 2.64. Altrimenti, mi restringo al supporto di  $\alpha$  e posso dividere  $\mu_\alpha^{-1}(0)$  in sottoinsiemi localmente chiusi  $\bar{I}(k, \beta)$  che come da solita notazione sono i punti di  $\text{Rep}(\bar{Q}, \alpha)$  di tipo  $(k_1, \beta_1, \dots, k_r, \beta_r)$ . Sia  $\pi : \mu_\alpha^{-1}(0) \rightarrow \mathfrak{M}_0(\alpha)$  la proiezione al quoziente. La dimensione di  $\mu_\alpha^{-1}(0)$  è almeno  $\alpha^T \alpha - 1 + 2p(\alpha)$  mentre la dimensione di  $\bar{I}(k, \beta)$  è al più  $\alpha^T \alpha - 1 + p(\alpha) + \sum_j p(\beta^j)$ . Osservo inoltre che la dimensione di  $\mathfrak{M}_0(\alpha, 0)$  è  $2p(\alpha)$  per  $\alpha \in \Sigma_0$  e che la dimensione di  $\pi(\bar{I}(k, \beta)) = \sum_j k_j p(\beta^j)$ .

Il lemma 2.63 permette di affermare che la codimensione dello strato  $\bar{I}(k, \beta)$  e di  $\pi(\bar{I}(k, \beta))$  in  $\mathfrak{M}_0(\alpha, 0)$  è almeno due oppure  $\pi(\bar{I}(k, \beta))$  è normale perché lo è  $\mathfrak{M}_0(k, 0)$  per ipotesi induttiva (usando il Corollario 2.55).

Sia  $U$  il luogo normale di  $\mathfrak{M}_0(\alpha, 0)$  e  $Z$  il suo complementare. Il chiuso  $Z$  è contenuto nell'unione finita di  $\pi(\bar{I}(k, \beta))$  per cui vale la seconda condizione

---

di 2.63, la codimensione di  $Z$  e di  $\pi^{-1}(Z)$  è almeno due. Per la proposizione 2.61 il quoziente  $\mu_\alpha^{-1}(0) // G(\alpha) = \mathfrak{M}_0(\alpha, 0)$  è normale.  $\square$

## Bibliografia

- [CB2001] Crawley-Boevey William, *Geometry of the Moment Map for Representations of Quivers*, Compositio Mathematica vol 126 pp 257-293, 2001.
- [CB2002] Crawley-Boevey William, *Decomposition of Marsden-Weinstein reductions for representations of quivers*, Compositio Mathematica, vol 130 pp 225-239, 2002.
- [CB2003] Crawley-Boevey William, *Normality of Marsden-Weinstein reductions for representations of quivers*, Math. Ann. vol 325 pp 55-79, 2003.
- [CB1998] Crawley-Boevey William, Holland Martin P., *Noncommutative deformations of Kleinian singularities*, Duke Mathematical Journal vol 92 no. 3 pp 605-635, 1998.
- [Hump72] Humphreys James E., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer New York, 1972.
- [Hump92] Humphreys James E., *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, 1992.
- [Hump95] Humphreys James E., *Linear Algebraic Group*, Springer-Verlag, 1995.
- [Ringel] Ringel Claus M., *Appunti delle lezioni: Introduction to representation theory of quivers*, University of King Abdulaziz 2012.
- [KacI] Kac Victor G., *Infinite Root Systems, Representations of Graphs and Invariant Theory*, Inventiones mathematicae vol 56 pp 57-92, 1980.
- [KacII] Kac Victor G., *Infinite Root Systems, Representations of Graphs and Invariant Theory, II*, Journal of Algebra 78 pp 141-162, 1982.
- [Kac80] Kac Victor G. *Some remarks on representations of quivers and infinite root systems* (Proceedings of the Second International Conference on Representations of Algebras, Ottawa, Ont., 13-25 Agosto 1979), pp. 311–327, Lecture Notes in Math., 832, Springer, Berlin, 1980.

- [Kac83] Kac Victor G., *Root systems, representations of quivers and invariant theory*, Invariant theory (Montecatini, 1982), pp 74–108, Lecture Notes in Math., 996, Springer, Berlin, 1983.
- [Luna] Luna Domingo, *Slices étales*, Mémoires de la Société Mathématique de France vol 33 pp 81-105, 1973.
- [BGP] Bernšteĭn Joseph; Gel'fand Izrail' M.; Ponomarev V. A., *Coxeter functors and Gabriel's theorem*, Russian mathematical surveys 28: pp 17–32, 1973.
- [King] King, A. D., *Moduli of representations of finite dimensional algebras*, Oxford University Press, The Quarterly Journal of Mathematics vol 45 pp 515-530, 1994.
- [Yi] Yi Hu, Appunti delle lezioni: *Lecture on quotients and moduli spaces*, Department of Mathematics, University of Arizona.
- [BB] Brenner Sheila; Butler M. C. R., *The equivalence of certain functors occurring in the representation theory of Artin algebras and species*, J. London Math. Soc. (2) 14, no. 1, pp 183–187, 1976.
- [Nak96] Nakajima Hiraku, *Varieties Associated with Quivers* in “Representation Theory of Algebras and Related Topics” (Mexico City, 1994), CMS Conf. Proc. vol 19 pp 139-157, American Mathematical Society, Providence, 1996.
- [Liu] Liu Qing, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford University Press, 2006.
- [Rump] Rump Wolfgang, *Doubling a path algebra or: How to extend indecomposable simple modules*, An. Stiint. Univ. Ovidius Constanta Ser. Mat. vol 4 pp 174-185, 1996.
- [Hart] Hartshorne Robin, *Local Cohomology*, A seminar given by A. Grothendieck Harvard University Fall, 1961; Springer Lecture Notes in Mathematics vol 41, 1967.
- [K-R] Kraft H. e Riedtmann Ch., *Geometry of representations of quivers in Representations of Algebras: Proceedings of the Durham Symposium 1985* ed. Peter J. Webb, London Mathematical Society Lecture Note Series vol 116, Cambridge University Press, 1986.
- [Vin] Vinberg È. B., *Discrete Linear Groups Generated by Reflections*, Mathematics of the USSR-Izvestiya vol 5 n 5 pp 1083-1119, 1971.
- [Le Bru] Le Bruyn L.; Procesi C., *Semisimple representations of quivers*, Trans. Amer. Math. Soc. vol 317 pp 585–598, 1990.