

*The important thing is not to stop questioning.  
Curiosity has its own reason for existing.  
One cannot help but be in awe when one  
contemplates the mysteries of eternity,  
of life, of the marvelous structure of reality.  
It is enough if one tries merely to comprehend  
a little of this mystery every day.  
Never lose a holy curiosity.*

*Albert Einstein - The World As I See It*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iv</b>
<b>1 Concetti Preliminari</b>	<b>1</b>
1.1 Cenni di Algebra . . . . .	1
1.1.1 Teoria dei gruppi . . . . .	1
1.1.2 Algebre . . . . .	7
1.2 Azioni di gruppo . . . . .	7
1.2.1 Azioni continue di gruppo . . . . .	7
1.2.2 Azioni discontinue di gruppo . . . . .	11
1.3 Cenni di Geometria delle Superfici di Riemann . . . . .	13
1.3.1 Approccio classico . . . . .	14
1.3.2 Superfici di Riemann come spazi anellati . . . . .	15
1.3.3 Forme differenziali . . . . .	17
1.3.4 Analisi su superfici di Riemann compatte . . . . .	19
1.3.5 Il teorema di Riemann-Roch . . . . .	21
1.3.6 Il genere di $X$ . . . . .	24
1.4 Metriche su Superfici di Riemann . . . . .	26
1.5 Cenni di Analisi Funzionale e Teoria Spettrale . . . . .	29
1.5.1 Operatori non limitati autoaggiunti ed essenzialmente autoaggiunti . . . . .	29
1.5.2 Teoria spettrale . . . . .	34
1.6 Forme differenziali su una superficie di Riemann . . . . .	36
1.6.1 Gruppi di coomologia . . . . .	36

1.6.2	Forme differenziali armoniche ed olomorfe su una superficie di Riemann . . . . .	38
1.7	Campi magnetici e vettori potenziali nella geometria delle cuspidi . . . . .	42
1.7.1	Campi magnetici e vettori potenziali . . . . .	42
1.7.2	Geometria delle cuspidi . . . . .	43
<b>2</b>	<b>Gruppi modulari e superfici modulari</b>	<b>46</b>
2.1	Il semipiano di Poincaré . . . . .	46
2.2	I gruppi modulari . . . . .	47
2.2.1	Il gruppo modulare totale . . . . .	47
2.2.2	I sottogruppi principali di congruenza . . . . .	48
2.2.3	Alcuni dettagli dell'azione di $SL(2, \mathbb{C})$ su $\mathbb{H}$ . . . . .	51
2.3	Le superfici modulari . . . . .	53
2.3.1	Domini fondamentali . . . . .	53
2.3.2	La struttura complessa di $M_\Gamma$ . . . . .	55
2.3.3	Il genere di $M_\Gamma$ . . . . .	59
2.4	La superficie modulare $M_{\Gamma(2)}$ . . . . .	62
2.4.1	Il gruppo modulare $\Lambda$ , ovvero $\Gamma(2)$ . . . . .	62
2.4.2	La geometria di $M_{\Gamma(2)}$ . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Analisi del Laplaciano su <math>M_{\Gamma(2)}</math></b>	<b>65</b>
3.1	Aspetti astratti . . . . .	65
3.2	Primo problema . . . . .	66
3.3	Ricerca del potenziale intrappolante . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Il problema semplificato</b>	<b>72</b>
4.1	Introduzione . . . . .	72
4.2	Operatore di Laplace . . . . .	73
4.3	Calcolo di autovalori ed autofunzioni . . . . .	74
4.4	Conclusioni . . . . .	76

---

<b>5</b>	<b>Alcuni risultati concernenti le trasformate di Mellin della</b>	
	<b>Mappa di Gauss e le funzioni <math>\zeta</math> di Riemann e Hurwitz</b>	<b>78</b>
5.1	La mappa di Gauss . . . . .	78
5.2	La $\zeta$ di Riemann . . . . .	79
5.3	Alcuni valori della trasformata di Mellin della Mappa di Gauss	79
5.3.1	I “momenti dispari” della Mappa di Gauss . . . . .	80
5.3.2	Ha senso estendere l’integrale a $\Re s \leq 1$ ? . . . . .	81
5.4	La derivata della $\zeta$ . . . . .	82
5.5	Trasformata di Mellin della Mappa di Gauss e Operatore di	
	Trasferimento . . . . .	84
5.6	Rappresentazione differenziale per la $\zeta$ . . . . .	86
	<b>Bibliografia</b>	<b>i</b>
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>v</b>

# Introduzione

Quando le superfici modulari si sono rivelate come un ponte tra varie discipline, in particolar modo tra sistemi dinamici, teoria dei numeri e caos quantistico, è sembrato certamente un fatto fenomenale ed inaspettato. Ma se ci pensiamo, già Galileo si era reso conto di quanto fosse sottile il confine tra la matematica e la fisica e, con il passare del tempo, la necessità di uno scambio e di interazione tra le due scienze è andata crescendo sempre di più.

Le teorie fisiche richiedono argomenti matematici sempre più raffinati ed astratti e la matematica si mostra sempre di più in quell'unità che uno studente universitario comincia a scorgere solo verso la fine dei suoi studi e che la complica almeno quanto la rende affascinante. Non c'è da stupirsi, quindi, se in questa tesi siamo andati a cercare di studiare la fisica di un sistema poco fisico.

Tale sistema, come si può già intuire dal titolo, è quello dato dalle superfici modulari, particolari superfici di Riemann ottenute dal quoziente del semipiano complesso equipaggiato di una metrica iperbolica. La fisica, invece, sta nello studio dell'operatore di Laplace con campo magnetico nullo in una superficie che non è invariante per Gauge, cioè che ammette più scritture formalmente equivalenti per definire un campo magnetico: ne conseguono comportamenti spettrali differenti, in accordo con il famoso effetto di Aharonov-Bohm.

L'utilità del problema in sé può essere ricercata nello stretto legame che c'è tra la dinamica sulle superfici modulari e la teoria dei numeri. Inoltre, alcuni calcoli lasciano presupporre che in questo caso l'effetto di Aharonov-Bohm

sia accompagnato da qualche altro fenomeno di innestamento dello spettro discreto in quello continuo e dalla comparsa di risonanze che potrebbero avere un legame stretto con gli zeri non banali di opportune combinazioni di funzioni zeta.

Il primo capitolo serve a porre le basi necessarie a comprendere ed inquadrare quanto verrà fatto nella parte successiva della tesi. Vengono forniti cenni di geometria differenziale ed analisi funzionale coronati da un gran numero di riferimenti utili per chi volesse approfondire gli argomenti trattati.

Nel secondo capitolo vengono ricostruite le superfici modulari, con un occhio di riguardo a quella ottenuta tramite il gruppo modulare  $\Lambda$ , la più semplice tra quelle che dovrebbero presentare i comportamenti spettrali cercati.

Nel terzo capitolo si cerca di definire opportunamente l'operatore di Laplace cercato. Purtroppo i calcoli si interrompono a causa di problemi nella convergenza di una serie. Le difficoltà incontrate in questo capitolo, però, lasciano sperare che semplificando il problema si possa tentare la ricerca di un metodo e di risultati da generalizzare all'analisi spettrale sulle superfici modulari.

Nel quarto capitolo si pone un nuovo problema, apparentemente più semplice, le cui dinamiche dovrebbero ricalcare asintoticamente quelle della situazione del capitolo precedente. Si effettua una prima analisi del problema e si accenna ad alcuni risultati successivi che non possono, però, essere inclusi nella tesi per questioni di tempo e di spazio.

Il quinto capitolo, indipendente dagli altri, tratta alcuni studi personali sulla relazione tra la funzione zeta di Riemann e la mappa di Gauss.

# Capitolo 1

## Concetti Preliminari

### 1.1 Cenni di Algebra

Un capitolo sull'algebra elementare può forse risultare superfluo, ma recuperare i concetti relativi all'idea di quoziente e alle strutture che sottostanno a tutta la teoria che sarà sviluppata può risultare in qualche modo illuminante per comprendere il lavoro.

Quello che segue è soltanto una brevissima introduzione in cui, in linea di massima, risultati e definizioni sono solo elencati. Per ulteriori dettagli ed approfondimenti si consigliano i seguenti riferimenti bibliografici: [Tul], [AM69], [Tof].

#### 1.1.1 Teoria dei gruppi

Si consideri un insieme  $G$  dotato di un'operazione binaria  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$  che soddisfi le seguenti proprietà

- $*$  è associativa,
- esiste  $u \in G$  elemento neutro per  $*$ ,
- per ogni  $a \in G$  esiste l'inverso  $a^{-1}$ ;

la struttura algebrica data dalla coppia  $(G, *)$  è detta *gruppo*. Un gruppo si dice *abeliano* se  $*$  soddisfa la proprietà commutativa. Per comodità di notazione si ometterà l'operazione quando non è necessario indicarla esplicitamente.

Siano  $(G, *)$  ed  $(G', *')$  due gruppi. Un *morfismo* tra  $(G, *)$  ed  $(G', *')$  è un'applicazione  $\phi : G \rightarrow G'$  che preserva le operazioni, cioè per ogni  $a, b \in G$  si ha  $\phi(a * b) = \phi(a) *' \phi(b)$ . A sua volta questo implica che  $\phi(u_G) = u_{G'}$  e  $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$ , dove  $a, b \in G$  e  $u_G$  ed  $u_{G'}$  sono gli elementi neutri del primo e del secondo gruppo rispettivamente. È facile verificare che la composizione di morfismi è un morfismo.

In generale non è vero che ogni sottoinsieme  $H$  di un gruppo  $G$  sia ancora un gruppo. Nel caso lo fosse, tale sottoinsieme viene chiamato *sottogruppo* del gruppo  $G$  e si indica  $H \leq G$ . Per i sottogruppi vale il seguente teorema di caratterizzazione:

**Teorema 1.1.1.** *Sia  $G$  un gruppo e sia  $H$  un sottoinsieme non vuoto di  $G$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

- (i)  $H$  è un sottogruppo di  $G$ ,
- (ii) per ogni  $a, b \in H \Rightarrow ab \in H, a^{-1} \in H$ ,
- (iii) per ogni  $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ ,
- (iv) per ogni  $a, b \in H \Rightarrow a^{-1}b \in H$ .

Inoltre se  $\phi : G \rightarrow C$  è un morfismo tra i gruppi  $G$  e  $C$ , allora

- (i)  $H \leq G \Rightarrow \phi(H) \leq C$ , in particolare  $Im(\phi) \leq C$ ;
- (ii)  $D \leq C \Rightarrow \phi^{-1}(D) \leq G$ , in particolare  $\phi^{-1}(u_D) \leq G$ .

Se  $\phi : G \rightarrow C$  è un morfismo tra gruppi, allora il sottogruppo  $\phi^{-1}(u_C)$  di  $G$  si dice *nucleo* di  $\phi$  e si denota "Ker  $\phi$ ".

**Proposizione 1.1.2.** *Se  $\phi : G \rightarrow C$  è un morfismo tra gruppi, allora*

$$\phi \text{ è iniettivo} \Leftrightarrow Ker \phi = \{u_C\}.$$

Sia  $G$  un gruppo e sia  $X$  un sottoinsieme di  $G$ . Si chiama *sottogruppo generato* da  $X$ , e si denota con  $\langle X \rangle$ , l'intersezione della famiglia di tutti i sottogruppi di  $G$  che contengono  $X$ . Tale gruppo è anche il più piccolo sottogruppo di  $G$  contenente  $X$ .

**Teorema 1.1.3.** *Sia  $G$  un gruppo e sia  $X$  un sottoinsieme di  $G$ . Allora  $a \in \langle X \rangle$  se e solo se esiste  $k \in \mathbb{N}$  ed esistono  $x_1, \dots, x_k \in X$ , non necessariamente distinti, tali che*

$$a = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_k^{\epsilon_k} \quad \text{dove } \epsilon_i \in \{-1, 1\} \forall_i 1 \leq i \leq k.$$

*In altri termini, riducendo nell'equazione precedente le potenze contigue con medesima base ad un'unica potenza, ogni elemento di  $\langle X \rangle$  si può esprimere, anche se non in maniera unica, come prodotto di potenze di elementi di  $X$  ad esponente in  $\mathbb{Z}$ .*

Un gruppo si dice in notazione moltiplicativa quando l'operazione si indica con “.” e l'elemento neutro con 1.

Sia  $G$  un gruppo in notazione moltiplicativa e sia  $X$  un insieme. Si dice *azione a sinistra* di  $G$  su  $X$  un'applicazione  $\alpha : G \times X \rightarrow X$  tale che  $\forall x \in X$  e  $\forall a, b \in G$  valgano le seguenti proprietà

1.  $\alpha(1, x) = x$ ,
2.  $\alpha(b, \alpha(a, x)) = \alpha(b \cdot a, x)$ .

Allo stesso modo si possono definire *azioni a destra* di  $G$  su  $X$  come applicazioni  $X \times G \rightarrow X$  che godano di proprietà simmetriche rispetto ai quelle della definizione precedente. Un'azione a destra non è detto che lo sia anche a sinistra.

Data un'azione  $G \times X \rightarrow X$ , si definisce una relazione  $\sim$  su  $X$  come segue

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists a \in G \text{ t.c. } ax = y.$$

Tale relazione è una relazione di equivalenza ed ogni classe di equivalenza che definisce viene chiamata *orbita* dell'azione. Per definizione, la classe  $[x]$

si descrive con  $[x] = \{ax : a \in G\}$ , o più semplicemente  $Gx$ . Quando esiste una sola orbita, l'azione si dice *transitiva* e, in tal caso,  $\forall x, y \in X \exists a \in G$  tale che  $ax = y$ . Fissato un elemento  $x_0$  di  $X$ , si chiama *stabilizzatore*, o (in fisica) gruppo di isotropia, l'insieme  $St(x_0) = \{a \in G : ax_0 = x_0\}$ .

Sia  $H$  un sottogruppo del gruppo  $G$ . Allora  $H$  agisce sull'insieme  $G$  con la moltiplicazione sia *sinistra* e che a *destra*:

$$H \times G \rightarrow G, \quad (b, x) \mapsto bx; \quad G \times H \rightarrow G, \quad (x, b) \mapsto xb.$$

Le orbite dell'azione a sinistra (a destra) di  $H$  su  $G$  per moltiplicazione a sinistra (a destra) si chiamano *lateralì sinistri* (*destri*). Così  $Hx$  rappresenta il laterale sinistro (classe di equivalenza) di  $x$ , mentre  $xH$  rappresenta il laterale destro.  $H$  è laterale tanto sinistro quanto destro ed è l'orbita dell'unità di  $G$ .

**Lemma 1.1.4.** *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- $Hx = Hy$ ;
- $x \in Hy$ ;
- $\exists b \in H, x = by$ ;
- $xy^{-1} \in H$ .

Come si intuisce facilmente, esiste una versione analoga del lemma per i laterali destri. Inoltre, poiché l'applicazione  $b \mapsto bx$  ( $b \mapsto xb$ ) è una biiezione (per la proprietà di cancellazione) da  $H$  in  $Hx$  ( $xH$ ), si ha anche che

$$|Hx| = |H| = |xH|.$$

D'altra parte, seppure è vero che i laterali sinistri sono lo stesso numero dei laterali destri (possono essere messi in corrispondenza biunivoca tramite  $Hx \mapsto x^{-1}H$ ), in generale le partizioni che inducono sul gruppo su cui agiscono non coincidono.

Si dice *indice* di  $H$  in  $G$  il numero dei laterali sinistri (o destri) quando è finito; si dice che l'indice è  $\infty$  quando il numero dei laterali è infinito. L'indice si denota con  $[G : H]$ .

**Teorema 1.1.5** (Lagrange). *Sia  $G$  un gruppo finito e sia  $H \leq G$ . Allora  $|G| = |H|[G : H]$ .*

**Corollario 1.1.6.** 1. *Ogni elemento di un gruppo finito  $G$  ha come periodo un divisore dell'ordine di  $G$ .*

2. *Se  $G$  è un gruppo e  $|G| = n$  allora  $a^n = 1 \forall a \in G$ .*

3. *Ogni gruppo finito di ordine primo  $p$  è un gruppo ciclico di  $p$  elementi; quindi isomorfo al gruppo additivo dei resti modulo  $p$ .*

4. *(Piccolo teorema di Fermat) Se  $p$  è un numero primo e  $p$  non divide l'intero  $m$  allora  $m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .*

Sia  $G$  un gruppo e  $H$  un suo sottogruppo. Si dice che  $H$  è un *sottogruppo normale* di  $G$  e si scrive  $H \triangleleft G$  se  $\forall a \in G, \forall x \in H, axa^{-1} \in H$  ovvero  $H$  contiene tutti i coniugati dei suoi elementi; in altri termini,  $\forall a \in G, aHa^{-1} \subseteq H$  ovvero i sottogruppi coniugati di  $H$  sono contenuti in  $H$ .

**Proposizione 1.1.7** (Caratterizzazioni dei sottogruppi normali). *Sia  $H$  un sottogruppo di  $G$ . Allora sono equivalenti:*

1.  $H \triangleleft G$ ;

2.  $yHy^{-1} = H \quad \forall y \in G$ ;

3.  $Hx = xH \quad \forall x \in G$ .

Se  $G$  è un qualsiasi gruppo, allora  $G$  stesso e il sottogruppo unità  $\{I\}$  sono sottogruppi normali di  $G$ . I gruppi  $G$  che hanno solo questi ( $G$  e  $\{I\}$ ) come sottogruppi normali, si dicono *semplici*.

Sia  $H \leq G$ . L'insieme dei laterali destri (sinistri) di  $H$  in  $G$  viene denotato con  $G/H$  ( $H \backslash G$ ). La proiezione sull'insieme quoziente  $\pi : G \rightarrow G/H$  è tale che  $\pi : x \mapsto xH$ .

**Teorema 1.1.8** (del gruppo quoziente). *Sia  $G$  un gruppo,  $N$  un suo sottogruppo e sia  $\pi : G \rightarrow G/N$  la proiezione di  $G$  sull'insieme quoziente. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1.  $N \triangleleft G$ ;
2.  $G/N$  può essere dotato di una (unica) operazione binaria tale che  $\pi$  sia un morfismo suriettivo, in tal caso  $G/N$  è un gruppo e  $\text{Ker } \pi = N$ ;
3.  $N$  è il nucleo di un qualche morfismo.

OSSERVAZIONE 1. Essendo  $N$  normale, si ha  $Nx = xN$  per ogni  $x \in G$  e quindi nel gruppo quoziente  $G/N$  si ha  $(Nx)(Ny) = Nxy$ ; inoltre  $N$  è l'elemento neutro e  $(Nx)^{-1} = Nx^{-1}$ .

**Teorema 1.1.9** (Principale sui quozienti). *Siano  $G$  e  $C$  gruppi,  $N \triangleleft G$ ,  $\phi : G \rightarrow C$  un morfismo di gruppi e  $\pi : G \rightarrow G/N$  il morfismo canonico del gruppo  $G$  sul gruppo quoziente  $G/N$ . Allora condizione necessaria e sufficiente perché esista un morfismo  $\bar{\phi} : G/N \rightarrow C$  tale che  $\bar{\phi} \circ \pi = \phi$  è che  $N \subseteq \text{Ker } \phi$ . Inoltre, quando questa condizione è vera, si ha che  $\bar{\phi}$  è unico e*

- $\text{Ker } \bar{\phi} = \text{Ker } \phi/N$ ;
- $\text{Im } \bar{\phi} = \text{Im } \phi$ .

OSSERVAZIONE 2. Osservare che  $\phi$  esiste ed è iniettiva se e solo se  $N = \text{Ker } \phi$ . Infatti il gruppo quoziente  $\text{Ker } \phi/N$  si riduce al solo elemento neutro se e solo se  $N = \text{Ker } \phi$ . In questo caso si ha  $G/\text{Ker } \phi \cong \text{Im } \phi$ , come verrà enunciato nel prossimo corollario. Questo risultato in letteratura va anche sotto il nome di *primo teorema di isomorfismo*.

**Corollario 1.1.10.** *Siano  $G$  e  $C$  gruppi e sia  $\phi : G \rightarrow C$  un morfismo. Allora  $\phi$  si fattorizza in  $i \circ \psi \circ \pi$ , dove  $i$  è un morfismo iniettivo,  $\psi$  un isomorfismo e  $\pi$  un morfismo suriettivo. Più precisamente,  $\pi : G \rightarrow G/\text{Ker } \phi$  è la proiezione sul quoziente,  $\psi : G/\text{Ker } \phi \rightarrow \text{Im } \phi$  è la restrizione all'immagine dell'isomorfismo  $\bar{\phi}$  ottenuto con il teorema principale sui quozienti e  $i : \text{Im } \phi \rightarrow C$  è l'immersione.*

### 1.1.2 Algebre

Per alcune dimostrazioni che seguiranno è necessario conoscere i concetti di *Successione Esatta (Corta)*, di *A-Algebra* (con  $A$  anello) e di *Algebra Esterna*, senza trascurare le loro relazioni con l'algebra dei gruppi sinteticamente richiamata nella precedente sezione. Sviluppare tutta la teoria necessaria sarebbe eccessivo data la relativa rilevanza diretta dell'argomento, pertanto si consiglia a coloro avessero interesse o necessità di consultare l'esauriente [AM69].

## 1.2 Azioni di gruppo

Le azioni di gruppi topologici su spazi topologici sono il cuore delle strutture definite tramite quozienti topologici, è dunque importante recuperare una parte della teoria che sottostà a tali strutture. Per questa sezione si fa riferimento a [Mil74].

### 1.2.1 Azioni continue di gruppo

Da ora in poi gli spazi (localmente) compatti saranno considerati di Hausdorff.

Un gruppo  $G$  su cui è definita una topologia è un *gruppo topologico* se le mappe

$$(g, g') \mapsto gg' : G \times G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1} : G \rightarrow G$$

sono continue.

Due elementi  $g_1, g_2 \in G$  gruppo, si dicono *coniugati* se  $\exists h \in G$  tale che  $g_2 = hg_1h^{-1}$ . Si può osservare facilmente che la coniugazione è una relazione di equivalenza.

A questo punto si possono recuperare alcune nozioni della sezione precedente per adattarele a questo caso.

Siano  $G$  un gruppo topologico ed  $X$  uno spazio topologico. Un'azione di  $G$  su  $X$ ,

$$(g, x) \mapsto gx : G \times X \rightarrow X$$

è *continua* se la sua mappa è continua. Allora,  $\forall g \in G, x \mapsto gx : X \rightarrow X$  è un omeomorfismo (con inversa  $x \mapsto g^{-1}x$ ); analogamente a quanto visto nella sezione precedente, l'insieme  $Gx = \{gx : g \in G\}$  delle immagini di una  $x \in X$  si chiama *orbita* dell'azione.

Lo *stabilizzatore* di  $x \in X$  (o *gruppo di isotropia* di  $x$ ) è l'insieme

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G : gx = x\}.$$

Se  $X$  è di Hausdorff, allora  $\text{Stab}(x)$  è chiuso<sup>1</sup>, inoltre è ben definita la biiezione

$$G/\text{Stab}(x) \rightarrow Gx, \quad g \cdot \text{Stab}(x) \mapsto gx.$$

$G \setminus X$  è l'insieme delle orbite dell'azione<sup>2</sup> di  $G$  su  $X$ ,  $G \setminus X$  è dotato naturalmente della topologia quoziente: se  $p$  denota la mappa  $x \mapsto Gx : X \rightarrow G \setminus X$ , allora  $U \subset G \setminus X$  è aperto se e solo se  $p^{-1}(U)$  è aperto in  $X$ . Si noti che  $p : X \rightarrow G \setminus X$  è sia continua che aperta infatti:

- è continua per definizione avendo dato a  $G \setminus X$  la più sottile topologia per cui  $p$  è una mappa continua;
- se  $U$  è un sottoinsieme aperto di  $X$ , si deve mostrare che  $p(U)$  è aperto; ma  $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$  che è chiaramente aperto.

Sia  $H$  un sottogruppo di  $G$ .  $H$  agisce su  $G$  a destra e a sinistra e  $G/H$  e  $H \setminus G$  sono gli spazi dei laterali destri e sinistri.

**Lemma 1.2.1.** *Lo spazio  $G/H$  è di Hausdorff se e solo se  $H$  è chiuso in  $G$ .*

*Dimostrazione.* Si chiami  $p$  la mappa  $G \rightarrow G/H, g \mapsto gH$ . Se  $G/H$  è di Hausdorff, il punto  $u_G H$  in  $G/H$  è un chiuso dunque  $H = p^{-1}(u_G H)$  è un

<sup>1</sup>In quanto controimmagine di  $x$  rispetto alla funzione  $g \mapsto gx : G \rightarrow X$ .

<sup>2</sup>Ossia l'insieme delle classi di equivalenza  $[x] = Gx$ .

chiuso ( $u_G$ =identità in  $G$ ).

Viceversa, sia  $H$  un sottogruppo chiuso e siano  $aH, bH \in G/H$  due elementi distinti. Poiché  $G$  è un gruppo topologico, la mappa

$$f : G \times G \rightarrow G, \quad (g, g') \mapsto g^{-1}g',$$

è continua, quindi  $f^{-1}(H)$  è chiuso.  $aH \neq bH$  dunque  $(a, b) \notin f^{-1}(H)$  (altrimenti  $a, b \in H$  e  $aH = bH$ ), allora c'è un intorno aperto di  $(a, b)$ , che possiamo prendere della forma  $U \times V$ , disgiunto da  $f^{-1}(H)$ . Per quanto osservato, le immagini di  $U$  e  $V$  in  $G/H$  sono intorni aperti disgiunti di  $aH$  e  $bH$ .  $\square$

Se  $G$  agisce transitivamente su  $X$ , c'è una biiezione

$$G/\text{Stab}(x) \rightarrow X \quad \forall x \in X.$$

Con qualche ipotesi in più si può avere un omeomorfismo, serve però un lemma preliminare.

**Lemma 1.2.2.** *Sia  $X$  uno spazio non vuoto e localmente compatto (e di Hausdorff) tale che  $X = \cup V_n$  dove  $(V_n)$  è una famiglia numerabile di sottoinsiemi chiusi. Allora almeno uno degli  $V_n$  ha un punto interno.*

*Dimostrazione.* Le ipotesi implicano che  $X$  sia regolare: i punti di  $X$  sono chiusi e per ogni punto  $x$  non contenuto in un insieme chiuso  $A$ , ci sono in  $X$  due aperti disgiunti  $U$  e  $V$  che contengono  $x$  ed  $A$  rispettivamente.

Si supponga per assurdo che nessun  $V_n$  abbia un punto interno. Sia  $U_1$  un sottoinsieme aperto non vuoto di  $X$  che abbia chiusura  $\bar{U}_1$  compatta. Poiché  $V_1$  non ha punti interni,  $U_1$  non può essere contenuto in  $V_1$ ; inoltre, poiché  $U_1$  è regolare, c'è un sottoinsieme aperto non vuoto  $U_2 \subset U_1$  tale che  $\bar{U}_2 \subset U_1 - V_1$ . Procedendo in questo modo si ottiene una successione di sottoinsiemi aperti non vuoti  $U_3, U_4, \dots$  tali che  $\bar{U}_{n+1} \subset U_n - V_n$ . Gli  $U_n$  sono una successione di compatti non vuoti, per cui  $\cap \bar{U}_n \neq \emptyset$  che contraddice  $X = \cup V_n$ .  $\square$

Finalmente si ottiene il risultato cercato.

**Teorema 1.2.3.** *Si supponga che  $G$  agisca transitivamente e con continuità su  $X$ . Se  $G$  ed  $X$  sono localmente compatti e di Hausdorff e  $G$  ammette una base numerabile per la topologia, allora la mappa*

$$[g] \mapsto gx : G/\text{Stab}(x) \rightarrow X$$

*è un omeomorfismo.*

*Dimostrazione.* È già noto che l'applicazione è una biiezione. Dalla definizione è ovvio che sia continua, resta da dimostrare che è aperta.

Sia  $U$  un sottoinsieme aperto di  $G$  e sia  $g \in U$ , si deve mostrare che  $gx$  è un punto interno di  $Ux$ .

Si consideri la mappa  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(h, h') \mapsto gh'h'$ . Tale mappa è continua e manda  $(e, e)$  in  $U$ , quindi c'è un intorno  $V$  di  $e$ , che si può considerare compatto (non necessariamente aperto), tale che  $V \times V$  sia mappato in  $U$ ; quindi  $gV^2 \subset U$ . Dopo aver rimpiazzato  $V$  con  $V \cap V^{-1}$ , si può assumere  $V^{-1} = V$ . (Si intende  $V^{-1} = \{h^{-1} : h \in V\}$ ;  $V^2 = \{hh' : h, h' \in V\}$ ).

Se  $e \in V$ ,  $G = \cup_{g \in G} gV$ . Ogni  $gV$  è l'unione di aperti della base numerabile, si prendano un numero sufficiente di  $g$  per fare in modo che ogni insieme della base sia contenuto in almeno un  $gV$ . A questo punto c'è un insieme numerabile di elementi  $g_1, g_2, \dots \in G$  tali che  $G = \cup g_n V$ .

Essendo gli  $g_n V$  compatti, la loro immagine  $g_n Vx$  in  $X$  è compatta, ma poiché  $X$  è di Hausdorff,  $g_n Vx$  è anche chiusa.

Il lemma precedente mostra che almeno uno degli  $g_n Vx$  ha un punto interno. Ma  $y \mapsto g_n y : X \rightarrow X$  è un omeomorfismo che manda  $Vx$  in  $g_n Vx$ , quindi  $Vx$  ha un punto interno, cioè  $\exists$  un punto  $hx \in Vx$  ed un sottoinsieme aperto  $W$  di  $X$  tali che  $x \in W \subset Vx$ . Dunque basta osservare che

$$gx = gh^{-1} \cdot hx \in gh^{-1}W \subset gV^2x \subset Ux$$

per dimostrare che  $gx$  è un punto interno di  $Ux$ . □

### 1.2.2 Azioni discontinue di gruppo

Sia  $\Gamma$  un gruppo che agisce su uno spazio topologico  $X$ . Se  $\Gamma \backslash X$  è di Hausdorff, le orbite sono chiuse; tuttavia questa condizione non è sufficiente per dire che il quoziente sia di Hausdorff. L'azione si dice *discontinua* se per ogni  $x \in X$  e per ogni successione infinita  $(\gamma_i)$  di elementi distinti di  $\Gamma$ , l'insieme  $\{\gamma_i x\}$  non ha punti di accumulazione; si dice *propriamente discontinua* se, per ogni coppia di punti  $x, y \in X$ , esistono due intorni  $U_x$  ed  $U_y$  (risp. di  $x$  ed  $y$ ) tali che l'insieme  $\{\gamma \in \Gamma : \gamma U_x \cap U_y \neq \emptyset\}$  sia finito.

**Proposizione 1.2.4.** *Sia  $G$  un gruppo localmente compatto che agisce su uno spazio topologico  $X$  tale che per un (e quindi ogni) punto  $x_0 \in X$  lo stabilizzatore  $K_{x_0}$  di  $x_0$  in  $G$  sia compatto e  $gK_{x_0} \mapsto gx_0 : G/K_{x_0} \rightarrow X$  sia un omeomorfismo. Le seguenti condizioni su un sottogruppo  $\Gamma$  di  $G$  sono equivalenti:*

- (a)  $\Gamma$  agisce in modo discontinuo su  $X$ ;
- (b)  $\Gamma$  agisce in modo propriamente discontinuo su  $X$ ;
- (c) per ogni  $A, B \subseteq X$  compatti, l'insieme  $\{\gamma \in \Gamma : \gamma A \cap B \neq \emptyset\}$  è finito;
- (d)  $\Gamma$  è un sottogruppo discreto di  $G$ .

Per la dimostrazione di tale proposizione si può far riferimento a [Mil74], [Miy89], [Ser06]. Il prossimo risultato rende il punto (c) più preciso.

**Proposizione 1.2.5.** *Siano  $G, K, X$  come nella Proposizione (1.2.4) e sia  $\Gamma$  un sottogruppo discreto di  $G$ .*

- (a) Per ogni  $x \in X$ , l'insieme  $\text{Stab}_\Gamma(x) = \{g \in \Gamma : gx = x\}$  è finito.
- (b) Per ogni  $x \in X$ , esiste un intorno  $U$  di  $x$  con la proprietà che se  $\gamma \in \Gamma$  e  $U \cap \gamma U \neq \emptyset$ , allora  $\gamma x = x$ .
- (c) Per ogni coppia di punti  $x, y \in X$  non appartenenti alla stessa  $\Gamma$ -orbita, esistono due intorni  $U$  di  $x$  e  $V$  di  $y$  tali che  $\gamma U \cap V = \emptyset$  per ogni  $\gamma \in \Gamma$ .

*Dimostrazione.* Sia  $p$  la mappa  $gK_{x_0} \mapsto gx_0 : G \rightarrow X$  e sia  $A \subseteq X$  compatto. Si scriva  $G = \cup V_i$  dove i  $V_i$  sono aperti con chiusura compatta  $\bar{V}_i$ . Allora  $A \subset \cup p(V_i)$  ed in effetti serve solo un numero finito di  $p(V_i)$  per ricoprire  $A$ . Allora  $p^{-1}(A) \subset \cup V_i K \subset \cup \bar{V}_i K$  (unioni finite) ed ogni  $\bar{V}_i K$  è compatto (in quanto immagine di  $\bar{V}_i \times K$  della mappa moltiplicativa  $G \times G \rightarrow G$ ). Dunque  $p^{-1}(A)$  è un sottoinsieme chiuso di un compatto e, perciò, è a sua volta compatto.

(a) Dimostrato che  $p^{-1}(cpt) = cpt$ , per  $p(g) = gx$  la tesi è evidente:  $p^{-1}(x)$  è un compatto e l'insieme in considerazione è  $\Gamma \cap p^{-1}(x)$ .

(b) Sia  $V$  un intorno compatto di  $x$ . Per la Proposizione 1.2.4 (c), esiste un insieme finito  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  di elementi di  $\Gamma$  tale che  $V \cap \gamma_i V \neq \emptyset$ . Siano  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$  i  $\gamma_i$  che fissano  $x$ . Per ogni  $i > s$ , si scelgano gli intorni disgiunti  $V_i$  di  $x$  e  $W_i$  di  $\gamma_i x$  e si ponga

$$U = V \cap (\cap_{i > s} V_i \cap \gamma_i^{-1} W_i).$$

Per  $i > s$ ,  $\gamma_i U \subset W_i$  che è disgiunto da  $V_i$  che contiene  $U$ .

(c) Si scelgano un intorno compatto  $A$  di  $x$  e uno  $B$  di  $y$ . Siano  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  gli elementi di  $\Gamma$  per cui  $\gamma_i A \cap B \neq \emptyset$ . Per ipotesi  $\gamma_i x \neq y$ , per cui si possono scegliere due intorni disgiunti  $U_i$  e  $V_i$  di  $\gamma_i x$  ed  $y$  rispettivamente. Per avere la tesi basta prendere

$$U = A \cap \gamma_1^{-1} U_1 \cap \dots \cap \gamma_n^{-1} U_n, \quad V = b \cap V_1 \cap \dots \cap V_n.$$

□

**Corollario 1.2.6.** *Sotto le ipotesi della Proposizione (1.2.5), lo spazio  $\Gamma \backslash X$  è di Hausdorff.*

*Dimostrazione.* Siano  $x$  ed  $y$  punti di  $X$  non appartenenti alla stessa  $\Gamma$ -orbita, si scelgano due intorni  $U$  e  $V$  come nella proposizione (1.2.5). Allora le immagini di  $U$  e  $V$  in  $\Gamma \backslash X$  sono due intorni disgiunti di  $\Gamma x$  e  $\Gamma y$ . □

Si dice che un gruppo  $G$  agisce liberamente su un insieme  $X$  se  $\text{Stab}(x) = u_G$  per ogni  $x \in X$ .

## 1.3 Cenni di Geometria delle Superfici di Riemann

Anche in questo caso si tratta essenzialmente di un elenco scarno di teoremi, basato su [Mil74]. Per approfondimenti si consiglia di leggere i seguenti riferimenti: [Miy89], [Gun66], [Gri89], [Jos06]. Nel testo che segue verrà presupposta la teoria dei rivestimenti, si consiglia come riferimento [Jos06].

Prima di sviluppare la teoria, può essere utile cercare di inquadrare il motivo per cui questa sezione si rivela necessaria anche se molti dei concetti devono ancora essere definiti.

Sia  $X$  una superficie di Riemann. È un fatto noto della topologia che esistono uno spazio topologico semplicemente connesso  $\tilde{X}$  (il rivestimento universale di  $X$ ) e un omeomorfismo locale  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ . C'è un'unica struttura complessa su  $\tilde{X}$  tale che  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  sia un isomorfismo locale di superfici di Riemann. Se  $\Gamma$  è il gruppo delle trasformazioni di rivestimento<sup>3</sup> di  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ , allora  $X = \Gamma \backslash \tilde{X}$ .

**Teorema 1.3.1** (Riemann Mapping Theorem). *Una superficie di Riemann semplicemente connessa è isomorfa ad una ed una sola delle seguenti:*

1.  $\mathbb{C}$ ;
2. il disco aperto unitario  $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ;
3. la sfera di Riemann.

In particolare, nel seguito, si studieranno superfici di Riemann che hanno  $D$  come rivestimento universale. Per essere precisi, si considererà il semipiano complesso superiore

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$$

che è isomorfo a  $D$  tramite la mappa  $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$  (nel gergo degli analisti complessi si dice che  $D$  ed  $\mathbb{H}$  sono conformemente equivalenti). Si cercherà di

<sup>3</sup>In inglese “covering transformations”.

studiare una superficie di Riemann della forma  $\Gamma$  su  $\mathbb{H}$  dove  $\Gamma$  è un gruppo discreto che agisce su  $\mathbb{H}$ . Un grande ed importante gruppo che agisce su  $\mathbb{H}$ , come si vedrà, è  $SL(2, \mathbb{R})$ : alcuni dei suoi sottogruppi, generalmente indicati con il simbolo  $\Gamma(N)$ , saranno al centro dell'analisi che si vuole intraprendere.

Anticipando qualche risultato, sia  $Y(N) = \Gamma(N) \backslash \mathbb{H}$ . Se si pone su  $Y(N)$  la topologia quoziente, esiste una sola struttura complessa su di esso per cui una funzione  $f$  su un aperto  $U \subseteq Y(N)$  è olomorfa se e solo se  $f \circ p$  è olomorfa su  $p^{-1}(U)$ . La superficie di Riemann  $Y(N)$  così ottenuta non è compatta ma esiste una via naturale per compattificarla aggiungendo un numero finito di punti.

La teoria che segue è necessaria per la definizione e lo studio delle superfici di Riemann.

### 1.3.1 Approccio classico

Sia  $X$  uno spazio topologico di Hausdorff connesso. Una *carta locale complessa* per  $X$  è una coppia  $(U, z)$  con  $U$  sottoinsieme aperto di  $X$  e  $z$  omeomorfismo  $U \rightarrow W \subseteq \mathbb{C}$  aperto. Due carte locali  $(U_i, z_i)$  e  $(U_j, z_j)$  si dicono *compatibili* se la funzione

$$z_i \circ z_j^{-1} : z_j(U_i \cap U_j) \rightarrow z_i(U_i \cap U_j)$$

è olomorfa con derivata non nulla (tale condizione ha senso quando  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ). Una famiglia di carte locali  $(U_i, z_i)$  è un *atlante conforme* se  $X = \bigcup U_i$  e se per ogni coppia  $(i, j) \in I \times I^4$ , le carte  $(U_i, z_i)$  e  $(U_j, z_j)$  sono compatibili. Due atlanti si dicono *equivalenti* se la loro unione è ancora un atlante. Questo definisce una relazione d'equivalenza sull'insieme degli atlanti, le classi d'equivalenza così ottenute si chiamano *strutture complesse* o *conformi* su  $X$ . Uno spazio  $X$  con una struttura complessa si chiama *superficie di Riemann*<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>Solo per ora,  $I$  indica l'insieme di indici che definiscono le carte.

<sup>5</sup>Per gli studiosi di geometria riemanniana, una superficie di Riemann non è altro che una varietà complessa di dimensione 1.

Sia  $\mathcal{U} = (U_i, z_i)_{i \in I}$  un atlante di  $X$ . Una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  su un sottoinsieme aperto  $U$  di  $X$  si dice *olomorfa* relativamente ad  $\mathcal{U}$  se

$$f \circ z^{-1} : z(U \cap U_i) \rightarrow \mathbb{C}$$

è olomorfa per ogni  $i \in I$ . Ovviamente, se  $\mathcal{U}'$  è un atlante equivalente,  $f$  è olomorfa relativamente ad  $\mathcal{U}$  se e solo se lo è relativamente ad  $\mathcal{U}'$ ; dunque ha senso dire che  $f$  è olomorfa rispetto ad una struttura complessa su  $X$ : una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  definita su un aperto  $U$  di una superficie Riemanniana  $X$  è olomorfa se lo è relativamente ad un atlante che definisce la struttura complessa su  $X$ .

Ricordando che una funzione  $f$  si dice *meromorfa* su un aperto  $U$  di  $\mathbb{C}$  quando esiste  $\Sigma$  sottoinsieme discreto di  $U$  per cui  $f$  è una funzione olomorfa su  $U \setminus \Sigma$  che ha al più un polo in ogni punto di  $\Sigma$  (cioè, per ogni  $s \in \Sigma$  esiste un  $m$  tale che  $(z - s)^m f(z)$  è olomorfa in un certo intorno di  $s$ ), si può definire come sopra una funzione meromorfa in un sottoinsieme aperto  $U$  di una superficie Riemanniana.

Una mappa  $f : X \rightarrow X'$  tra due superfici Riemanniane si dice *olomorfa* se per ogni punto  $P$  di  $X$  esistono due carte locali  $(U, z)$  di  $P$  ed  $(U', z')$  di  $f(P)$  tali che  $z' \circ f \circ z^{-1} : z(U) \rightarrow z'(U)$  è olomorfa. Una mappa olomorfa  $f$  con derivata  $\frac{\partial f}{\partial z}$  mai nulla è detta *conforme*.

Le superfici di Riemann sono varietà differenziabili su cui si può definire il concetto di angolo senza dover necessariamente considerare le metriche. Una mappa è conforme se e solo se preserva gli angoli. Per una dimostrazione di questo fatto si consiglia la lettura di [Miy89], [Jos06], o [Neh82].

Un *isomorfismo* di superfici Riemanniane è una mappa olomorfa e biiettiva con inversa olomorfa.

### 1.3.2 Superfici di Riemann come spazi anellati

Sia  $K$  un campo fissato e sia  $X$  uno spazio topologico. Si supponga di assegnare, per ogni  $U \subseteq X$  aperto un insieme  $\mathcal{O}(U)$  di funzioni  $U \rightarrow K$ ;  $\mathcal{O}$  si chiama *fascio di  $K$ -algebre* su  $X$  se:

1.  $f, g \in \mathcal{O}(U) \Rightarrow f \pm g, fg \in \mathcal{O}(U)$ ;
2. la funzione  $x \mapsto 1$  è in  $\mathcal{O}(U)$ ;
3.  $f \in \mathcal{O}(U), V \subseteq U \Rightarrow f|_V \in \mathcal{O}(V)$ ;
4. sia  $U = \bigcup U_i$  un ricoprimento aperto di  $U \subseteq X$  aperto e, per ogni  $i$ , sia  $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ ; se  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$  per ogni  $i, j$ , allora esiste una  $f \in \mathcal{O}(U)$  tale che  $f|_{U_i} = f_i$  per ogni  $i$ .

Se  $Y$  è un sottoinsieme aperto di  $X$ , restringendo la mappa  $U \mapsto \mathcal{O}(U)$  ai sottoinsiemi aperti di  $Y$ <sup>6</sup>, si ottiene un fascio di  $k$ -algebre  $\mathcal{O}|_Y$  su  $Y$ .

Da ora in avanti, con *spazio anellato* si intende una coppia  $(X, \mathcal{O}_X)$  in cui  $X$  è uno spazio topologico ed  $\mathcal{O}_X$  un fascio di  $\mathbb{C}$ -algebre (in genere si ometterà il pedice  $X$ ). Un *morfismo*  $\varphi : (X, \mathcal{O}) \rightarrow (X', \mathcal{O}')$  di spazi anellati è una mappa continua  $\varphi : X \rightarrow X'$  tale che per ogni  $U' \subseteq X'$  aperto,

$$\mathcal{O}'(U') \ni f \rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}(U')).$$

Un *isomorfismo*  $\varphi : (X, \mathcal{O}) \rightarrow (X', \mathcal{O}')$  di spazi anellati è un omeomorfismo tale che  $\varphi$  e  $\varphi^{-1}$  siano morfismi. Dunque un omeomorfismo  $\varphi : X \rightarrow X'$  è un isomorfismo di spazi anellati se, per ogni  $U$  aperto in  $X$  con immagine  $U'$  in  $X'$ , la mappa

$$f \mapsto f \circ \varphi : \mathcal{O}'(U') \rightarrow \mathcal{O}(U)$$

è biiettiva.

Ad esempio, per ogni  $V \subseteq \mathbb{C}$  aperto, esiste uno fascio  $\mathcal{O}_V$  con

$$\mathcal{O}_V(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ olomorfe}\},$$

per ogni  $U \subseteq V$ . La coppia  $(V, \mathcal{O}_V)$  si chiama *spazio anellato standard*.

**Proposizione 1.3.2.** *Sia  $X$  uno spazio topologico di Hausdorff. Sia  $\mathcal{U} = (U_i, z_i)$  un atlante di  $X$  e, per ogni  $U \subseteq \mathbb{C}$  aperto, sia  $\mathcal{O}(U)$  l'insieme delle funzioni  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfe relativamente ad  $\mathcal{U}$ . Allora  $U \mapsto \mathcal{O}(U)$  è un fascio di  $\mathbb{C}$ -algebre su  $X$ .*

<sup>6</sup>Per ogni  $U \subseteq Y \subseteq X$  aperto, si definisce  $\mathcal{O}|_Y(U) = \mathcal{O}(U)$ .

**Proposizione 1.3.3.** *Sia  $X$  uno spazio topologico di Hausdorff. Se  $\mathcal{U}$  ed  $\mathcal{U}'$  sono atlanti di  $X$ ; allora  $\mathcal{U}$  ed  $\mathcal{U}'$  sono equivalenti se e solo se definiscono gli stessi fasci di funzioni olomorfe.*

Dunque, una struttura complessa su  $X$  definisce un fascio di  $\mathbb{C}$ -algebre su  $X$ , e il fascio determina in modo unico la struttura complessa.

**Teorema 1.3.4.** *Un fascio  $\mathcal{O}_X$  di  $\mathbb{C}$ -algebre su  $X$  deriva da una struttura complessa se e solo se soddisfa la seguente condizione:*

(\*) *esiste un ricoprimento aperto  $X = \bigcup U_i$  di  $X$  tale che ogni  $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$  è isomorfo allo spazio anellato standard.*

Quindi, data una struttura complessa su  $X$  è lo stesso che dare un fascio di  $\mathbb{C}$ -algebre che soddisfa (\*).

### 1.3.3 Forme differenziali

Una *forma differenziale* su  $U \subseteq \mathbb{C}$  aperto è un'espressione della forma  $f(z) dz$  in cui  $f$  è un funzione meromorfa su  $U$ . Data una qualunque funzione meromorfa  $f(z)$  su  $U$ , le si associa la forma differenziale  $df := \frac{df}{dz} dz$ .

Sia  $w : U \rightarrow U'$  un diffeomorfismo tra  $U$  ed un altro aperto  $U'$  di  $\mathbb{C}$ ; si può definire  $z' := w(z)$ . Se  $\omega = f(z') dz'$  è una forma differenziale su  $U'$ , allora  $w^*(\omega)$  è la forma differenziale  $f(w(z)) \frac{dw(z)}{dz} dz$  su  $U$ .

Sia  $X$  una superficie di Riemann e sia  $(U_i, z_i)$  un atlante di  $X$ . Per dare una forma differenziale su  $X$  è sufficiente dare le forme differenziali  $\omega_i = f(z_i) dz_i$  su  $z_i(U_i)$  tali che, se  $z_i = w_{ij}(z_j)$  in cui  $w_{ij}$  è la mappa conforme<sup>7</sup>  $z_i \circ z_j^{-1} : z_j(U_i \cap U_j) \rightarrow z_i(U_i \cap U_j)$ , allora  $w_{ij}^*(\omega_i) = \omega_j$ , cioè

$$f_j(z_j) dz_j = f_i(w_{ij}(z_j)) \frac{dw_{ij}(z_j)}{dz_j} dz_j.$$

**OSSERVAZIONE 3.** Si noti la somiglianza con il caso delle funzioni. Per dare una funzione meromorfa  $f$  su  $X$ , come già detto, è sufficiente dare funzioni meromorfe  $f_i(z_i)$  su  $z_i(U_i)$  e richiedere che si sovrappongano bene, cioè che  $f_j(z_j) = f_i(w_{ij}(z_j))$  su  $z_j(U_i \cap U_j)$ .

<sup>7</sup>In breve, una funzione che conserva gli angoli.

Una forma differenziale si dice *di primo tipo* (o olomorfa) se non presenta poli in  $X$ , *di secondo tipo* se ha residuo 0 in ogni punto di  $X$  in cui presenta un polo, *di terzo tipo* altrimenti.

ESEMPIO 1.3.1 (La Sfera di Riemann).

Sia  $X$  la sfera unitaria

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

in  $\mathbb{R}^3$  e sia  $P$  il polo nord  $(0, 0, 1)$ . Facendo la proiezione stereografica da  $P$  si ottiene la mappa

$$(x, y, z) \mapsto \frac{x + iy}{1 - z} : X \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{C},$$

che può essere presa come carta locale per  $X$ . In modo simile, la proiezione stereografica dal polo sud fornisce l'altra carta coordinata. Queste due carte coordinate definiscono una struttura complessa<sup>8</sup> su  $X$ .  $X$  con tale struttura complessa è comunemente chiamato *sfera di Riemann*.

La sfera di Riemann  $S$ , d'altro canto, può essere pensata come l'insieme delle rette che attraversano l'origine in  $\mathbb{C}^2$ . Dunque, un punto su  $S$  è determinato (origine a parte) da un punto sulla retta. Con questa identificazione, la sfera di Riemann è identificata con

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = ((\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus \{(0, 0)\})/\mathbb{C}^*$$

dove  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Si indica con  $(x_0 : x_1)$  la classe di equivalenza di  $(x_0, x_1)$ ; in altre parole  $(x_0 : x_1) = (cx_0, cx_1)$  per  $c \neq 0$ .

Sia  $U_0$  il sottoinsieme per cui  $x_0 \neq 0$ ;  $z_0 : (x_0 : x_1) \mapsto x_1/x_0$  è un omeomorfismo  $U_0 \rightarrow \mathbb{C}$ . Allo stesso modo, se  $U_1$  è il sottoinsieme per cui  $x_1 \neq 0$ ,  $z_1 : (x_0 : x_1) \mapsto x_0/x_1$  è un omeomorfismo  $U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ . La coppia  $(U_0, z_0), (U_1, z_1)$  è un atlante di  $S$ . Si noti che su  $U_0 \cap U_1$ ,  $z_0$  e  $z_1$  sono entrambi definiti e  $z_1 = z_0^{-1}$ ; infatti

<sup>8</sup>che la sovrapposizione non crei problemi è il risultato di un semplice calcolo.

$z_0(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C} \setminus \{0\} = z_1(U_0 \cap U_1)$  e la mappa  $w_{01} : z_1(U_0 \cap U_1) \rightarrow z_0(U_0 \cap U_1)$  è  $z \mapsto z^{-1}$ .

Una funzione meromorfa su  $S$  è definita da una funzione  $f_0(z_0)$  di variabile  $z_0 \in \mathbb{C}$  e da una funzione  $f_1(z_1)$  di variabile  $z_1 \in \mathbb{C}$  tale che per  $z_0 z_1 \neq 0$ ,  $f_1(z_1) = f_0(z_1^{-1})$ . In altri termini è definita da una funzione  $f(z)$  meromorfa su  $\mathbb{C}$  tale che  $f(z^{-1})$  sia ancora meromorfa su  $\mathbb{C}$  (se questo è vero è automaticamente meromorfa su  $\mathbb{C}^*$ ). Come si vedrà nella prossima sezione, una funzione è meromorfa su  $S$  se e solo se è una funzione razionale in  $z$ , cioè del tipo  $P(z)/Q(z)$  con  $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ ,  $Q \neq 0$ .

Una forma differenziale meromorfa su  $S$  è definita da una forma differenziale  $f_0(z_0) dz_0$  su  $\mathbb{C}$  ed da una forma differenziale  $f_1(z_1) dz_1$  su  $\mathbb{C}$  tali che

$$f_1(z_1) = f_0(z_1^{-1}) \frac{-1}{z_1^2}$$

per  $z_1 \neq 0$ .

### 1.3.4 Analisi su superfici di Riemann compatte

Si noti che una superficie di Riemann  $X$ , considerata come uno spazio topologico, è orientabile: ogni sottoinsieme aperto del piano complesso ha un'orientazione naturale; dunque ogni atlante di  $X$  ha un'orientazione naturale, e questa si mantiene nelle sovrapposizioni in quanto le mappe conformi mantengono l'orientazione. Si noti anche che una mappa olomorfa  $f : X \rightarrow S$  (sfera di Riemann) può essere vista come una funzione meromorfa su  $X$ , e tutte le funzioni meromorfe sono di questa forma<sup>9</sup>. Le uniche funzioni olomorfe su tutta la superficie di Riemann sono le funzioni costanti.

**Proposizione 1.3.5.** *Una funzione meromorfa  $f$  su una superficie di Riemann compatta ha lo stesso numero di poli e di zeri (contando le molteplicità).*

<sup>9</sup>Per quanto riguarda la prima affermazione: una funzione  $f : X \rightarrow S$  è meromorfa se ogni punto  $p \in X$  ammette un intorno coordinato  $U$  tale che  $f$  o  $1/f$  sia olomorfa su  $U$ .

**Proposizione 1.3.6.** *Sia  $\omega$  una forma differenziale su una superficie di Riemann compatta; la somma dei residui di  $\omega$  ai poli è zero.*

Applicando la prima proposizione a  $f - c$  per qualche costante fissata  $c$ , se  $n$  è il numero di poli di  $f$ , si ha

**Corollario 1.3.7.** *Sia  $f$  una funzione non costante meromorfa su una superficie di Riemann compatta  $X$ . Allora esiste un intero  $n > 0$  tale che  $f$  assume ogni valore  $n$  volte (contando le molteplicità).*

L'intero  $n$  è chiamato *valenza* di  $f$ . Una funzione costante ha valenza 0. Se  $f$  ha valenza  $n$ , allora definisce una funzione  $X \rightarrow S$  (sfera di Riemann) che è  $n$  a 1 (contando le molteplicità) e, se non si considerassero le molteplicità, si avrebbe al più un numero finito di *punti di ramificazione*, cioè in cui la funzione non è  $n$  a 1.

**Proposizione 1.3.8.** *Sia  $S$  la sfera di Riemann. Le funzioni meromorfe sono precisamente le funzioni razionali di  $z$ , cioè il campo delle funzioni meromorfe su  $S$  è  $\mathbb{C}(z)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $g(z)$  una funzione meromorfa su  $S$ . A meno di una sostituzione di  $g(z)$  con  $g(z - c)$  per qualche  $c$ , si può supporre che  $g(z)$  non presenti zeri o poli in  $\infty$  (= Polo Nord).

Si supponga che  $g(z)$  abbia poli di ordini  $m_i$  nei punti  $p_i$  per  $i = 1, \dots, k$  e zeri di ordine  $n_i$  nei punti  $q_i$  per  $i = 1, \dots, h$  e nessun altro zero o polo. La funzione

$$g(z) \frac{\prod (z - p_i)^{m_i}}{\prod (z - q_i)^{n_i}}$$

non ha zeri o poli in punti diversi da  $\infty$  e nemmeno in  $\infty$  in quanto per la Proposizione 1.3.5,  $\sum m_i = \sum n_i$ . In definitiva deve essere costante, quindi

$$g(z) = C \times \frac{\prod (z - p_i)^{m_i}}{\prod (z - q_i)^{n_i}}.$$

□

**Proposizione 1.3.9.** *Sia  $f$  una funzione meromorfa non costante con valenza  $n$  su una superficie di Riemann non compatta  $X$ . Allora ogni funzione meromorfa  $g$  su  $X$  è la radice di un polinomio di grado minore o uguale ad  $n$  con coefficienti in  $\mathbb{C}(f)$ .*

La dimostrazione di questa proposizione, seppure modestamente macchinosa, non è di difficile comprensione ma, per gli scopi di questa sezione, neppure di fondamentale importanza. La dimostrazione del teorema seguente (una parte della quale è strettamente legata alla proposizione precedente), invece, dipende anche dal Teorema di Riemann-Roch (di cui si parlerà nella prossima sezione) ed è decisamente non banale. Nel caso il lettore fosse interessato a consultarla, può far riferimento a [Gun66].

**Teorema 1.3.10.** *Sia  $X$  una superficie di Riemann compatta. Esiste almeno una funzione meromorfa non costante  $f$  su  $X$ , e l'insieme di tali funzioni forma un campo finitamente generato  $\mathcal{M}(X)$  di grado di trascendenza<sup>10</sup> 1 su  $\mathbb{C}$ .*

### 1.3.5 Il teorema di Riemann-Roch

Il Teorema di Riemann-Roch descrive quante funzioni ci sono su una superficie di Riemann che hanno un numero di poli e di zeri fissato.

Sia  $X$  una superficie di Riemann compatta. Il gruppo dei divisori,  $Div(X)$ , su  $X$  è il gruppo libero abeliano (additivo) generato dai punti su  $X$ , quindi un elemento di  $Div(X)$  non è altro che una somma finita  $\sum n_i P_i$  con  $n_i \in \mathbb{Z}$ . Un divisore  $D = \sum n_i P_i$  si dice *positivo* (o *effettivo*) se ogni  $n_i$  è non negativo, in tal caso si scrive  $D \geq 0$ .

Sia  $f$  una funzione meromorfa non nulla su  $X$ . Per ogni punto  $P \in X$ , sia  $ord_P = m$ ,  $-m$  o  $0$ , a seconda che  $f$  abbia un polo di ordine  $m$  in  $P$ , uno

<sup>10</sup>Il grado di trascendenza di una estensione di campo  $K$  su un campo  $F$  è il più piccolo numero di elementi di  $K$  che non sono algebrici su  $F$  necessari per generare  $K$ . In parole povere, è una misura della “grandezza” dell'estensione.

0 di ordine  $m$  in  $P$  o nessuno 0 e nessun polo in  $P$ . Il *divisore* di  $f$  è

$$\operatorname{div}(f) = \sum \operatorname{ord}_P(f) \cdot P,$$

che è una somma finita in quanto zeri e poli formano un insieme discreto e si sta assumendo  $X$  compatto.

La mappa  $f \mapsto \operatorname{div}(f) : \mathbb{C}(X)^* \rightarrow \operatorname{Div}(X)$  è un omomorfismo e la sua immagine è chiamata il gruppo dei *divisori principali*. Due divisori si dicono *linearmente equivalenti* se la loro differenza è principale. Il *grado* (*deg*) di un divisore  $\sum n_i P_i$  è  $\sum n_i$ . La mappa  $D \mapsto \operatorname{deg}(D)$  è un omomorfismo  $\operatorname{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  il cui nucleo contiene i divisori principali. Dunque ha senso parlare di grado di una classe di equivalenza lineare di divisori.

È possibile legare un divisore ad una forma differenziale  $\omega$ : sia  $P \in X$ , e sia  $(U_i, z_i)$  una carta coordinata locale  $P$ ; la forma differenziale  $\omega$  è descritta dai differenziali  $f_i(z_i) dz_i$  su  $U_i$  e  $\operatorname{ord}_P(\omega) := \operatorname{ord}_P(f_i)$ . Quindi  $\operatorname{ord}_P(\omega)$  è indipendente dalla scelta delle carte coordinate  $U_i$  (in quanto le  $w_{ij}$  e le loro derivate non hanno zeri né poli) e possiamo definire

$$\operatorname{div}(\omega) = \sum \operatorname{ord}_P(\omega) \cdot P.$$

Di nuovo, questa è una somma finita e per ogni funzione meromorfa  $f$  si ha

$$\operatorname{div}(f\omega) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(\omega).$$

Se  $\omega$  è una forma differenziale non nulla, ogni altra forma può essere scritta come  $f\omega$  per qualche  $f \in \mathcal{M}(X)$  e dunque la classe di equivalenza lineare di  $\operatorname{div}(\omega)$  è indipendente da  $\omega$ ; per questo motivo,  $\operatorname{div}(\omega)$  si indica a volte con la sola lettera  $K$ .

Per un divisore  $D$ , si definisce lo spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) : \operatorname{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Se  $D' = D + \operatorname{div}(g)$ , la mappa  $f \mapsto fg^{-1}$  è un isomorfismo tra  $L(D)$  ed  $L(D')$ , quindi la dimensione  $l(D)$  di  $L(D)$  dipende solo dalla classe di equivalenza lineare di  $D$ .

**Teorema 1.3.11** (Riemann-Roch). *Sia  $X$  una superficie di Riemann compatta. Allora esiste un intero  $g \geq 0$  tale che per ogni divisore  $D$ ,*

$$l(D) = \deg(D) + 1 - g + l(K - D).$$

*Dimostrazione.* Per una dimostrazione del teorema si può consultare [Jos06].

□

Si noti che nell'enunciato del teorema di Riemann-Roch si può sostituire al divisore la classe di divisori.

**Corollario 1.3.12.** *Un divisore canonico  $K$  ha grado  $2g - 2$  e  $l(K) = g$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $D = 0$  in (1.3.11). Le uniche funzioni per cui  $\text{div}(f) \geq 0$  sono quelle costanti dunque l'equazione diventa  $1 = 0 + 1 - g + l(K)$ . E quindi  $l(K) = g$ .

Sia ora  $D = K$ , l'equazione diventa  $g = \deg(K) + 1 - g + 1$ , da cui  $\deg(K) = 2g - 2$ . □

Sia  $K = \text{div}(\omega)$ .  $f \mapsto f\omega$  è un isomorfismo tra  $L(D)$  e lo spazio delle forme differenziali olomorfe su  $X$ , che di conseguenza ha dimensione  $g$ .

Guardando al teorema di Riemann-Roch, il termine difficile da valutare è  $l(K - D)$ , per questo è utile notare che se  $\deg(D) > 2g - 2$ ,  $L(K - D) = 0$ <sup>11</sup>. Di conseguenza

**Corollario 1.3.13.** *Se  $\deg(D) < 2g - 2$ , allora  $l(D) = \deg(D) + 1 - g$ .*

ESEMPIO 1.3.2.

Ad esempio, sia  $S$  la sfera di Riemann e sia  $D = mP_\infty$ , dove  $P_\infty$  è il "punto all'infinito (Polo Nord o Polo Sud)". Allora  $L(D)$  è lo spazio delle funzioni meromorfe su  $\mathbb{C}$  con, nel peggiore dei casi, un polo di ordine  $m$  all'infinito e nessun polo altrove. Queste funzioni sono i polinomi di grado  $\leq m$  e formano uno spazio vettoriale  $m + 1$  dimensionale, in altre parole  $l(D) = \deg(D) + 1$ ,

<sup>11</sup>Se  $f \in \mathcal{M}(X)^*$ ,  $\deg(D) > 2g - 2 \Rightarrow \deg(\text{div}(f) + K - D) < 0$  e quindi  $\text{div}(f) + K - D$  non può essere un divisore positivo.

e dunque, per il teorema di Riemann-Roch,  $g = 0$ . Si consideri il differenziale  $dz$  su  $\mathbb{C}$  e sia  $z' = 1/z$ ,  $dz = -\frac{1}{z^2} dz'$ . Il differenziale  $dz$  si estende ad un differenziale meromorfo su  $S$  con un polo di ordine 2 all'infinito. Quindi  $\deg(\text{div}(\omega)) = -2$ , in accordo con e formule precedenti.

### 1.3.6 Il genere di $X$

Sia  $X$  una superficie di Riemann compatta. Poiché possiamo pensarla come spazio topologico, si possono definire i gruppi di coomologia  $H_0(X, \mathbb{R})$ ,  $H_1(X, \mathbb{R})$  ed  $H_2(X, \mathbb{R})$ . È un fatto noto (cfr. [Dol05], [Jos06]) che  $H_0$  ed  $H_2$  hanno dimensione 1 mentre  $H_1$  ha dimensione  $2g$  e, come si vedrà tra breve,  $g$  è proprio il valore che compare nel teorema di Riemann-Roch. Dunque  $g$  dipende solamente dalla struttura topologica dello spazio e non da quella complessa. La *caratteristica di Eulero-Poincaré* di  $X$  è definita

$$\chi(X) := \dim H_0 - \dim H_1 + \dim H_2 = 2 - 2g.$$

ESEMPIO 1.3.3.

Sia  $\epsilon \in \mathbb{N}$ . Si consideri la mappa  $z \mapsto z^\epsilon : D \rightarrow D$  disco aperto unitario. Questa mappa è esattamente  $\epsilon : 1$ , eccetto nell'origine dove presenta un punto di ramificazione di ordine  $\epsilon$ . Si consideri su  $D$  il differenziale  $dz'$  definito dalla mappa  $z' = w(z) = z^\epsilon$ . L'immagine inversa del differenziale  $dz'$  sarà  $dz' = dw(z) = \epsilon z^{\epsilon-1} dz$ , dunque  $w^*(dz')$  ha uno zero di ordine  $\epsilon - 1$  in 0.

Sia  $f : Y \rightarrow X$  una mappa olomorfa (non costante) tra superfici di Riemann compatte. In accordo con i teoremi di rappresentazione locale per le funzioni olomorfe, per ogni  $P \in Y$  esiste una carta locale attorno a  $P$  ed ad  $f(P)$  per cui  $f$  può essere scritta (localmente) come  $z \mapsto z^\epsilon$  (cfr. [Jos06], [Har77]). I punti  $P$  per cui  $\epsilon > 1$  si dicono punti di ramificazione<sup>12</sup> di ordine  $\epsilon - 1$ . Si noti che questa definizione coincide con quella già fornita

<sup>12</sup>Per i geometri algebrici si tratta della molteplicità di  $P$  nella fibra di  $f$ .

in precedenza. Poiché  $Y$  è compatto esistono solo un numero finito di punti di ramificazione (cfr. [Jos06], [Har77]).

**Lemma 1.3.14.** *Sia  $f : Y \rightarrow X$  una mappa olomorfa (non costante) tra superfici di Riemann compatte. Allora esiste  $\mu \in \mathbb{N}$  tale che*

$$\sum_{P \in f^{-1}(Q)} (\epsilon_P + 1) = \mu$$

per ogni  $Q \in X$ . Di conseguenza  $f$  assume ogni valore in  $X$  precisamente  $\mu$  volte, contate le molteplicità.

**Teorema 1.3.15** (Formula di Riemann-Hurwitz). *Sia  $f : Y \rightarrow X$  una mappa olomorfa tra superfici di Riemann compatte che sia anche  $\mu : 1$  (a meno di un insieme finito di punti). Per ogni punto  $P$  di  $X$ , sia  $\epsilon_P$  l'ordine di ramificazione di  $f$  in  $P$ ; allora*

$$2g(Y) - 2 = (2g(X) - 2)\mu + \sum (\epsilon_P - 1).$$

*Dimostrazione.* Sia  $\omega$  un differenziale su  $X$  che non abbia poli o zeri in un punto di ramificazione di  $X$ . Allora  $f^*\omega$  ha un polo o uno zero in corrispondenza di ogni polo o zero di  $\omega$  (e dello stesso ordine); inoltre ha uno zero di ordine  $\epsilon - 1$  in ogni punto di ramificazione di  $Y$  per l'osservazione precedente. Quindi

$$\deg(f^*\omega) = \mu \deg(\omega) + \sum (\epsilon_P - 1)$$

e si può applicare il primo corollario del Teorema di Riemann-Roch.  $\square$

Si è visto che le due nozioni di genere sono concordi per la sfera di Riemann  $S$ . D'altra parte, per ogni superficie di Riemann  $X$ , il Teorema 1.3.10 garantisce l'esistenza di una funzione non costante  $f : X \rightarrow S$ ; dunque, poiché per  $S$  il valore fornito è  $g(S) = 0$  in entrambi i casi, la formula appena trovata garantisce che le due nozioni di genere forniscono lo stesso valore anche per  $X$ !

## 1.4 Metriche su Superfici di Riemann

Per tale sezione si fa riferimento a [Jos06], [Jos05] e [Miy89]. Si presupporrà tutta la teoria relativa alle varietà differenziabili e agli operatori differenziali necessaria, nei riferimenti già indicati si possono trovare tutte le integrazioni opportune. Come in precedenza, si tratta di un elenco scarso di definizioni e teoremi della geometria differenziale funzionali allo studio che si vuole intraprendere successivamente. A tal proposito si sono presi dei fatti (che riguardano il caso studiato) direttamente come definizioni, in modo da evitare di dover recuperare un numero eccessivo di concetti e teorie per poterli spiegare, la validità di quanto si affermerà può essere verificata direttamente nei testi di riferimento (ed in qualunque altro buon testo di geometria riemanniana).

Una *metrica riemanniana conforme* su una superficie di Riemann  $X$  è definita in coordinate locali come

$$\lambda^2(z) dz d\bar{z}, \quad \lambda(z) > 0 \quad (1.1)$$

dove  $\lambda \in \mathbb{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ . Se  $w \mapsto z(w)$  è un cambio di coordinate locali, la metrica si trasforma in

$$\lambda^2(z) \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{w}} dw d\bar{w}$$

dove  $w = u + iv$ ,  $\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right)$  e  $\frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right)$ .

La lunghezza di una curva rettificabile<sup>13</sup>  $\gamma$  su  $X$  è data da

$$\text{len}(\gamma) := \int_{\gamma} \lambda(z) |dz|$$

e l'area di  $B \subseteq X$  misurabile è data da

$$\text{area}(B) := \int_B \lambda^2(z) \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$$

dove il fattore  $i/2$  dipende dal fatto che

$$dz \wedge d\bar{z} = (dx + i dy) \wedge (dx - i dy) = -2i dx \wedge dy.$$

---

<sup>13</sup>O lunghezza d'arco.

Le *isometrie* non solo preservano gli angoli (sono conformi) ma lasciano inalterata la lunghezza d'arco.

La *distanza* tra due punti  $z_1, z_2 \in X$  è definita come

$$d(z_1, z_2) := \inf\{\text{len}(\gamma) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ curva rettificabile t.c. } \gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2\}.$$

La metrica si dice *completa* se ogni successione  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  di Cauchy rispetto a  $d(\cdot, \cdot)$  ha limite in  $X$ . Si noti (cfr. [Miy89], [Jos06]) che la topologia definita dalla metrica  $d(\cdot, \cdot)$  e la topologia originale di  $X$  come superficie di Riemann sono coincidenti.

Si chiama *potenziale* per la metrica  $\lambda^2(z) dz d\bar{z}$  la funzione  $F(z)$  tale che

$$4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F(z) = \lambda^2(z).$$

Si può dimostrare che

**Lemma 1.4.1.** *Lunghezze, aree e potenziali non dipendono dalle coordinate locali scelte.*

Si definisce *operatore di Laplace-Beltrami* rispetto alla metrica  $\lambda^2(z) dz d\bar{z}$ , l'operatore differenziale

$$\Delta := \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad z = x + iy.$$

Si noti che per  $z = x + iy$ ,  $\lambda^2 dz d\bar{z} = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$ . Cioè la metrica Euclidea differisce da quella considerata solo per il fattore conforme  $\lambda^2$ . In particolare, gli angoli rispetto  $\lambda^2 dz d\bar{z}$  sono gli stessi rispetto alla metrica Euclidea.

Si chiama *curvatura (di Gauss) della metrica*  $\lambda^2(z) dz d\bar{z}$  il numero

$$K = -\Delta \log \lambda.$$

Un importante lemma (cfr. [Jos06] per la dimostrazione) afferma che

**Lemma 1.4.2.** *I potenziali metrici, la metrica, l'operatore di Laplace-Beltrami e la curvatura della metrica sono invarianti per isometrie tra superfici di Riemann.*

Inoltre, se  $X$  ed  $Y$  sono superfici di Riemann di metriche  $\lambda^2(z) dz d\bar{z}$  e  $\rho^2(w) dw d\bar{w}$ , allora  $f : X \rightarrow Y$  definita  $f = w(z)$  è un'isometria se e solo se è biettiva, conforme ( $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} w(z) = 0$ ) e tale che

$$\rho^2(w) \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = \lambda^2(z).$$

Proprio per questo, a volte, è più semplice studiare le metriche per mezzo dei potenziali: in quanto invarianti per cambi di coordinate ed isometrie forniscono un metodo semplice per studiare il comportamento della metrica rispetto alle trasformazioni.

Un esempio banale di varietà riemanniana conforme è dato dal piano complesso  $\mathbb{C}$  con la metrica Euclidea  $dz d\bar{z} = dx^2 + dy^2$ . In questo caso  $K \equiv 0$ .

Un lemma centrale riguardo a quanto detto fin qui è il seguente.

**Lemma 1.4.3.** *Ogni superficie di Riemann compatta  $X$  ammette una metrica riemanniana conforme.*

*Dimostrazione.* Per ogni  $z \in X$ , esiste una carta locale definita in un qualche intorno aperto  $U_z$ :

$$f_z : U_z \rightarrow \mathbb{C}.$$

Sia  $D_z \subset f_z(U_z)$  un disco aperto completamente contenuto in  $f_z(U_z)$ , e sia  $V_z := U_z \cap f_z^{-1}(D_z)$ . Si consideri la carta data dalla restrizione di  $f_z$  a  $f_z^{-1}(D_z)$ :

$$\phi_z = f_z|_{f_z^{-1}(D_z)} : V_z \rightarrow \mathbb{C}.$$

Poiché  $X$  è compatto, può essere ricoperto con un numero finito di intorni  $V_{z_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Per ogni  $i$ , si può scegliere una funzione liscia  $\eta_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\eta_i > 0$  su  $D_{z_i}$  mentre  $\eta_i = 0$  su  $\mathbb{C} \setminus D_{z_i}$ .

Su  $D_{z_i}$  si può usare la metrica conforme

$$\eta_i(w) dw d\bar{w}.$$

Questo induce su  $V_{z_i} = \phi^{-1}(D_{z_i})$  una metrica conforme. La somma di queste metriche locali su  $i = 1, \dots, n$  è positiva su tutto  $X$  e dunque definisce una metrica conforme su  $X$ .  $\square$

## 1.5 Cenni di Analisi Funzionale e Teoria Spettrale

In questa sezione si sintetizzerà la teoria degli operatori non limitati in spazi di Hilbert richiesta per comprendere le implicazioni dei teoremi presentati nella sezione successiva. Per una trattazione esauriente e completa di dimostrazioni si consigliano: [RS80] e [Con85].

### 1.5.1 Operatori non limitati autoaggiunti ed essenzialmente autoaggiunti

Se  $X$  è uno spazio normato, un *operatore* in  $X$  è un'applicazione lineare

$$A : D_A \rightarrow X,$$

dove  $D_A \subseteq X$  è un sottospazio di  $X$  (in generale non chiuso) detto *dominio* di  $A$ . Il sottospazio di  $X \times X$

$$G_A := \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$$

è detto *grafico* di  $A$ .

Se  $A$  è un operatore nello spazio normato  $X$ , un operatore  $B$  sullo spazio  $X$  si dice *estensione* di  $A$  (o  $A \subset B$ ) se  $G_A \subset G_B$ .

Sia  $A$  un operatore nello spazio normato  $X$ .

- (a)  $A$  è detto *chiuso* se il suo grafico è chiuso nella topologia prodotto di  $X \times X$ . In altre parole,  $A$  è chiuso se, per ogni successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D_A$  tale che  $x_n \rightarrow x \in X$  e  $Ax_n \rightarrow y \in X$  per  $n \rightarrow \infty$ , si ha  $x \in D_A$  e  $y = Ax$ .
- (b)  $A$  è detto *chiudibile* se la chiusura  $\overline{G_A}$  del suo grafico è ancora il grafico di un operatore (che risulta essere necessariamente chiuso). Tale operatore si indica con  $\overline{A}$  e si chiama *chiusura* di  $A$ .

La seguente proposizione caratterizza gli operatori chiudibili.

**Proposizione 1.5.1.** *Sia  $A$  un operatore nello spazio normato  $X$ , allora sono equivalenti:*

1.  $A$  è chiudibile;
2. non esistono in  $\overline{G_A}$  elementi del tipo  $(0, z)$  con  $0 \neq z \in X$ ;
3.  $A$  ammette estensioni chiuse.

Per gli scopi preposti è sufficiente restringersi al caso in cui  $X$  è uno spazio di Hilbert. Si indicherà lo spazio con il simbolo  $H$  e il prodotto scalare definito su  $H$  con le parentesi angolari.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Se  $A$  è un operatore nello spazio di Hilbert  $H$  con  $\overline{D_A} = H$ , l'operatore aggiunto di  $A$ ,  $A^*$ , è l'operatore in  $H$  definito sul sottospazio

$$D_{A^*} := \{x \in H : \exists z_{A,x} \in H \text{ con } \langle x, Ay \rangle = \langle z_{A,x}, y \rangle \quad \forall y \in D_A\}$$

e tale che

$$A^* : x \mapsto z_{A,x}.$$

Chiaramente  $\langle A^*x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$  per ogni coppia  $(x, y) \in D_{A^*} \times D_A$ , inoltre se  $A \subset B$  sono densamente definiti, allora  $A^* \supset B^*$ .

Si noti anche che non è detto che  $D_{A^*}$  sia denso in  $H$ , dunque, in generale, non è detto che esista  $(A^*)^*$ .

**Teorema 1.5.2.** *Sia  $A$  un operatore sullo spazio di Hilbert  $H$  con dominio denso; allora valgono le seguenti proprietà:*

- (a)  $A^*$  è un operatore chiuso;
- (b)  $A$  è chiudibile se e solo se  $D_{A^*}$  è denso. In tal caso  $A \subset \overline{A} = (A^*)^*$ ;
- (c)  $\text{Ker } A^* = (\text{Im } A)^\perp$  e  $\text{Ker } A \subset (\text{Im } A^*)^\perp$  dove si può sostituire “ $\subset$ ” con “ $=$ ” quando  $D_{A^*}$  è denso in  $H$ .

È evidente che se  $D_A$  è denso, considerato  $\lambda \in \mathbb{C}$ , si ha  $(A - \lambda I)^* = A^* - \bar{\lambda}I$ . Dunque le relazioni del punto (c) implicano rispettivamente che

$$\text{Ker} (A^* - \bar{\lambda}I) = (\text{Im} (A - \lambda I))^\perp \text{ e } \text{Ker} (A - \lambda I) \subset (\text{Im} (A^* - \bar{\lambda}I))^\perp.$$

Siano  $(H, \langle, \rangle)$  spazio di Hilbert ed  $A$  operatore in  $H$ :

- (a)  $A$  è detto *hermitiano* se  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$  per ogni  $x, y \in D_A$ ;
- (b)  $A$  è detto *simmetrico* se è hermitiano e  $D_A$  è denso (in altre parole  $A$  è simmetrico se  $D_A$  è denso e  $A \subset A^*$ ).
- (c)  $A$  è detto *autoaggiunto* se  $D_A$  è denso e  $A = A^*$ .
- (d)  $A$  è detto *essenzialmente autoaggiunto* se  $D_A$  e  $D_{A^*}$  sono densi e  $A^* = (A^*)^*$  o, equivalentemente, se  $D_A$  è denso,  $A$  è chiudibile e vale  $A^* = \bar{A}$ .

D'ora in poi si scriverà  $A^{****}$  in luogo di  $((A^*)^*)^*$ .

**Teorema 1.5.3.** *Siano  $(H, \langle, \rangle)$  spazio di Hilbert ed  $A$  operatore in  $H$ ; allora valgono i seguenti fatti.*

- (a) *Se  $D_A, D_{A^*}, D_{A^{**}}$  sono densi, allora  $A^* = \bar{A}^* = \overline{A^*} = A^{****}$ .*
- (b)  *$A$  è essenzialmente autoaggiunto se e solo se  $\bar{A}$  è autoaggiunto.*
- (c) *Se  $A$  è autoaggiunto, allora è simmetrico massimale: non ha estensioni proprie simmetriche.*
- (d) *Se  $A$  è essenzialmente autoaggiunto, allora ammette solo una estensione autoaggiunta:  $\bar{A}$  (che coincide con  $A^*$ ).*

*Dimostrazione.* (a) Se  $D_A, D_{A^*}, D_{A^{**}}$  sono densi, allora esistono  $A^*, A^{**}$  e  $A^{****}$  e  $\bar{A}^* = (A^{**})^* = A^{****} = (A^*)^{**} = \overline{A^*}$  per il punto (b) del Teorema 1.5.2. Dato che  $A^*$  è chiuso (per il punto (a) dello stesso Teorema), vale che  $\overline{A^*} = A^*$ .

(b) Se  $A$  è essenzialmente autoaggiunto,  $\bar{A} = A^*$  e quindi, in particolare,  $D_{\bar{A}} = D_{A^*}$  è denso. Calcolando l'aggiunto di  $\bar{A}$  e tenendo conto del Teorema 1.5.2(b) si ha  $\bar{A}^* = (A^*)^* = \bar{A}$ , ossia  $\bar{A}$  è autoaggiunto.

Viceversa, se  $\bar{A}$  è autoaggiunto, ossia esiste  $\bar{A}^* = \bar{A}$ , allora  $D_A, D_{A^*}, D_{A^{**}}$

sono densi e, applicando (a),  $A^* = \overline{A^*} = \overline{A^*}$ , quindi  $A^* = \overline{A}$ . Allora  $A$  è essenzialmente autoaggiunto.

(c) Sia  $A$  autoaggiunto e  $A \subset B$  con  $B$  simmetrico. Prendendo gli aggiunti si ha  $A^* \supset B^*$ . Ma  $B^* \supset B$  per la simmetria. Allora:  $A \subset B \subset B^* \subset A^* = A$ , e quindi  $A = B = B^*$ .

(d) Sia  $A^* = A^{**}$  e  $A \subset B$  con  $B = B^*$ . Prendendo l'aggiunto di  $A \subset B$  si ha che  $B = B^* \subset A^*$ . Prendendo due volte l'aggiunto di  $A \subset B$  troviamo anche che  $A^{**} \subset B$ , ma allora  $B = B^* \subset A^* = A^{**} \subset B$  e dunque  $B = A^{**}$ , che coincide con  $\overline{A}$  per il Teorema 1.5.2(b).  $\square$

Il punto (d) di questo ultimo Teorema mette in luce l'importanza dell'essenziale autoaggiuntezza: trovare un operatore essenzialmente autoaggiunto vuol dire trovare un operatore che porta, in maniera univoca, le informazioni di un operatore autoaggiunto ma è definito in maniera meno restrittiva.

Si possono finalmente caratterizzare gli operatori autoaggiunti e quelli essenzialmente autoaggiunti.

**Teorema 1.5.4.** *Sia  $A$  un operatore simmetrico nello spazio di Hilbert  $H$ . Allora sono equivalenti:*

1.  $A$  è autoaggiunto;
2.  $A$  è chiuso e  $\text{Ker}(A^* \pm iI) = \{0\}$ ;
3.  $\text{Im}(A \pm iI) = H$ .

*Dimostrazione.* (1.  $\Rightarrow$  2.) Se  $A = A^*$ , allora  $A$  è chiuso perché  $A^*$  è chiuso. Se  $x \in \text{Ker}(A^* + iI)$ , allora vale anche  $Ax = -ix$  e quindi

$$i \langle x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \langle x, -ix \rangle = -i \langle x, x \rangle,$$

per cui  $\langle x, x \rangle = 0$  e quindi  $x = 0$ . La prova per  $\text{Ker}(A^* - iI) = \{0\}$  è analoga.

(2.  $\Rightarrow$  3.) Dalla definizione di operatore autoaggiunto segue che

$$(\text{Im}(A - iI))^\perp = \text{Ker}(A^* + iI).$$

Quindi da 2. segue che  $\text{Im}(A - iI)$  è densa in  $H$ . L'uguaglianza deriva dalla chiusura di  $A$ . Sia  $y \in H$  arbitrariamente fissato, si scelga  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D_A$  tale che  $(A - iI)x_n \rightarrow y \in H$ . Poiché, per  $z \in D_A$ ,  $\|(A - iI)z\|^2 = \|Az\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2$ , si ha che  $\{x_n\}$  è di Cauchy ed esiste  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . La chiusura di  $A$  comporta quella di  $(A - iI)$  e dunque  $(A - iI)x = y$ . Di conseguenza  $\text{Im}(A - iI) = \overline{\text{Im}(A - iI)} = H$ . La prova per  $\text{Im}(A + iI)$  è analoga.

(3.  $\Rightarrow$  1.) Dato che  $A \subset A^*$  per l'ipotesi di simmetria, è sufficiente provare che  $D_{A^*} \subset D_A$ . Sia  $y \in D_{A^*}$ . Dato che  $\text{Im}(A - iI) = H$ , esiste  $x_- \in D_A$  tale che  $(A^* - iI)x_- = (A^* - iI)y$ . Su  $D_A$  l'operatore  $A^*$  coincide con  $A$  e pertanto, dall'identità di sopra, si trova che  $(A^* - iI)(y - x_-) = 0$ . Ma  $\text{Ker}(A^* - iI) = \text{Im}(A + iI)^\perp = \{0\}$  per cui  $y = x_-$  e  $y \in D_A$ . La dimostrazione nel caso di  $\text{Im}(A + iI)$  è analoga.  $\square$

**Teorema 1.5.5.** *Sia  $A$  un operatore simmetrico nello spazio di Hilbert  $H$ . I seguenti fatti sono equivalenti:*

1.  $A$  è essenzialmente autoaggiunto;
2.  $\text{Ker}(A^* \pm iI) = \{0\}$ ;
3.  $\overline{\text{Im}(A \pm iI)} = H$ .

*Dimostrazione.* (1.  $\Rightarrow$  2.) Se  $A$  è essenzialmente autoaggiunto,  $A^* = A^{**}$  e quindi  $A^*$  è autoaggiunto (e dunque chiuso). Applicando il Teorema precedente (punto 2.) si ha la tesi.

(2.  $\Rightarrow$  1.)  $A \subset A^*$  per ipotesi e quindi, essendo  $D_A$  denso, lo è anche  $D_{A^*}$ . Di conseguenza  $A$  è chiudibile e  $A \subset \overline{A} = A^{**}$  per il Teorema 1.5.2(b) (in particolare  $D_{A^{**}} = D_{\overline{A}} \supset D_A$  è denso. Pertanto, da  $A \subset A^*$  segue  $\overline{A} \subset A^*$ , e per il primo punto del Teorema precedente, si ha  $A^* = \overline{A}^*$ . In definitiva,  $\overline{A} \subset \overline{A}^*$ , ovvero  $\overline{A}$  è simmetrico. Applicando il secondo punto del Teorema precedente ad  $\overline{A}$  si conclude che è un operatore autoaggiunto e che  $A$  è essenzialmente autoaggiunto.

(2.  $\Leftrightarrow$  3.) Dato che  $\text{Im}(A \pm iI)^\perp = \text{Ker}(A^* \mp iI)$  e che  $\overline{\text{Im}(A \pm iI)} \oplus \text{Im}(A \pm iI)^\perp = H$ , i punti 2. e 3. sono equivalenti

$\square$

### 1.5.2 Teoria spettrale

Sia  $X$  uno spazio normato sul campo  $\mathbb{C}$  e sia  $A : D_A \rightarrow X$  un operatore lineare, dove  $D_A \subset X$  è un sottospazio (non necessariamente denso) di  $X$ .

1. Si dice *insieme risolvente* di  $A$  l'insieme  $\rho(A)$  dei  $\lambda \in \mathbb{C}$  tali che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

- (a)  $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} = X$ ;
- (b)  $(A - \lambda I) : D_A \rightarrow H$  è iniettivo;
- (c)  $(A - \lambda I)^{-1} : \text{Im}(A - \lambda I) \rightarrow H$  è limitato.

2. Se  $\lambda \in \rho(A)$ , si dice *risolvente* di  $A$  l'operatore

$$R_\lambda(A) := (A - \lambda I)^{-1} : \text{Im}(A - \lambda I) \rightarrow D_A.$$

3. Si dice *spettro* di  $A$  l'insieme  $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ . Lo spettro di  $A$  è l'unione di tre sottoinsiemi disgiunti:

- (a) lo *spettro puntuale* di  $A$ ,  $\sigma_p(A)$ , costituito dai  $\lambda \in \mathbb{C}$  per cui  $A - \lambda I$  non è iniettivo, in altre parole  $\lambda \in \sigma_p(A)$  se esiste  $0 \neq x \in X$  tale che  $Ax = \lambda x$  (in tal caso si dice che  $x$  è un'*autofunzione* associata all'*autovalore*  $\lambda$ );
- (b) lo *spettro residuo* di  $A$ ,  $\sigma_r(A)$ , costituito dai  $\lambda \in \mathbb{C}$  per cui  $A - \lambda I$  è iniettivo ma  $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} \neq X$ ;
- (c) lo *spettro continuo* di  $A$ ,  $\sigma_c(A)$ , costituito dai  $\lambda \in \mathbb{C}$  per cui  $A - \lambda I$  è iniettivo,  $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} = X$  ma  $(A - \lambda I)^{-1}$  non è limitato.

**Teorema 1.5.6.** *Sia  $X$  uno spazio di Banach sul campo  $\mathbb{C}$  e sia  $T$  un operatore in  $X$  con dominio  $D_T$ . Se  $T$  è chiuso valgono i seguenti fatti.*

1.  $\lambda \in \rho(T)$  se e solo se  $T - \lambda I$  è una biiezione di  $D_T$  su  $X$ .
2.  $\rho(T)$  è aperto,  $\sigma(T)$  è chiuso e  $\rho(T) \ni \lambda \mapsto R_\lambda(T)$  è una funzione olo-morfa su  $\rho(T)$  (a valori nello spazio di Banach complesso degli operatori lineari e continui su  $X$ ).

3. Se  $D_T = X$ , allora  $\rho(T)$  è non vuoto; se inoltre  $X \neq \{0\}$ , allora  $\sigma(T)$  è un compatto non vuoto ed in particolare vale  $|\lambda| \leq \|T\|$  per ogni  $\lambda \in \sigma(T)$ .
4. Per ogni  $\lambda, \mu \in \rho(T)$  vale l'equazione risolvente:

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu)R_\lambda(T)R_\mu(T).$$

**Teorema 1.5.7.** *Sia  $H$  uno spazio di Hilbert. Se  $A$  è un operatore autoaggiunto in  $H$  (non necessariamente limitato o definito su tutto  $H$ ), allora:*

1.  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ ,
2.  $\sigma_r(A) = \emptyset$ ,
3. *autospazi*<sup>14</sup> di  $A$  con autovalori distinti sono ortogonali.

*Dimostrazione.* 1. Sia  $\lambda = \mu + i\nu$  con  $\nu \neq 0$ . Se  $x \in D_A$  si ha

$$\begin{aligned} \langle (A - \lambda I)x, (A - \lambda I)x \rangle &= \langle (A - \mu I)x, (A - \mu I)x \rangle + \nu^2 \langle x, x \rangle \\ &\quad + i\nu(\langle Ax, x \rangle - \langle x, Ax \rangle) \\ &= \langle (A - \mu I)x, (A - \mu I)x \rangle + \nu^2 \langle x, x \rangle \end{aligned}$$

in quanto  $A$  è autoaggiunto per ipotesi. Dunque  $\|(A - \lambda I)\| \geq |\nu|\|x\|$ . Allo stesso modo si prova che  $\|(A - \bar{\lambda}I)\| \geq |\nu|\|x\|$ . Di conseguenza gli operatori  $A - \lambda I$  e  $A - \bar{\lambda}I$  sono iniettivi e vale  $\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq |\nu|^{-1}$ , dove  $(A - \lambda I)^{-1} : \text{Im}(A - \lambda I) \rightarrow D_A$ . Inoltre, tenendo conto anche di quanto già detto, si ha

$$\overline{\text{Im}(A - \lambda I)}^\perp = \text{Im}(A - \lambda I)^\perp = \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I) = \text{Ker}(A - \bar{\lambda}I) = \{0\}.$$

Riassumendo:  $A - \lambda I$  è iniettivo,  $(A - \lambda I)^{-1}$  è limitato e  $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)}^\perp = \{0\}$ , cioè  $\text{Im}(A - \lambda I)$  è denso in  $H$ . In altre parole  $\lambda \in \rho(A)$  per definizione di insieme risolvente.

<sup>14</sup>Si chiama *autospazio* di  $A$  con autovalore  $\lambda$  (o associato all'autovalore  $\lambda$ ) lo spazio di tutte le autofunzioni di  $A$  con autovalore  $\lambda$ .

2. Sia  $\lambda \in \sigma(A)$ ,  $\lambda \notin \sigma_p(A)$ . In tal caso  $A - \lambda I$  deve essere iniettivo e quindi  $\text{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$ . Essendo  $A = A^*$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  per il punto 1., vale che  $\text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I) = \{0\}$ , per cui  $(\text{Im}(A - \lambda I))^{bot} = \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I) = \{0\}$  e quindi  $\overline{\text{Im}(A - \lambda I)} = H$ . Ne consegue che  $\lambda \in \sigma_c(A)$ .

3. Siano  $\lambda \neq \mu$  tali che  $Au = \lambda u$  e  $Av = \mu v$ . Tenendo conto del fatto che  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  e che  $A = A^*$ ,

$$(\lambda - \mu) \langle u, v \rangle = \langle Au, v \rangle - \langle u, Av \rangle = \langle u, Av \rangle - \langle u, Av \rangle = 0;$$

essendo  $\lambda - \mu \neq 0$ , deve essere  $\langle u, v \rangle = 0$ .  $\square$

## 1.6 Forme differenziali su una superficie di Riemann

Come in precedenza si tratta di una breve presentazione utile ai fini del lavoro da svolgere basata su [Jos06]. Per ulteriori chiarimenti, per formalizzazioni più generali e complete, e per approfondimenti si può fare riferimento a [Jos05], [Har77], [BT82] e [Lan99].

### 1.6.1 Gruppi di coomologia

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $d$ . Una forma differenziale è un oggetto della forma

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq d} \omega_{i_1 \dots i_j} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_j}$$

dove  $x^1, \dots, x^d$  sono le coordinate locali su  $M$  e  $j$  è il cosiddetto *grado* di  $\omega$ . Le  $\omega_{i_1 \dots i_j}$  son funzioni differenziabili a valori reali.

Se  $y^1, \dots, y^d$  è un altro sistema di coordinate locali, allora

$$dx_i = \sum_{k=1}^d \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k$$

e, dunque,  $\omega$  si rappresenta in tali coordinate come

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq d} \sum_{k_1=1}^d \cdots \sum_{k_j=1}^d \omega_{i_1 \dots i_j} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{k_1}} dy^{k_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial x^{i_j}}{\partial y^{k_j}} dy^{k_j}.$$

Il differenziale esterno di  $\omega$  è la  $(j+1)$ -forma definita

$$d\omega = \sum_{i_0=1}^d \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq d} \frac{\partial}{\partial x^{i_0}} \omega_{i_1 \dots i_j} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_j}$$

Con un lungo ma semplice calcolo, a questo punto, si può verificare che

$$d^2 = 0.$$

Una  $j$ -forma differenziale si dice *chiusa* se

$$d\omega = 0$$

mentre si dice *esatta* se esiste una  $(j-1)$ -forma  $\alpha$  tale che

$$d\alpha = \omega.$$

Ogni forma esatta è, banalmente, chiusa.

Si chiama  *$j$ -esimo gruppo di coomologia di de Rham* di  $M$  il gruppo  $H^j(M, \mathbb{R})$  definito tramite il quoziente

$$H^j(M, \mathbb{R}) := \frac{\{j\text{-forme differenziali chiuse su } M\}}{\{j\text{-forme differenziali esatte su } M\}}$$

in cui si considerano le classi di equivalenza di forme differenziali di grado  $j$  tramite la relazione per cui

due forme  $\omega_1, \omega_2$  sono equivalenti se e solo se esiste una forma  $\alpha$  con  $\omega_1 - \omega_2 = d\alpha$ .

In altre parole,  $H^j(M, \mathbb{R})$  è costruito identificando forme differenziali chiuse che differiscano tra loro di una forma esatta. Poiché (cfr. [AM69]) il complesso dei gruppi di forme differenziali<sup>15</sup> può essere visto in termini di successioni esatte sfruttando la mappa  $d$ , si può dimostrare che le forme esatte

<sup>15</sup>L'operazione di gruppo è l'addizione.

formano un sottogruppo normale del gruppo delle forme chiuse, e dunque  $H^j(M, \mathbb{R})$  è a sua volta un gruppo.  $H^j(M, \mathbb{R})$ , infatti, è uno spazio vettoriale sopra  $\mathbb{R}$ , in quanto una forma può essere moltiplicata per uno scalare senza che la chiusura o l'esattezza vengano modificate. Infine, la mappa  $d : H^j(M, \mathbb{R}) \rightarrow H^{j+1}(M, \mathbb{R})$  è un omomorfismo di gruppo sulle coomologie.

### 1.6.2 Forme differenziali armoniche ed olomorfe su una superficie di Riemann

Si consideri una superficie di Riemann compatta  $X$ . Posto  $z = x + iy$ , si consideri su  $X$  la metrica  $\lambda(z)^2 dz d\bar{z}$  (che, come dimostrato in [Jos06], esiste sempre) in cui si è usata la notazione convenzionale per le forme differenziali  $dz = dx + i dy$  e  $d\bar{z} = dx - i dy$ . Un rapido calcolo mostra che

$$dz \wedge d\bar{z} = -2i dx \wedge dy,$$

in linea con quanto già visto nella sezione precedente.

Si definisce *forma di Kähler della metrica* o *2-forma fondamentale* la forma a valori complessi

$$\omega := \lambda^2(z) dx \wedge dy = \lambda^2(z) \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}.$$

Sulle forme si definisce un operatore di coniugazione, o *operatore  $\star$  di Hodge*. In questo caso particolare la definizione<sup>16</sup> può essere data come segue: data una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\star f(z) := f(z) \lambda^2(z) dx \wedge dy = f \omega; \quad (1.2)$$

per le 1-forme<sup>17</sup>  $\alpha = f dx + g dy$ ,

$$\star \alpha := -g dx + f dy \quad (1.3)$$

o, in notazione complessa, se  $\alpha = u dz + v d\bar{z}$ ,

$$\star \alpha = -iu dz + iv d\bar{z};$$

<sup>16</sup>La definizione nel caso di una generica varietà riemanniana è discussa in [Jos05].

<sup>17</sup>Si noti che  $\star \alpha$  resta una 1-forma e si trasforma correttamente sotto cambi di coordinate.

per le 2-forme  $\eta = h(z) dx \wedge dy$ ,

$$\star \eta(z) := \frac{1}{\lambda^2(z)} h(z). \quad (1.4)$$

Si noti come lo  $\star$  di 1-forme, in queste condizioni, sia definito indipendentemente dalla metrica. Si osservi, inoltre, che per  $B \subseteq X$ , si ha

$$\text{area}(B) = \int_B \star(1).$$

A questo punto, è possibile definire un prodotto scalare sullo spazio vettoriale delle  $k$ -forme come

$$(\alpha_1, \alpha_2) := \int_X \alpha_1 \wedge \star \bar{\alpha}_2, \quad (1.5)$$

ottenendo lo spazio di Hilbert

$$A_k^2 := \{k\text{-forme } \alpha \text{ a coefficienti misurabili e } (\alpha, \alpha) < \infty\}$$

delle  $k$ -forme a quadrato integrabile. Per essere più precisi, se  $\alpha$  è una 1-forma del tipo

$$\alpha = u dz + v d\bar{z}$$

(in coordinate locali), allora

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \star \bar{\alpha} &= i(u\bar{u} + v\bar{v}) dz \wedge d\bar{z} \\ &= 2(|u|^2 + |v|^2) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

e, dunque, è evidente che il prodotto scalare è definito positivo. Risulta, inoltre, immediato con un breve calcolo che  $(\cdot, \cdot)$  è bilineare, che

$$(\star \alpha_1, \star \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

e che è suriettiva in quanto

$$\star \star = (-1)^k.$$

Una conseguenza diretta di tutte queste osservazioni è che l'operatore  $\star$  è un'isometria tra  $A_k^2$  e  $A_{2-k}^2$ .

Siano, ora,  $\alpha_1 \in A_k^2$  e  $\alpha_2 \in A_{k+1}^2$  differenziabili e sia  $X$  compatta. Allora

$$\begin{aligned}
 (d\alpha_1, \alpha_2) &= \int_X d\alpha_1 \wedge \star \bar{\alpha}_2 \\
 &= (-1)^{k+1} \int_X \alpha_1 \wedge d(\star \bar{\alpha}_2) + \int_X d(\alpha_1 \wedge \star \bar{\alpha}_2) \\
 &= (-1)^{k+1} \int_X \alpha_1 \wedge d(\star \bar{\alpha}_2) \\
 &= \int_X d\alpha_1 \wedge \star(\star d \star \bar{\alpha}_2) \\
 &= (\alpha_1, \star d \star \alpha_2).
 \end{aligned}$$

Allora, definendo

$$d^* := \star d \star,$$

si ha che  $d^*$  è l'operatore aggiunto<sup>18</sup> di  $d$  rispetto a  $(\cdot, \cdot)$ , anche se solo formalmente, in quanto  $d : A_k^2 \rightarrow A_{2-k}^2$  è un operatore non-limitato (densamente definito). Si noti che la definizione di  $d^*$  dipende dalla metrica anche per le 1-forme.

Si consideri, a questo punto,  $f \in C^2(X)$ :

$$d^* df = d^* \left( \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \quad (1.6)$$

$$= \star d \left( -i \frac{\partial f}{\partial z} dz + i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \quad (1.7)$$

$$= \star \left( 2i \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} \right) \quad (1.8)$$

$$= \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad (1.9)$$

cioè,  $d^* d$  agisce sulle funzioni come l'operatore di Laplace-Beltrami.

In effetti, considerando che per qualunque funzione  $f$  si ha  $d^* f = 0$ , la definizione dell'operatore di Laplace-Beltrami può essere estesa alle forme in modo che sia formalmente autoaggiunta:

$$\Delta := d d^* + d^* d.$$

---

<sup>18</sup>Cioè  $(d\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, d^* \alpha_2)$ .

Infatti,

$$\begin{aligned}
 (\Delta\alpha, \beta) &= (d d^* \alpha, \beta) + (d^* d\alpha, \beta) \\
 &= (d^* \alpha, d^* \beta) + (d\alpha, d\beta) \\
 &= (\alpha, d d^* \beta) + (\alpha, d^* d\beta) \\
 &= (\alpha, \Delta\beta).
 \end{aligned}$$

Una 1-forma  $\alpha$  si dice *co-chiusa* se

$$d^* \alpha = 0,$$

*co-esatta* se esiste una funzione  $\eta$  per cui

$$\alpha = d^* \eta.$$

Una 1-forma  $\alpha$  si dice *armonica* se esiste una funzione armonica  $f$  per cui localmente  $\alpha = df$ ; si dice *olomorfa* se esiste una funzione olomorfa  $h$  per cui localmente  $\alpha = dh$ .

Per tali forme esistono dei teoremi di rappresentazione (cfr. [Jos06]), in particolare:

**Lemma 1.6.1** (Rappresentazione di 1-forme armoniche e olomorfe).

- Sia  $\eta$  una 1-forma.  $\eta$  è armonica se e solo se  $d\eta = 0 = d^* \eta$ . O, altrimenti, è armonica se e solo se  $\Delta\eta = 0$ <sup>19</sup>.
- Una 1-forma  $\eta$  è armonica se e solo se è della forma  $\alpha_1 + \bar{\alpha}_2$  con  $\alpha_1, \alpha_2$  olomorfe.
- Sia  $\alpha$  rappresentata localmente come  $u dz + v d\bar{z}$ .  $\alpha$  è olomorfa se e solo se  $v \equiv 0$  ed  $u$  è una funzione olomorfa.
- Una 1-forma  $\alpha$  è olomorfa se e solo se è della forma  $\eta + i \star \eta$  con  $\eta$  armonica.

<sup>19</sup>In accordo con la definizione euclidea tradizionale.

## 1.7 Campi magnetici e vettori potenziali nella geometria delle cuspidi

**Corollario 1.6.2.** *Su una superficie di Riemann compatta con metrica iperbolica conforme<sup>20</sup>, ogni funzione armonica è costante.*

*Dimostrazione.* Banale conseguenza del fatto che  $\star\Delta = \Delta\star$ . □

## 1.7 Campi magnetici e vettori potenziali nella geometria delle cuspidi

### 1.7.1 Campi magnetici e vettori potenziali

Un *campo magnetico*  $B$  su una varietà Riemanniana  $(X, g)$  di dimensione 2 è una 2-forma esatta<sup>21</sup> a valori reali. Un *vettore potenziale*  $A$  associato a  $B$  è una 1-forma tale che  $dA = B$ .

Sia  $d_A := d + iA : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X, T^*X)$ . Si chiama *Laplaciano magnetico* su  $C^\infty(X)$  l'operatore

$$\Delta_A := d_A^* d_A \tag{1.10}$$

dove  $d_A^* := \star d \star$  con  $\star$  ad indicare l'operatore “star di Hodge” (cfr. [Jos05], [Gun66]). Tale formula ha senso per le 1-forme  $A$  a valori complessi.

Quando  $X$  è una varietà completa e  $A$  è liscia, è ben noto che l'operatore  $\Delta_A$  è essenzialmente autoaggiunto (cfr. [Shu01]).

Sommando ad  $A$  una 1-forma esatta a valori reali, si ottiene una nuova 1-forma  $A' = A + df$  il cui corrispondente Laplaciano magnetico è tale che

$$\Delta_{A'} = e^{-if} \Delta_A e^{if},$$

cioè è unitariamente equivalente a  $\Delta_A$  in  $L^2(X, g)$ . Dunque, se  $H^1(X) = 0$ ,  $\Delta_A$  dipende solamente dal campo magnetico  $B$  (a meno di equivalenza unitaria). Questa proprietà è chiamata *invarianza di Gauge*. Per una trattazione più raffinata del problema si veda [Gru00], [BM94].

---

<sup>20</sup>Tale risultato può essere generalizzato a qualunque superficie di Riemann compatta (cfr. [Jos05])

<sup>21</sup>In generale non è necessario che la forma sia esatta ma è sufficiente che sia chiusa.

## 1.7 Campi magnetici e vettori potenziali nella geometria delle cuspidi 43

Se  $H^1(X) \neq 0$ , non si verifica tale invarianza di Gauge. Questo fatto, ben noto a chi studia Meccanica Quantistica, fa sì che la scelta del vettore potenziale porti con se un significato fisico conseguenza del cosiddetto effetto di Aharonov-Bohm (cfr. [AB59], [BM94]): due scelte di potenziali vettori possono condurre, relativamente ad uno stesso campo magnetico, a laplaciani magnetici non equivalenti, in particolare possono comportare spettri significativamente differenti (cfr. [GM08], [BM94]).

### 1.7.2 Geometria delle cuspidi

La geometria delle cuspidi, o “cusp geometry”, è una particolare teoria che estende il calcolo pseudo-differenziale (cfr. [Jos99], [CP82]) alle varietà non-compatte, di volume finito e con cuspidi. Questa sezione recupera e adatta velocemente la teoria e i risultati più importanti così come descritti in [GM08] e in [Mor03].

Sia  $\bar{X}$  una varietà liscia compatta 2-dimensionale di frontiera  $M$  chiusa e sia  $X$  il suo interno. Sia  $x \in C^\infty(\bar{X}, [0, \infty))$  tale che  $M = \{x = 0\}$  e  $dx \neq 0$  quando  $x = 0$ . Una *metrica cuspidale* su  $\bar{X}$  è una metrica riemanniana completa  $g_0$  su  $X := \bar{X} \setminus M$  che in coordinate locali vicino alla frontiera è della forma

$$g_0 = a_{00}(x, y) \frac{dx^2}{x^4} + a_{01}(x, y) \frac{dx}{x^2} dy + a_{11}(x, y) dy^2$$

in cui la matrice  $(a_{\alpha\beta})$  è liscia e non degenera per  $x = 0$ . Sia  $h = a_{11}(0, y) dy^2$  la metrica riemanniana indotta su  $M$ . Si chiamano *cuspidali conformi* le metriche della forma

$$g_p := x^{2p} g_0 \tag{1.11}$$

con  $p \in \mathbb{R}$ . Quando  $a_{00}|_M \equiv 1$  ed  $a_{01}|_M \equiv 0$  la metrica è detta *cuspidale esatta*.

Una 1-forma (liscia)  $A$  si dice *cuspidale*<sup>22</sup> su  $\bar{X}$  se  $A \in C^\infty(X, T^*X)$  è

---

<sup>22</sup>Da non confondere con la notazione di forme cuspidali relativa alla teoria delle forme automorfe.

## 1.7 Campi magnetici e vettori potenziali nella geometria delle cuspidi

una 1-forma a valori reali tale che vicino a  $\partial X$  assuma la forma

$$A = \phi(x) \frac{dx}{x^2} + \theta(x, y). \quad (1.12)$$

dove  $\phi \circ x \in C^\infty(\bar{X})$  e  $\theta \in C^\infty([0, \epsilon) \times M, \Lambda^1(M))$ . Una 1-forma cuspidale può essere sempre considerata un vettore potenziale che verrà chiamato vettore potenziale cuspidale.

Sia  $A$  un vettore potenziale cuspidale a valori complessi. Considerata una componente connessa  $M_0$  di  $M$ , si dice che  $A$  è *intrappolante* su  $M_0$  se si verifica una delle seguenti situazioni

- $\phi_0 := \phi(0)$  non è costante su  $M_0$ ;
- $\theta_0 := \theta(0)$  non è chiusa su  $M_0$ ;
- $\int_\gamma A$  (con  $\gamma$  curva chiusa attorno alla cuspidale) non è un multiplo intero di  $2\pi$ .

Altrimenti si dice *non-intrappolante* su  $M_0$ .

Un vettore potenziale si dice *intrappolante* se lo è su ogni componente connessa di  $M$  e *non-intrappolante* se non è intrappolante. Se  $A$  è non-intrappolante in ogni componente connessa di  $M$  si dice *non-intrappolante massimale*.

La proprietà di un vettore potenziale  $A$  di essere o meno intrappolante dipende solo dal suo comportamento asintotico. Più precisamente se  $A'$  assume la forma (1.12) con  $\phi(0) = 0$  e  $\theta(0) = 0$ , allora è (non-)intrappolante se e solo se  $A + A'$  lo è.

**Teorema 1.7.1.** *Sia  $X$  una superficie iperbolica completa, orientata e di volume finito e sia  $B$  un campo magnetico liscio sulla compattificazione  $\bar{X}$ . Se  $X$  ha almeno 2 cuspidi, allora per ogni  $B$  esistono vettori potenziali  $A$  intrappolanti e vettori potenziali  $A'$  non intrappolanti tali che  $B = dA = dA'$ .*

## 1.7 Campi magnetici e vettori potenziali nella geometria delle cuspidi

**Teorema 1.7.2.** *Sia  $p > 0$ , sia  $g_p$  una metrica su  $X$  della forma (1.11) vicino a  $\partial X$  e sia  $A$  una 1-forma cuspidale come in (1.12). Allora  $\Delta_A$  è un operatore differenziale cuspidale di ordine  $(2p, 2)$ .*

*Se  $A$  è un potenziale intrappolante, allora  $\Delta_A$  è essenzialmente autoaggiunto su  $C_c^\infty(X)$ , ha spettro puramente discreto e il suo dominio è  $x^{2p}H^2(X, g_p)$  dove  $H^2(X, g_p)$  identifica lo Spazio di Sobolev di ordine 2 per la varietà riemanniana  $(X, g_p)$ .*

**Teorema 1.7.3.** *Sia  $1/2 < p < \infty$ , sia  $X$  varietà di dimensione 2, sia  $g_p$  una metrica su  $X$  della forma (1.11) vicino a  $\partial X$  e sia  $A \in C^\infty(X, T^*X)$  un vettore potenziale intrappolante a valori complessi. Allora la funzione di conteggio degli autovalori di  $\Delta_A$ , nel limite  $\lambda \rightarrow \infty$ , soddisfa*

$$N_{A,p}(\lambda) \approx C_1 \lambda^{n/2} \quad \text{dove} \quad C_1 = \frac{\text{Vol}(X, g_p) \text{Vol}(S^{n-1})}{n(2\pi)^n} \quad (1.13)$$

Si noti che la costante  $C_1$  non dipende dalla scelta di  $A$  ma solamente dalla metrica  $g_p$ .

## Capitolo 2

# Gruppi modulari e superfici modulari

È giunto il momento di sviluppare la geometria dello spazio di lavoro.

### 2.1 Il semipiano di Poincaré

Il semipiano superiore di Poincaré  $\mathbb{H}$  è il semipiano

$$\mathbb{H} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\} \quad (2.1)$$

equipaggiato della metrica iperbolica di Poincaré

$$(g_{x,y}) = (y^{-2}\delta_{x,y}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

La struttura così definita è una varietà riemanniana  $\mathbb{H}$  con curvatura di Gauss costante  $-1$  (cfr. [Ser06], [Miy89], [Kob84], [Mil74]). Inoltre, vale (cfr. [Jos06]) il seguente teorema:

**Teorema 2.1.1.**  *$\log \frac{1}{y}$  è un potenziale per la metrica iperbolica su  $\mathbb{H}$ . La curvatura della metrica è  $K = -1$  e la metrica è completa. In particolare, ogni curva contenuta in  $\mathbb{H}$  con estremo sull'asse reale ha lunghezza infinita.*

## 2.2 I gruppi modulari

La geometria degli spazi su cui si dovrà successivamente lavorare si costruisce per mezzo dei cosiddetti Gruppi Modulari. Risulta, dunque, di fondamentale importanza fornirne un'analisi accurata e analizzarne le relazioni con la geometria di tali spazi.

Per ulteriori approfondimenti si consigliano i seguenti riferimenti bibliografici: [Miy89], [Kob84], [Mil74], [Sch74].

### 2.2.1 Il gruppo modulare totale

Si consideri il gruppo

$$PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / \{\pm I\},$$

dove  $SL(2, \mathbb{R}) := \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$ . Esso agisce su  $\mathbb{H}$  transitivamente tramite le Trasformazioni di Möbius

$$\hat{\sigma} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad \hat{\sigma}z = \frac{az + b}{cz + d} \quad \forall z \in \mathbb{H}, \sigma \in SL(2, \mathbb{R}). \quad (2.3)$$

Si può dimostrare che, tramite l'azione così definita,  $PSL(2, \mathbb{R})$  è il gruppo degli automorfismi della superficie modulare (cfr. [Ser06], [Miy89], [Kob84], [Mil74], [Jos06]).

I sottogruppi discreti di  $SL(2, \mathbb{R})$  sono detti *gruppi Fuchsiani*. Per verificare la discretezza di un sottogruppo  $\Gamma$ , è sufficiente verificare che  $I$  sia un elemento isolato in  $\Gamma$ . Esiste un'ampissima gamma di sottogruppi e di sottogruppi discreti, esempi importanti per questa trattazione sono il *Gruppo Modulare Totale*

$$\Gamma(1) := PSL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\} / \{\pm I\} \quad (2.4)$$

(chiaramente discreto) e i suoi sottogruppi  $\Gamma \subseteq \Gamma(1)$  di indice  $[\Gamma(1) : \Gamma]$  finito (chiamati a loro volta *Gruppi Modulari*).

Il gruppo  $\Gamma(1)$  ha due generatori (cfr. [Ser06], [Miy89], [Kob84], [Mil74]):

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essi agiscono su  $z \in \mathbb{H}$  come  $Sz = -\frac{1}{z}$  e  $Tz = z + 1$  e soddisfano le seguenti relazioni

$$S^2 = (ST)^3 = I.$$

Per essere precisi, si può dimostrare che  $\Gamma(1)$  è il prodotto libero dei due gruppi ciclici (risp. di ordine 2 e 3) generati da  $S$  ed  $ST$ .

### 2.2.2 I sottogruppi principali di congruenza

Si considerino ora i cosiddetti *sottogruppi principali di congruenza di ordine*  $N \in \mathbb{N}$  definiti

$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\} \triangleleft \Gamma(1). \quad (2.5)$$

Come sarà dimostrato tra breve, tali sottogruppi sono normali e hanno indice  $\mu_N := [\Gamma(1) : \Gamma(N)] < \infty$ .

Si noti che  $\Gamma(2) = PSL(2, \mathbb{Z}_2) = SL(2, \mathbb{Z}_2) / \{\pm I\}$ , mentre per  $N > 2$  si ha  $\Gamma(N) = PSL(2, \mathbb{Z}_N) \setminus PSL(2, \mathbb{Z})$ . Poiché  $-1 \not\equiv 1 \pmod{N}$ ,  $-I \notin \Gamma(N)$ .

Per ogni  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{Z})^1$  si definisce l'elemento  $\lambda_N(\gamma)$  di  $M(2, \mathbb{Z}_N)$  come

$$\lambda_N(\gamma) = \gamma \pmod{N} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix},$$

dove  $\bar{k} = k \pmod{N}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Allora  $\lambda_N$  induce un omomorfismo tra  $SL(2, \mathbb{Z})$  e  $SL(2, \mathbb{Z}_N)$ .

Prima di proseguire, sorge la necessità di recuperare un teorema di algebra modulare e teoria dei numeri:

**Teorema 2.2.1.** *Siano  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Se  $\gcd(m, n, N) = 1$ , allora esistono  $m', n' \in \mathbb{Z}$  tali che*

$$m' \equiv m \pmod{N}, \quad n' \equiv n \pmod{N} \quad e \quad \gcd(m', n') = 1.$$

Si può finalmente procedere nella dimostrazione del seguente teorema

**Teorema 2.2.2.** *Sia  $\lambda_N : SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z}_N)$  l'omomorfismo appena definito.*

---

<sup>1</sup>Matrici  $2 \times 2$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}$ .

1.  $\lambda_N$  è suriettivo.
2.  $\text{Ker}(\lambda_N) = \Gamma(N)$ ; in particolare,  $\Gamma(N)$  è un sottogruppo normale di  $\Gamma(1)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$  un elemento di  $SL(2, \mathbb{Z}_N)$ . Si considerino gli interi  $a_1, b_1, c_1, d_1$  tali che

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \bmod N = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}.$$

Allora  $a_1 d_1 - b_1 c_1 \equiv 1 \pmod N$  così che  $\gcd(c_1, d_1, N) = 1$ . Per il Teorema 2.2.1 si può assumere che  $\gcd(c_1, d_1) = 1$ . Sia  $n$  l'intero tale che

$$a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1 + nN,$$

per la precedente assunzione, si possono prendere due interi  $a_2, b_2$  tali che  $a_2 d_1 - b_2 c_1 = -n$ . Ponendo

$$\begin{aligned} a &= a_1 + a_2 N, & b &= b_1 + b_2 N, \\ c &= c_1, & d &= d_1, \end{aligned}$$

si osserva che  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  e  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bmod N = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$ .

Dimostrato il punto (1), il (2) risulta una conseguenza ovvia dell'esattezza della successione corta  $1 \rightarrow \Gamma(N) \rightarrow \Gamma(1) = PSL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{Z}_N)$ .  $\square$

Sia ora  $N = \prod_p p^e$  l'espressione di  $N$  come prodotto di numeri primi<sup>2</sup>. Allora  $\mathbb{Z}_N$  è isomorfo a  $\prod_p \mathbb{Z}_{p^e}$  tramite la mappa  $a \mapsto \prod_p (a \bmod p^e)$ , e quindi

$$M(2, \mathbb{Z}_N) \simeq \prod_p M(2, \mathbb{Z}_{p^e})$$

tramite la mappa

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \prod_p \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bmod p^e \right).$$

<sup>2</sup>Ovviamente  $e$  non è una costante ma indica, per ogni  $p$ , l'esponente  $e(p)$  opportuno.

È abbastanza ovvio che se  $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$ , si ha che  $\gamma \bmod p^e \in SL(2, \mathbb{Z}_{p^e})$ . Viceversa, supponendo  $\gamma \bmod p^e \in SL(2, \mathbb{Z}_{p^e})$  per ogni fattore primo  $p$  di  $N$ , si ha  $ad - bc \equiv 1 \pmod{p^e}$  e di conseguenza  $ad - bc \equiv 1 \pmod{N}$ . In altre parole è stato dimostrato il seguente Lemma:

**Lemma 2.2.3.** *Sia  $N$  un intero positivo e sia  $\prod_p p^e$  la sua espressione come prodotto di numeri primi. Allora*

$$SL(2, \mathbb{Z}_N) \cong \prod_p SL(2, \mathbb{Z}_{p^e}).$$

Tramite questo lemma, la cui dimostrazione è disponibile in [Miy89], si può dimostrare il seguente teorema:

**Teorema 2.2.4.** *Sia  $N$  un intero positivo, si ha*

1.  $|GL(2, \mathbb{Z}_N)| = \varphi(N)|SL(2, \mathbb{Z}_N)|$ ;
2.  $|SL(2, \mathbb{Z}_N)| = N^3 \prod_{p|N} (1 - 1/p^2)$ .

Dove con  $\varphi(N)$  si indica la funzione totiente di Eulero.

E, finalmente, si può dimostrare che i  $\Gamma(N)$  sono sottogruppi normali di indice  $\mu_N = [\Gamma(1) : \Gamma(N)]$  finito e facilmente calcolabile.

**Teorema 2.2.5.** *Sia  $N \geq 2$  intero, allora*

$$\mu_N = [\Gamma(1) : \Gamma(N)] = \begin{cases} 6 & N = 2, \\ \frac{1}{2}N^3 \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) & N > 2, \end{cases} \quad (2.6)$$

dove i divisori  $p$  di  $N$  sono numeri primi.

*Dimostrazione.* Poiché  $-I \in \Gamma(2)$  mentre  $-I \notin \Gamma(N)$  per  $N > 2$ , si ha che

$$[\Gamma(1) : \Gamma(N)] = \begin{cases} [SL(2, \mathbb{Z}) : SL(2, \mathbb{Z}_2)] & N = 2, \\ \frac{1}{2}[SL(2, \mathbb{Z}) : SL(2, \mathbb{Z}_N)] & N > 2, \end{cases}.$$

Sfruttando il Teorema precedente assieme al Teorema 2.2.2, si ottiene la tesi.  $\square$

### 2.2.3 Alcuni dettagli dell'azione di $SL(2, \mathbb{C})$ su $\mathbb{H}$

Il gruppo  $SL(2, \mathbb{C})$  agisce su  $\mathbb{C}^2$  e, quindi, sull'insieme  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  delle rette attraverso l'origine in  $\mathbb{C}^2$ . Quando si identificano le rette con le loro pendenze,  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  si va ad identificare con  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  e si ottiene un'azione di  $GL(2, \mathbb{C})$  su  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  (cfr. [Ser06], [Miy89], [Mil74]):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \infty = \frac{a}{c}.$$

Tali mappe vengono chiamate *trasformazioni lineari frazionarie* di  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  e mappano cerchi e rette in  $\mathbb{C}$  in cerchi e rette in  $\mathbb{C}$ .

Gli elementi  $\sigma \neq \pm I$  appartenenti a  $SL(2, \mathbb{C})$  possono essere classificati osservando la loro traccia (cfr. [Ser06], [Miy89], [Mil74]):

- (i)  $\sigma$  è *parabolico*  $\Leftrightarrow |Tr(\sigma)| = 2$  e  $\sigma$  ha forma canonica di Jordan  $\pm \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  con  $b \neq 0$ ;
- (ii)  $\sigma$  è *ellittico*  $\Leftrightarrow |Tr(\sigma)| < 2$  e  $\sigma$  ha forma canonica di Jordan  $\pm \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$  con  $a \notin \mathbb{R}$  e  $|a| = 1$ ;
- (iii)  $\sigma$  è *iperbolico*  $\Leftrightarrow |Tr(\sigma)| > 2$  e  $\sigma$  ha forma canonica di Jordan  $\pm \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$  con  $a \in \mathbb{R}$  e  $|a| > 1$ .
- (iv)  $\sigma$  è *loxodromico*  $\Leftrightarrow Tr(\sigma)$  non è reale.

Un elemento  $\sigma \in \Gamma$  si dice *primitivo* se  $\sigma$  non esiste in  $\Gamma$  un altro elemento di cui  $\sigma$  sia una potenza. Due punti  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$  sono  $\Gamma$ -*equivalenti* se esiste un elemento  $\sigma \in \Gamma$  con  $z_1 = \hat{\sigma}z_2$ .

Andando ad investigare le peculiarità delle classi individuate si può osservare (cfr. [Ser06], [Miy89], [Mil74]) che:

- (i) se  $\sigma \in SL(2, \mathbb{R})$  è *parabolico*, ha un unico punto fisso in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ;
- (ii) se  $\sigma \in SL(2, \mathbb{R})$  è *ellittico*, ha un unico punto fisso  $z \in \mathbb{H}$  ed un secondo punto fisso  $\bar{z}$  nel semipiano complesso inferiore;

(iii) se  $\sigma \in SL(2, \mathbb{R})$  è *iperbolico*, ha due punti fissi distinti in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Sia  $\Gamma$  un sottogruppo discreto di  $SL(2, \mathbb{R})$ . Un punto  $z \in \mathbb{H}$  è detto *punto ellittico* se è il punto fisso di un elemento ellittico  $\gamma$  di  $\Gamma$ ; un punto  $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  è detto *cuspidale* se esiste un elemento parabolico  $\gamma \in \Gamma$  di cui  $s$  è punto fisso.

**Proposizione 2.2.6.** *Le cuspidi di  $\Gamma(1)$  sono esattamente i punti  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ . Ognuno di tali punti è  $\Gamma(1)$ -equivalente ad  $\infty$ .*

*Dimostrazione.* Di certo  $\infty$  è il punto fisso di  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Sia  $m/n \in \mathbb{Q}$  con  $m$  ed  $n$  primi tra loro. Per il teorema cinese del resto esistono due interi  $r$  ed  $s$  tali che  $rm - sn = 1$ . Sia  $\gamma = \begin{pmatrix} m & s \\ n & r \end{pmatrix}$ .  $\gamma(\infty) = m/n$  e, dunque,  $m/n$  è fissato da  $\gamma T \gamma^{-1}$ .

Viceversa, ogni elemento parabolico  $\sigma$  di  $\Gamma(1)$  è coniugato<sup>3</sup> a  $\pm T \equiv T$ , cioè si può scrivere  $\sigma = \gamma T \gamma^{-1}$  con  $\gamma \in GL(2, \mathbb{Q})$ . Il punto fissato da  $\sigma$  è  $\gamma(\infty)$  che appartiene a  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ .  $\square$

Si può dimostrare (cfr. [Miy89]) che

**Lemma 2.2.7.** *Se  $\Gamma'$  è un sottogruppo di indice finito di un gruppo Fuchsiano  $\Gamma$ , l'insieme delle cuspidi di  $\Gamma'$  coincide con l'insieme delle cuspidi di  $\Gamma$ .*

Quindi, considerando un sottogruppo  $\Gamma$  di  $\Gamma(1)$  di indice finito, le cuspidi sono le stesse di  $\Gamma(1)$ . Tuttavia c'è da fare attenzione, infatti, non tutte le cuspidi apparterranno alla stessa  $\Gamma$ -orbita: per  $\Gamma$  non tutte le cuspidi sono equivalenti. Si indicherà con  $\mathcal{C}_\Gamma$  un *insieme completo di rappresentanti delle classi di cuspidi non equivalenti*. Si scoprirà come è possibile contare quante sono le classi non equivalenti più avanti.

Fare tutta la teoria algebrica necessaria allo studio e alla catalogazione dei punti ellittici e delle cuspidi richiederebbe almeno un paio di corposi capitoli di un libro ed, in parte, esula dallo scopo di questo lavoro. Un ottimo riferimento per approfondire la questione è [Miy89].

<sup>3</sup>Per ulteriori dettagli si cerchi la Teoria delle Forme Canoniche di Jordan in un testo di Algebra Lineare.

## 2.3 Le superfici modulari

Sia  $\Gamma$  un sottogruppo di  $\Gamma(1)$  di indice finito  $\mu = [\Gamma(1) : \Gamma] < \infty$ .

La *superficie modulare*  $M_\Gamma := \Gamma \backslash \mathbb{H}$  è l'insieme dei punti  $\Gamma$ -equivalenti su  $\mathbb{H}$  equipaggiati della topologia quoziente<sup>4</sup>. Per la Proposizione 1.2.4 e il Corollario 1.2.6, il quoziente topologico  $M_\Gamma$  è uno spazio di Hausdorff.

C'è un teorema (cfr. [Mil74]) che afferma:

**Teorema 2.3.1.** *Sia  $\Gamma$  un sottogruppo discreto di  $SL(2, \mathbb{R})$  tale che  $\Gamma$  (o  $\Gamma/\{\pm I\}$  se  $-I \in \Gamma$ ) agisce liberamente su  $\mathbb{H}$ . Allora c'è un'unica struttura complessa su  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  con la seguente proprietà: una funzione  $f$  su  $U \subseteq \Gamma \backslash \mathbb{H}$  aperto è olomorfa se e solo se  $f \circ p$  è olomorfa.*

Purtroppo non tutti i sottogruppi di  $SL(2, \mathbb{Z})$  agiscono liberamente.

### 2.3.1 Domini fondamentali

Ai fini dello studio degli spazi quoziente  $M_\Gamma$  per un gruppo Fuchsiano  $\Gamma$ , sarebbe interessante se esistessero dei domini connessi in  $\mathbb{H}$  che rappresentino  $M_\Gamma$ . Tali domini esistono e vengono comunemente chiamati domini fondamentali.

Un *dominio fondamentale* per  $\Gamma$  è un sottoinsieme  $\mathcal{F}_\Gamma \subseteq \mathbb{H}$  chiuso e connesso tale che

$$\begin{cases} \bigcup_{\sigma \in \Gamma} \hat{\sigma}(\mathcal{F}_\Gamma) = \mathbb{H} \\ \hat{\sigma}(\mathring{\mathcal{F}}_\Gamma) \cap \hat{\sigma}'(\mathring{\mathcal{F}}_\Gamma) = \emptyset, \quad \forall \sigma, \sigma' \in \Gamma \text{ e } \sigma \neq \sigma' \end{cases}, \quad (2.7)$$

o, detto a parole, non contiene punti  $\Gamma$ -equivalenti e l'azione di  $\Gamma$  sulla chiusura  $\mathcal{F}_\Gamma$  ricopre tutto  $\mathbb{H}$ . Tali condizioni sono equivalenti rispettivamente a: la mappa  $\mathring{\mathcal{F}}_\Gamma \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}$  è iniettiva e la mappa  $\mathcal{F}_\Gamma \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}$  è suriettiva.

<sup>4</sup>Vuol dire che  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Gamma \backslash \mathbb{H}$  converge a  $q \in \Gamma \backslash \mathbb{H}$  se e solo se è possibile rappresentare ogni  $q_n$  tramite un elemento  $z_n \in \mathbb{H}$  nella classe d'equivalenza di  $q_n$  tale che  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a qualche  $z \in \mathbb{H}$  nella classe di equivalenza di  $q$ .

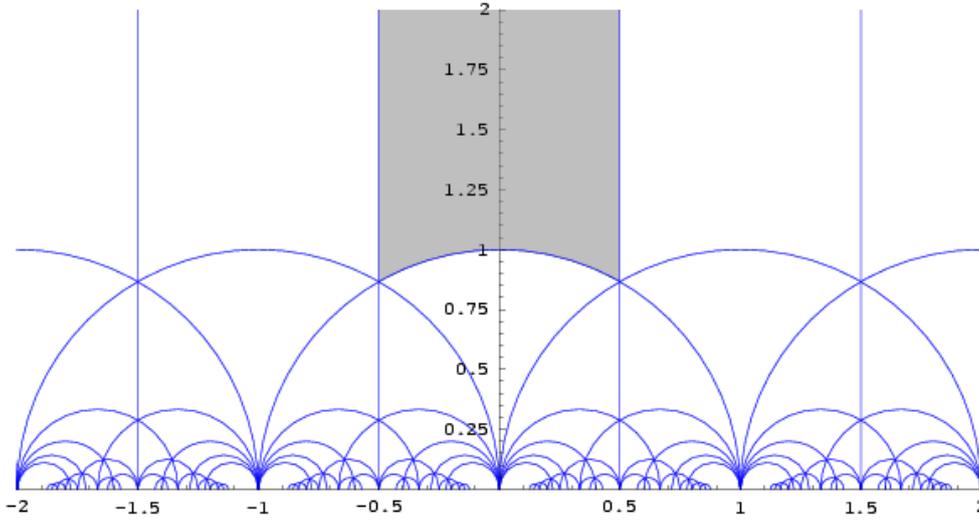


Figura 2.1: Il dominio fondamentale  $\mathcal{F}_{\Gamma(1)}$  e la relativa tassellazione del semipiano di Poincaré  $\mathbb{H}$ .

Il dominio fondamentale generalmente considerato per  $\Gamma = \Gamma(1)$  (cfr. [Ser06], [Miy89], [Kob84], [Mil74]) è

$$\mathcal{F}_{\Gamma(1)} = \left\{ z \in \mathbb{H} : |\Re z| \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1 \right\}. \quad (2.8)$$

Ogni  $\Gamma$  sottogruppo discreto di  $\Gamma(1)$  ammette dominio fondamentale (cfr. [Miy89], [Mil74]), per quanto riguarda questo lavoro sarà sufficiente provarlo solo per i sottogruppi di indice finito.

**Proposizione 2.3.2.** *Sia  $\Gamma$  un sottogruppo discreto di  $SL(2, \mathbb{R})$  e sia  $D$  un dominio fondamentale per  $\Gamma$ . Sia  $\Gamma'$  un sottogruppo di  $\Gamma$  di indice finito  $m$ . Sia*

$$\Gamma = \Gamma' \gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma' \gamma_m$$

*la rappresentazione di  $\Gamma$  come unione disgiunta di laterali destri di  $\Gamma'$ . Allora  $\mathcal{F}_{\Gamma'} := \bigcup \gamma_i \mathcal{F}_{\Gamma}$  è un dominio fondamentale per  $\Gamma'$  (non necessariamente connesso).*

*Dimostrazione.* Sia  $z \in \mathbb{H}$ . Allora  $z = \hat{\gamma} z'$  per qualche  $z' \in \mathcal{F}_{\Gamma}$ ,  $\gamma \in \Gamma$  e  $\gamma = \gamma' \gamma_i$  per qualche  $\gamma_i \in \Gamma'$ . Di conseguenza  $z = \hat{\gamma}' \hat{\gamma}_i z' \in \Gamma'(\hat{\gamma}_i \mathcal{F}_{\Gamma})$ .

Se per assurdo  $\hat{\gamma}\mathcal{F}_{\Gamma'} \cap \mathcal{F}_{\Gamma'} \neq \emptyset$ , deve contenere in trasformato di  $\mathcal{F}_{\Gamma}$ . Ma allora  $\hat{\gamma}\hat{\gamma}_i\mathcal{F}_{\Gamma} = \hat{\gamma}_j\mathcal{F}_{\Gamma}$  per qualche  $i \neq j$  e perciò  $\gamma\gamma_i = \gamma_j$ . Assurdo!  $\square$

Come viene dimostrato in [Miy89] ed affermato in [Mil74]

**Proposizione 2.3.3.** *Si possono scegliere i  $\gamma_i$  in modo che  $\mathcal{F}_{\Gamma'}$  sia connesso.*

In sintesi, per  $\Gamma \subseteq \Gamma(1)$  si può scegliere come dominio fondamentale

$$\mathcal{F}_{\Gamma} = \bigcup_{\{\sigma\} \in \Gamma \backslash \Gamma(1)} \hat{\sigma}(\mathcal{F}_{\Gamma(1)}), \quad (2.9)$$

dove l'unione è sui rappresentanti delle  $\mu$  classi di equivalenza del quoziente  $\Gamma \backslash \Gamma(1)$ . Poiché l'area iperbolica di  $\mathcal{F}_{\Gamma(1)}$  è pari a  $\pi/3$  (cfr. [Ser06], [Miy89], [Kob84]), l'area iperbolica dei domini fondamentali  $\mathcal{F}_{\Gamma}$  di sottogruppi  $\Gamma \triangleleft \Gamma(1)$  di indice finito  $\mu$  è proprio  $\mu \cdot \pi/3$ .

### 2.3.2 La struttura complessa di $M_{\Gamma}$

Prima di definire  $\mathbb{H}^*$  e la struttura complessa sul quoziente  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  è utile discutere un semplice esempio.

ESEMPIO 2.3.1.

Sia  $X = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > c\}$  per qualche  $c \in \mathbb{R}$ . Sia  $h$  un intero fissato. Si consideri l'azione di  $\mathbb{Z}$  su  $X$  definita  $z \mapsto z + nh$  per  $n \in \mathbb{Z}$ . Si aggiunga a  $X$  il punto “ $\infty$ ” e si definisca su  $X^* := X \cup \{\infty\}$  la seguente topologia: un sistema fondamentale di intorni per  $\infty$  è dato dagli insiemi della forma  $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > N\}$ .

Si può estendere l'azione di  $\mathbb{Z}$  su  $X$  ad un'azione continua su  $X^*$  richiedendo  $\infty + nh = \infty$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ . Si consideri, ora, lo spazio quoziente  $\Gamma \backslash X^*$ . La funzione

$$q(z) = \begin{cases} e^{2\pi iz/h} & z \neq \infty, \\ 0 & z = \infty \end{cases}$$

è un omeomorfismo tra  $\Gamma \backslash X^*$  e il disco aperto  $D_{c/h}$  di raggio  $e^{-2\pi c/h}$  e centro 0. Di conseguenza definisce una struttura complessa su  $\Gamma \backslash X^*$  ereditata dal disco aperto  $D_{c/h}$ .

### La struttura complessa su $\Gamma(1) \setminus \mathbb{H}^*$

Innanzitutto si deve definire la struttura complessa su  $\Gamma(1) \setminus \mathbb{H}$ . Si denoti con  $p : \mathbb{H} \rightarrow \Gamma(1) \setminus \mathbb{H}$  la proiezione sul quoziente e siano  $P$  un punto di  $\Gamma(1) \setminus \mathbb{H}$  e  $Q$  un punto di  $\mathbb{H}$  che viene proiettato su  $P$ .

Se  $Q$  non è un punto ellittico, si può scegliere un intorno  $U$  di  $Q$  per cui  $p : U \rightarrow p(U)$  è un omeomorfismo. La coppia  $(p(U), p^{-1})$  è una carta locale per  $P$ .

Se  $Q$  è un punto ellittico, si può dimostrare (cfr. [Ser06], [Mil74], [Miy89]) che deve necessariamente essere equivalente ad  $i$  o a  $\rho^2 = e^{2\pi i/3}$  (o, alternativamente, a  $\rho = e^{\pi i/3}$ ).

Se  $Q$  è equivalente ad  $i$ , si può senza perdere di generalità considerarlo uguale ad  $i$ . La mappa  $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$  definisce un isomorfismo tra un disco aperto  $D_i$  centrato in  $i$  ed un disco aperto  $D$  centrato in 0, e trasforma l'azione di  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  su  $D_i$  in un automorfismo  $\Sigma : z \mapsto -z$  su  $D$ . Quindi  $\langle S \rangle \setminus D_i$  è omeomorfo a  $\langle \Sigma \rangle \setminus D$ . Poniamo su  $\langle S \rangle \setminus D_i$  la struttura complessa che rende l'omeomorfismo un isomorfismo bi-olomorfo. Più esplicitamente,  $\frac{z-i}{z+i}$  è una funzione olomorfa definita in un intorno di  $i$  ed  $S$  la mappa in

$$\frac{-z^{-1} - i}{-z^{-1} + i} = \frac{-1 - iz}{-1 + iz} = \frac{-i + z}{-i - z} = -\frac{z - i}{z + i}.$$

Perciò  $z \mapsto \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2$  è una funzione olomorfa definita in un intorno di  $i$  invariante sotto l'azione di  $S$ ; di conseguenza definisce una funzione olomorfa in un intorno di  $p(i)$  che è il sistema di coordinate intorno a  $p(i)$  cercato.

Se  $Q$  è equivalente a  $\rho^2$ , si può lavorare in modo simile a quanto appena fatto applicando una trasformazione lineare fratta che mappi  $Q$  in 0 e considerando il cubo della mappa:  $\rho^2$  è fissato da  $ST$  che ha ordine 3 (come trasformazione). La funzione  $z \mapsto \frac{z-\rho^2}{z-\bar{\rho}^2}$  definisce un isomorfismo tra un disco centrato in  $\rho^2$  ed un disco centrato in 0, e  $\left(\frac{z-\rho^2}{z-\bar{\rho}^2}\right)^3$  è invariante per  $ST$ . Dunque, definisce una funzione in un intorno di  $p(\rho^2)$  che è il sistema di coordinate intorno a  $p(\rho^2)$  cercato.

La superficie di Riemann  $\Gamma(1) \setminus \mathbb{H}$  così ottenuta, tuttavia, non è compatta. Per compattificarla è necessario aggiungere un punto. Il modo più semplice

per farlo è aggiungere ad  $\mathbb{H}$  il punto  $\infty$ , come nell'Esempio 2.3.1, ed usare la funzione  $q(z) = e^{2\pi iz}$  per mappare gli intorni  $U = \{z \in \mathbb{H} : \Im(z) > N\}$  di  $\infty$  in un disco aperto  $V$  centrato in 0. La funzione  $q$  è invariante sotto l'azione dello stabilizzatore  $\langle T \rangle$  di  $\infty$  e dunque definisce una funzione olomorfa  $q : \langle T \rangle \backslash U \rightarrow V$  che è il sistema di coordinato intorno a  $p(\infty)$  cercato.

OSSERVAZIONE 4. Alternativamente, si può considerare  $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$  unione di  $\mathbb{H}$  con l'insieme delle cuspidi di  $\Gamma$ . Ogni cuspide diversa da  $\infty$  è un punto razionale sull'asse reale ed è della forma  $\hat{\sigma}(\infty)$  per qualche  $\sigma \in \Gamma(1)$ . Dando a  $\hat{\sigma}(\infty)$  il sistema fondamentale di intorni per cui  $\sigma$  è un omeomorfismo, si ha che  $\Gamma(1)$  agisce su  $\mathbb{H}^*$  con continuità e si può considerare lo spazio quoziente  $\Gamma(1) \backslash \mathbb{H}^*$ . Chiaramente,  $\Gamma(1) \backslash \mathbb{H}^* = (\Gamma(1) \backslash \mathbb{H}) \cup \{\infty\}$  e può essere dotato della stessa struttura complessa definita sopra.

**Proposizione 2.3.4.** *La superficie di Riemann  $\Gamma(1) \backslash \mathbb{H}^*$  è un compatto ed ha genere 0; è inoltre isomorfa alla sfera di Riemann.*

*Dimostrazione.* La compattezza dipende dal fatto che  $\mathcal{F}_{\Gamma(1)} \cup \{\infty\}$  è compatto. Esistono varie dimostrazioni del fatto che ha genere 0 ed è isomorfa alla sfera di Riemann. Per completezza di accenna ad alcune di esse (per dettagli o altre prove si faccia riferimento a [Miy89], [Mil74]).

In primis, se si esamina attentamente come vengono identificati i punti di  $\mathcal{F}_{\Gamma(1)}$  si può osservare che deve essere omeomorfo ad una sfera.

In secondo luogo, si può dimostrare che  $\mathcal{F}_{\Gamma(1)}$  è semplicemente connesso. Per il Teorema di Mappatura di Riemann l'unica superficie di Riemann compatta semplicemente connessa è la sfera di Riemann.

Infine, si dimostra in modo diretto che esiste una funzione  $j$  olomorfa su  $\mathcal{F}_{\Gamma(1)} \backslash \mathbb{H}$  con un polo semplice in  $\infty$ . Una tale funzione ha valenza 1 e, perciò, definisce un isomorfismo tra  $\mathcal{F}_{\Gamma(1)} \backslash \mathbb{H}$  e la sfera di Riemann.  $\square$

### La struttura complessa su $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$

Sia  $\Gamma$  un sottogruppo di  $\Gamma(1)$  di indice finito. Si può definire una superficie di Riemann compatta  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  in modo analogo a quanto fatto per  $\Gamma(1)$ . Il

complementare di  $\Gamma \setminus \mathbb{H}$  in  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  è l'insieme delle classi di equivalenza delle cuspidi per  $\Gamma$ .

Innanzitutto si fornisce  $\Gamma \setminus \mathbb{H}$  di una struttura complessa esattamente come nel caso  $\Gamma = \Gamma(1)$ . Dopodiché si nota che  $\infty$  è sempre una cuspidale, infatti  $\Gamma$  deve contenere  $T^h$  per qualche  $h \in \mathbb{N}$  e  $T^h$  è un elemento parabolico che fissa  $\infty$ . Se  $h$  è la più piccola potenza di  $T$  in  $\Gamma$ , la funzione  $q(z) = e^{2\pi iz/h}$  è un sistema di coordinate attorno ad  $\infty$ . Ogni altra cuspidale è della forma  $\hat{\sigma}(\infty)$  per qualche  $\sigma \in \Gamma(1)$  e  $z \mapsto q(\hat{\sigma}^{-1}(z))$  è un sistema di coordinate attorno alla cuspidale  $\hat{\sigma}(\infty)$ .

I gruppi Fuchsiani  $\Gamma$  per i quali la superficie di Riemann  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  è compatta, vengono detti *gruppi Fuchsiani del primo tipo*. Si può dimostrare (cfr. [Miy89]) che

**Teorema 2.3.5** (Siegel). *Sia  $\Gamma$  un gruppo Fuchsiano.  $\Gamma$  è del primo tipo se e solo se il volume della superficie di Riemann  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  è finito.*

Teorema da cui seguono due importantissimi Corollari (cfr. [Miy89]):

**Corollario 2.3.6.** *Sia  $\Gamma$  un gruppo Fuchsiano del primo tipo. Ogni sottogruppo di  $\Gamma$  di indice finito è anche esso un gruppo Fuchsiano del primo tipo.*

**Corollario 2.3.7.** *Sia  $\Gamma$  un gruppo Fuchsiano del primo tipo e sia  $\mathcal{F}_\Gamma$  il suo dominio fondamentale. Chiamati vertici di  $\mathcal{F}_\Gamma$  i punti ottenuti dall'intersezione  $\mathcal{F}_\Gamma \cap (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$  accade che: ogni vertice di  $\mathcal{F}_\Gamma$  è una cuspidale di  $\Gamma$  e, viceversa, ogni cuspidale di  $\Gamma$  è equivalente a un vertice di  $\mathcal{F}_\Gamma$ .*

Il procedimento sfruttato per trasportare la struttura complessa su  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ , in virtù del fatto che l'azione di  $PSL(2, \mathbb{R})$  su  $\mathbb{H}$  rappresenta tutte e sole le isometrie ed in virtù del Lemma 1.4.2, trasporta su  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  anche la metrica iperbolica (cfr. [Miy89], [Jos06]).

Più avanti si farà riferimento sia a  $\Gamma \setminus \mathbb{H}$  che a  $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$  con la notazione  $M_\Gamma$ . Nel caso fosse necessario si specificherà a quale delle due definizioni si fa riferimento.

### 2.3.3 Il genere di $M_\Gamma$

Ricordando che si può considerare  $M_\Gamma$  come rivestimento di  $M_{\Gamma(1)}$ , si ha una via abbastanza diretta per calcolarne il genere.

In accordo con la formula di Riemann-Hurwitz, si ha che  $2g - 2 = -2\mu + \sum(\epsilon_P - 1)$  o, meglio, che

$$g = 1 - \mu + \sum(\epsilon_P - 1)/2$$

dove  $\mu$  è il grado del rivestimento  $M_\Gamma \rightarrow M_{\Gamma(1)}$  (che coincide con l'indice  $[\Gamma(1) : \Gamma]$ ) ed  $\epsilon_P$  è l'indice di ramificazione nel punto  $P$ . I punti di ramificazione non sono altro che le immagini dei punti ellittici e delle cuspidi su  $\mathbb{H}^*$ .

**Teorema 2.3.8.** *Sia  $\Gamma$  un sottogruppo di  $\Gamma(1)$  di indice finito e siano*

- $\nu_2$ : *il numero di punti ellittici non equivalenti di ordine 2;*
- $\nu_3$ : *il numero di punti ellittici non equivalenti di ordine 3;*
- $\nu_\infty$ : *il numero di cuspidi non equivalenti.*

Allora il genere di  $M_\Gamma$  è

$$g = 1 + \frac{\mu}{12} + \frac{\nu_2}{4} + \frac{\nu_3}{3} + \frac{\nu_\infty}{2}.$$

*Dimostrazione.* Sia  $p : \mathbb{H}^* \rightarrow \Gamma(1) \backslash \mathbb{H}^*$  la proiezione sul quoziente e sia  $\varphi$  la mappa  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^* \rightarrow \Gamma(1) \backslash \mathbb{H}^*$ . Se  $Q$  è un punto di  $\mathbb{H}^*$  e  $P'$  e  $P$  sono le sue immagini in  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  e  $\Gamma(1) \backslash \mathbb{H}^*$  l'indice di ramificazione soddisfa

$$\epsilon_{Q/P} = \epsilon_{Q/P'} \cdot \epsilon_{P'/P}.$$

Se  $Q$  è una cuspidale tale formula è inutile in quanto, essendo  $p$  una mappa  $\infty : 1$  su ogni intorno di  $\infty$ , si ha  $\epsilon_{Q/P} = \infty = \epsilon_{P'/P}$ . Questo significa che per i punti  $Q \in \mathbb{H}$  non ellittici, i punti  $P'$  non sono ramificati (cfr. [Mil74], [Miy89]).

S supponga  $P = p(i)$ , in modo che  $Q$  sia  $\Gamma(1)$ -equivalente a  $i$ . Allora o  $\epsilon_{Q/P'} = 2$  o  $\epsilon_{P'/P} = 2$ . Nel primo caso  $Q$  è un punto ellittico per  $\Gamma$  e  $P'$  non

è ramificato su  $P$ ; nel secondo  $Q$  non è un punto ellittico per  $\Gamma$  e l'indice di ramificazione di  $P'$  su  $P$  è 2. Ci sono  $\nu_2$  punti  $P'$  del primo tipo e  $(\mu - \nu_2)/2$  punti del secondo. Dunque  $\sum(\epsilon_{P'} - 1) = (\mu - \nu_2)/2$ .

Si supponga, ora,  $P = p(\rho)$ , in modo che  $Q$  sia  $\Gamma(1)$ -equivalente a  $\rho$ . Come in precedenza, o  $\epsilon_{Q/P'} = 3$  o  $\epsilon_{P'/P} = 3$ . Nel primo caso  $Q$  è un punto ellittico per  $\Gamma$  e  $P'$  non è ramificato su  $P$ ; nel secondo  $Q$  non è un punto ellittico per  $\Gamma$  e l'indice di ramificazione di  $P'$  su  $P$  è 3. Ci sono  $\nu_3$  punti  $P'$  del primo tipo e  $(\mu - \nu_3)/3$  punti del secondo. Dunque  $\sum(\epsilon_{P'} - 1) = (\mu - \nu_3)/3$ .

Si supponga, infine, che  $P = p(\infty)$ , in modo che  $Q$  sia una cuspidale per  $\Gamma$ . Esistono  $\nu_\infty$  punti  $P'$  e  $\sum \epsilon_{P'} = \mu$ ; dunque  $\sum(\epsilon_{P'} - 1) = \mu - \nu_\infty$ .

Ricapitolando si ha

$$\begin{aligned} \sum(e_{P'} - 1) &= (\mu - \nu_2)/2 && \text{quando } P' \text{ varia tra i } \varphi(i), \\ \sum(e_{P'} - 1) &= (\mu - \nu_3)/3 && \text{quando } P' \text{ varia tra i } \varphi(\rho), \\ \sum(e_{P'} - 1) &= (\mu - \nu_\infty) && \text{quando } P' \text{ varia tra i } \varphi(\infty), \end{aligned}$$

e dunque

$$g = 1 - \mu + \sum(\epsilon_P - 1)/2 = 1 + \frac{\mu}{12} + \frac{\nu_2}{4} + \frac{\nu_3}{3} + \frac{\nu_\infty}{2}.$$

□

### Alcune osservazioni relative a $\Gamma(N)$

A questo punto, risulta utile cercare di calcolare i valori  $\nu_2$ ,  $\nu_3$  e  $\nu_\infty$  nei casi più strettamente legati a questo lavoro: i sottogruppi normali di congruenza  $\Gamma(N)$ .

Sia  $N > 1$ . Poiché  $\Gamma(N)$  è un sottogruppo normale di  $\Gamma(1)$ , ogni  $\Gamma(1)$  coniugato di un elemento di  $\Gamma(N)$  appartiene a  $\Gamma(N)$ . Ogni elemento ellittico (cfr. [Ser06], [Mil74], [Miy89]) è coniugato tramite

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad ST = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (ST)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

e nessuna di queste si trova in  $\Gamma(N)$ . Questo implica che  $\Gamma(N)$  non ha elementi ellittici ( $\nu_2(\Gamma(N)) = \nu_3(\Gamma(N)) = 0$ ).

Dimostrando che l'indice  $\mu_N$  della (2.6) si lega alla cardinalità dell'insieme  $\mathcal{C}_{\Gamma(N)}$  tramite la relazione

$$\mu_N = N \|\mathcal{C}_{\Gamma(N)}\|, \quad (2.10)$$

si conclude che il genere di  $M_{\Gamma(N)}$  è

$$g(\Gamma(N) \backslash \mathbb{H}^*) = 1 + \frac{N-6}{12N} \mu_N \quad (N > 1). \quad (2.11)$$

Inoltre, il primo numero di Betti è tale che

$$b^1(\mathcal{F}_{\Gamma(N)}) = g(\Gamma(N) \backslash \mathbb{H}^*) + \|\mathcal{C}_{\Gamma(N)}\| - 1 = \frac{N+6}{12N} \mu_N \quad (2.12)$$

da cui si ricava immediatamente  $H^1(\mathcal{F}_{\Gamma(N)}, \mathbb{R})$ .

Per poter chiudere il buco mancante basta enunciare e dimostrare un breve lemma preliminare.

**Lemma 2.3.9.** *Sia  $\Gamma$  un gruppo Fuchsiano e sia  $\Gamma'$  un suo sottogruppo normale di indice finito. Per una cuspidale  $x$  di  $\Gamma$ , il numero di cuspidi  $\Gamma$ -equivalenti ad  $x$  che sono  $\Gamma'$ -inequivalenti è uguale a*

$$[\Gamma : \Gamma'] / [\Gamma_x : \Gamma'_x]$$

dove  $\Gamma_x$  sta ad indicare lo stabilizzatore di  $x$  rispetto a  $\Gamma$ .

*Dimostrazione.* Si noti che, poiché  $\Gamma'$  è un sottogruppo normale di  $\Gamma$ ,  $\Gamma' \cdot \Gamma_x$  è un sottogruppo di  $\Gamma$  tale che il numero cercato  $|\Gamma' \backslash \Gamma / \Gamma_x| = |\Gamma / \Gamma' \cdot \Gamma_x|$ . La tesi segue direttamente dal fatto che

$$\begin{aligned} [\Gamma : \Gamma'] &= [\Gamma : \Gamma' \cdot \Gamma_x] [\Gamma' \cdot \Gamma_x : \Gamma'] \\ &= [\Gamma : \Gamma' \cdot \Gamma_x] [\Gamma_x : \Gamma'_x]. \end{aligned}$$

□

A questo punto, notando che

$$\nu_\infty(\Gamma(N)) = [\Gamma(1) : \Gamma(N)] / [\Gamma(1)_\infty : \Gamma(N)_\infty],$$

l'equazione (2.10) è una conseguenza diretta della formula (2.6).

Resta solo da trovare un modo per scegliere l'insieme di cuspidi non equivalenti, a tal proposito si può sfruttare il seguente teorema<sup>5</sup>.

**Teorema 2.3.10.** *Sia  $N > 1$ . Si può scegliere come insieme completo di rappresentanti delle cuspidi non equivalenti  $\mathcal{C}_{\Gamma_N}$  l'insieme*

$$\left\{ m/n \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\} : \gcd(m, n) = 1, (m \bmod N, n \bmod N) \in M_N / \{\pm 1\} \right\}$$

dove  $M_N$  è l'insieme degli elementi di ordine  $N$  in  $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ .

In sintesi, la superficie modulare  $M_\Gamma$  può essere costruita identificando i punti del bordo di  $\mathcal{F}_\Gamma$  legati tramite i generatori del gruppo  $\Gamma$  (cfr. [Ran77], [Jos06]) e, topologicamente, è isomorfa ad una sfera bucata con un numero finito di buchi e di cuspidi non equivalenti ubicate all' $\infty$  e in punti razionali di  $\mathbb{R}$ .

Non solo la superficie  $M_\Gamma$  ottenuta è una superficie di Riemann, ma eredita da  $\mathbb{H}$  anche la metrica iperbolica ed è a tutti gli effetti una varietà riemanniana<sup>6</sup> iperbolica.

## 2.4 La superficie modulare $M_{\Gamma(2)}$

### 2.4.1 Il gruppo modulare $\Lambda$ , ovvero $\Gamma(2)$

Il gruppo centrale, in questo lavoro, è il sottogruppo principale di congruenza di ordine 2

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1) \mid a, d \text{ dispari, } b, c \text{ pari} \right\}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

chiamato anche gruppo modulare  $\Lambda$ .

**Lemma 2.4.1.** *Il gruppo  $\tilde{\Gamma}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \right\}$  è generato dalle matrici*

$$-I, \quad ST^2S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

<sup>5</sup>Una dimostrazione è consultabile in [Miy89]

<sup>6</sup>Per approfondimenti fare riferimento a [Miy89] e [Jos06].

*Dimostrazione.* Sia  $G$  il sottogruppo di  $SL(2, \mathbb{Z})$  generato da  $T^2$ ,  $-I$  e  $ST^2S^{-1}$ . Poiché, come è già stato detto,  $SL(2, \mathbb{Z})$  è generato da  $T$  ed  $S$ , non è difficile verificare che  $G$  è un sottogruppo normale di  $SL(2, \mathbb{Z})$  contenuto in  $\tilde{\Gamma}(2)$ .

Per il fatto che  $SL(2, \mathbb{Z})/\tilde{\Gamma}(2) \cong SL(2, \mathbb{Z}/2)$ , è sufficiente dimostrare che l'omomorfismo naturale  $\phi : SL(2, \mathbb{Z})/G \rightarrow SL(2, \mathbb{Z}/2)$  è iniettivo. Sia  $g \in SL(2, \mathbb{Z})/G$  un elemento del nucleo di  $\phi$ . Tale elemento può essere scritto come una parola in  $S$  e  $T$ . Poiché

$$\phi(T) = \phi(T^{-1}), \quad \phi(T^2) = 1, \quad S^2 = 1, \quad S^{-1} = S,$$

si può sostituire  $g$  con un altro elemento dalla stessa classe modulo  $G$  e assumere che  $g$  sia una parola in  $S$  e  $T$  in cui non compaiono  $S^2$  e  $T^2$ . D'altra parte, sapendo che  $(ST)^3 = 1$ , ci sono solo le seguenti espressioni possibili per  $g$ :

$$S, ST, STS, STST, STSTS, T;$$

in quanto  $\phi(T^2S^2) = 1$  implica che  $\phi(TS) = \phi(ST)^{-1}$  e, similmente,

$$\begin{aligned} \phi(TST) &= \phi(STS)^{-1}, \\ \phi(TSTS) &= \phi(STST)^{-1}, \\ \phi(TSTST) &= \phi(STSTS)^{-1}. \end{aligned}$$

Infine,  $\phi(ST) = \phi(STST)^{-1}$ . Dunque è sufficiente verificare che gli elementi  $S, ST, STS, T$  non sono nel nucleo, cioè non dipendono da  $\tilde{\Gamma}(2)$ . Scrivendo esplicitamente le 4 matrici è facile osservare che questo accade.  $\square$

Poiché  $\Gamma(2) = \tilde{\Gamma}(2)/\{\pm I\}$  tale sottogruppo ha due generatori, per la precisione (cfr. [May91])

$$ST^2S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

e, come già osservato in precedenza, non contiene elementi ellittici.

Come viene mostrato anche in [Sch74],  $\Gamma(2) \setminus \Gamma(1) \cong S_3$  (gruppo simmetrico di ordine 3) ed ha rappresentanti  $\{I, T, S, TS, ST, STS\}$ , in accordo con l'osservazione fatta in precedenza per cui  $[\Gamma(1) : \Gamma(2)] = 6$ .

### 2.4.2 La geometria di $M_{\Gamma(2)}$

Recuperando quanto affermato nelle sezioni precedenti, l'azione di  $\Gamma(2)$  su  $\mathbb{H}$  genera una varietà connessa ma non compatta che può essere compattificata aggiungendo 3 punti cuspidali. Il suo dominio fondamentale  $\mathcal{F}_{\Gamma(2)}$  ha area iperbolica  $2\pi$  e il primo gruppo di coomologia è non banale:  $H^1(\mathcal{F}_{\Gamma(2)}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2 \neq 0$ . Inoltre, data la mancanza di trasformazioni ellittiche,  $\Gamma(2)$  agisce in  $\mathbb{H}$  senza punti fissi.

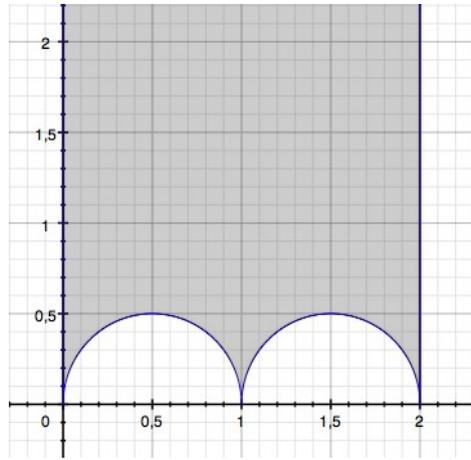


Figura 2.2: Il dominio fondamentale  $\mathcal{F}_{\Gamma(2)}$ .

Considerato che  $\|\mathcal{C}_{\Gamma(2)}\| = 3$ , che  $\infty$  può essere sempre incluso nell'insieme  $\mathcal{C}_{\Gamma(2)}$  e che  $0, 1, \infty$  non sono  $\Gamma(2)$ -equivalenti, si può scegliere

$$\mathcal{C}_{\Gamma(2)} := \{0, 1, \infty\}.$$

*Dimostrazione.* La mappa  $0 \mapsto 1$  è  $T \notin \Gamma(2)$ , la mappa  $\infty \mapsto 0$  è  $S \notin \Gamma(2)$  e la mappa  $1 \mapsto \infty$  è  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \notin \Gamma(2)$ .  $\square$

# Capitolo 3

## Analisi del Laplaciano su $M_{\Gamma(2)}$

### 3.1 Aspetti astratti

Poiché  $H^1(\mathcal{F}_{\Gamma(2)}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$ , fissato l'integrale di una 1-forma chiusa  $A \in \Omega^1(\mathcal{F}_{\Gamma(2)})$  attorno a due delle tre cuspidi, l'integrale sulla terza sarà una somma degli altri due.

Quello che si vuole studiare è l'operatore

$$\Delta_A := (d + iA)^*(d + iA) \text{ su } L^2(\mathcal{F}_{\Gamma(2)})$$

con  $A \in \Omega^1(\mathcal{F}_{\Gamma(2)})$  chiusa. In modo equivalente, si può studiare il corrispondente operatore su  $L^2(\mathbb{H})$  (anche esso indicato con  $\Delta_A$ ), considerando funzioni  $\Gamma(2)$ -invarianti in cui la 1-forma chiusa  $A$  è il pull-back di  $A$  rispetto alla proiezione  $\mathbb{H} \rightarrow \mathcal{F}_{\Gamma(2)}$ .

Come già accennato, si può sempre scambiare  $A$  con  $A' := A + d\phi$  per una qualunque  $\phi : \mathcal{F}_{\Gamma(2)} \rightarrow \mathbb{R}$  senza cambiare la classe di coomologia. Le proprietà spettrali di  $\Delta_A$ , in tal caso, sono le stesse di  $\Delta_{A'}$ . Si può anche modificare il valore degli integrali di  $A$  attorno alle cuspidi di multipli interi di  $2\pi$  formalizzando il tutto tramite trasformazioni unitarie su  $L^2(\mathcal{F}_{\Gamma(2)})$  (un cambio di fase globale). Questo perché l'integrale

$$\phi(z_1) = \phi(z_0) \cdot e^{i \int_0^1 A(z(t))}$$

è definito indipendentemente dalla scelta del cammino  $z : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}_{\Gamma(2)}$  da  $z_0$  a  $z_1 \in \mathcal{F}_{\Gamma(2)}$ .

Tutto ciò conduce ad una sorta di tassellazione del piano  $H^1(\mathcal{F}_{\Gamma(2)})$  come in Figura 3.1 che permette di concentrare l'attenzione su un triangolo come sarà più chiaro più avanti.

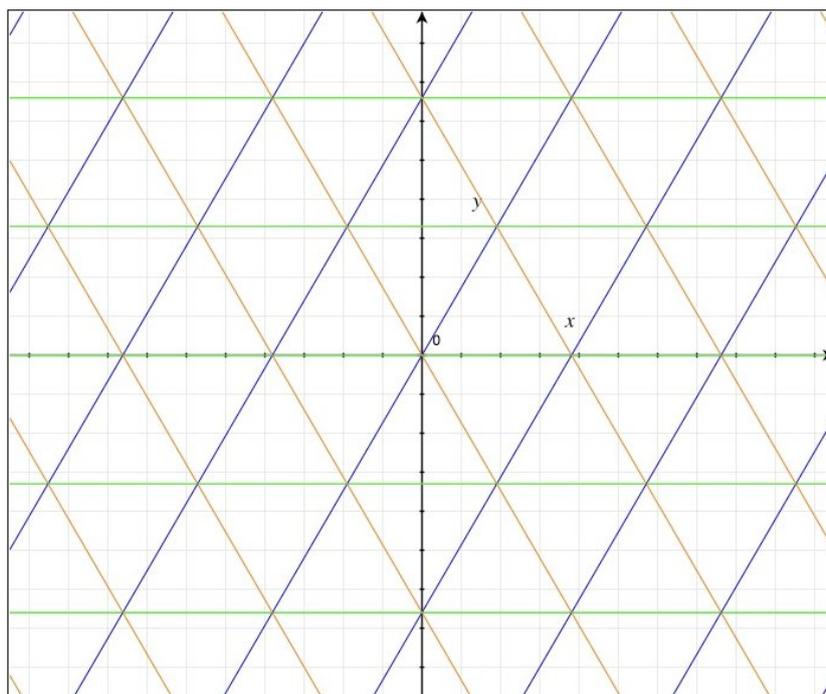


Figura 3.1: Tassellazione in triangoli di  $H^1(\mathcal{F}_{\Gamma(2)})$

## 3.2 Primo problema

Sia  $c_y : [0, 2] \rightarrow \mathbb{H}$  una famiglia di funzioni definita  $c_y(x) := x + iy$  per  $y > 1$ . Si sta cercando un potenziale vettore chiuso  $d\phi$  tale che

- $d\phi$  sia  $\Gamma(2)$ -periodico (cioè definito su  $M_{\Gamma(2)}$ );

- $\int_{c_y} d\phi = b_\infty$  e  $\int_{\hat{\sigma}c_y} d\phi = b_0$  con  $\sigma := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  (l'integrale attorno alla terza cuspidale vale automaticamente  $-b_0 - b_\infty$ );
- $\phi(x + iy) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} b_\infty x$  e  $\phi(\hat{\sigma}(x + iy)) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} b_0 x$ .

In altre parole, il potenziale vettore sarà qualcosa del tipo

$$A := d\phi = b_\infty d\varphi_\infty + b_0 d\varphi_0 + (-b_0 - b_\infty) d\varphi_1$$

con  $b_0, b_\infty$  costanti reali.

In particolare, si vorrebbe trovare un potenziale intrappolante nel senso specificato in precedenza che nel nostro caso si ridurrebbe ad avere  $b_0$  e  $b_\infty$  diversi da un multiplo intero di  $2\pi$ . Ma come possiamo essere sicuri di trovarlo?

Quando si parla di  $M_{\Gamma(2)}$ , si sta osservando una varietà Riemanniana che vicino alle cuspidi è diffeomorfa ad  $S^1 \times (1, \infty)$  e la cui metrica può essere scritta nella forma

$$g_p = y^{-2p}(dy^2 + h) \quad (3.1)$$

in cui  $h$  non è altro che  $dx^2$ . Per la precisione la metrica che stiamo considerando è esattamente la metrica cuspidale  $g_1$ .

Ricadiamo quindi nella casistica descritta in §1.7.2 potendo sfruttare tutti i teoremi relativi. In particolar modo il Teorema 1.7.1 garantisce l'esistenza di potenziali intrappolanti e non-intrappolanti relativi allo stesso campo magnetico, il Teorema 1.7.2 dice che nel caso di potenziali intrappolanti l'operatore  $\Delta_A$  è essenzialmente autoaggiunto e presenta spettro puramente discreto, e il Teorema 1.7.3 che la funzione di conteggio degli autovalori, per potenziali  $A$  intrappolanti, è asintoticamente

$$\begin{aligned} N_{A,1}(\lambda) &\approx C_1 \lambda^{2/2} = \frac{\lambda}{2} \\ C_1 &= \frac{\text{Vol}(X, g_1) \text{Vol}(S^1)}{2(2\pi)^2} = \frac{2\pi \cdot 2\pi}{2(2\pi)^2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Purtroppo, tale risultato generale, si ferma a studiare l'adamento asintotico di  $N_{A,1}(\lambda)$  con una precisione non sufficiente per osservare l'influenza

delle costanti  $b_0$  e  $b_\infty$  sullo spettro e dunque non è adatto a studiare come lo spettro discreto si innesti in quello continuo che appare facendo tendere questi valori a 0 ed andando a finire su un potenziale non-intrappolante. Si deve quindi tentare un approccio più diretto.

### 3.3 Ricerca del potenziale intrappolante

Si cerca un potenziale intrappolante con le caratteristiche precedentemente richieste imponendo il valore  $b_\infty$  dell'integrale attorno alla cuspidale all'infinito. Se si riuscisse a trovare tale 1-forma si sfrutterebbe la medesima tecnica accoppiata alla mappa  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  che trasporta  $\infty$  in 0 per definire il potenziale attorno alla cuspidale in 0. Il potenziale attorno alla terza cuspidale sarebbe automaticamente determinato. Si procederà, per ora, con un calcolo formale.

Si consideri una forma del tipo  $A_{b_\infty} = b_\infty dx = d(b_\infty x) = d\psi_{b_\infty}$ . Per rendere  $A_{b_\infty}$  invariante sotto l'azione di  $\Gamma(2)$ , sarà sufficiente considerare  $A = d\psi$  dove, senza perdere di generalità, si sta ponendo  $b_\infty = 1$  e  $\psi := \sum_{\sigma \in G} \hat{\sigma}^*(\psi_1) = \sum_{\sigma \in G} \Re(\hat{\sigma}(z))$ , sempre che l'espressione sia convergente. La possibilità di sommare su opportuni insiemi, in particolare quelli generati singolarmente dai due generatori di  $\Gamma(2)$ , deriva dal fatto che si sta lavorando con un gruppo libero.

Per regolarizzare la somma si considera l'insieme

$$\tilde{G} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(2) : c \text{ pari, } 0 < d < 2c \text{ dispari, } (a, 2c) = 1 \right\},$$

in modo che  $G = \tilde{G} \cup \{I\}$  risulti un sistema di rappresentanti per le classi laterali  $\Gamma_\infty \backslash \Gamma(2) / \Gamma_\infty$ , dove

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

è lo stabilizzatore di  $\infty$ .

Per ogni  $\sigma_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tilde{G}$ , sia  $\sigma_n$  definita

$$\sigma_n := \sigma_0 \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & b+2na \\ c & d+2na \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Si ha che

$$\psi_1 \circ \hat{\sigma}_n(z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2} \frac{\tilde{x} + 2n}{(\tilde{x} + 2n) + y^2} \quad (3.3)$$

con  $z = x + iy$ ,  $\tilde{x} := x + \frac{d}{c}$ . Per ogni matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tilde{G}$  esiste un'altra matrice in  $\tilde{G}$  con lo stesso  $c$  ma con il valore opposto per  $a$ , cioè  $\begin{pmatrix} -a & b-2a \\ c & -d+2c \end{pmatrix}$ . Dunque, sommando sulle matrici in  $\tilde{G}$ , il termine  $\frac{a}{c}$  si potrà eliminare per questioni di simmetria.

Sia  $\tilde{z} = \tilde{x} + iy$ , la somma  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_{1,\sigma,k}$ , con

$$\psi_{1,\sigma,n}(z) := \psi_1 \circ \hat{\sigma}_n(z) - \frac{a}{c} = -\frac{1}{c^2} \Re \left( \frac{1}{\tilde{z} + 2n} \right),$$

, a prima vista non converge assolutamente. Riscrivendola nella forma

$$\psi_{1,\sigma,0} + \sum_{k \in \mathbb{N}} (\psi_{1,\sigma,k} + \psi_{1,\sigma,-k}),$$

e osservando che

$$\begin{aligned} \psi_{1,\sigma,k}(z) + \psi_{1,\sigma,-k}(z) &= \frac{2\tilde{x}}{c^2} \frac{4k^2 - \tilde{x}^2 - y^2}{[(\tilde{x} - 2k)^2 + y^2][(\tilde{x} + 2k)^2 + y^2]} \\ &= -\frac{1}{c^2} \Re \left( \frac{2\tilde{z}}{\tilde{z}^2 - 4k^2} \right) \\ &= -\frac{1}{c^2} \Re \left( \frac{4w}{4w^2 - 4k^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2c^2} \Re \left( \frac{2w}{w^2 - k^2} \right) \end{aligned}$$

dove  $w$  è tale che  $2w = \tilde{z}$ , si ottiene la convergenza. Infatti,  $\psi_{1,\sigma,0} = -\frac{1}{c^2} \Re \left( \frac{1}{\tilde{z}} \right) = -\frac{1}{2c^2} \Re \left( \frac{1}{w} \right)$ , e dunque

$$\begin{aligned} \psi_{1,\sigma,0} + \sum_{k \in \mathbb{N}} (\psi_{1,\sigma,k} + \psi_{1,\sigma,-k}) &= \frac{\pi}{2c^2} \Re(\cot \pi w) \\ &= \frac{\pi}{2c^2} \frac{\sin(\pi \tilde{x})}{\cosh(\pi y) - \cos(\pi \tilde{x})} \end{aligned}$$

decade esponenzialmente in  $y$ .

Si ha

$$\begin{aligned}
\psi &= \sum_{c \text{ pari}} \sum_{\substack{d < 2c \\ (c,d)=1}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_{1,\sigma,k} = \sum_{c \text{ pari}} \sum_{\substack{d < 2c \\ (c,d)=1}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{a}{c} - \frac{1}{2c^2} \Re \left( \frac{2w}{w^2 - k^2} \right) \right] \\
&= \sum_{c \text{ pari}} \sum_{\substack{d < 2c \\ (c,d)=1}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( -\frac{1}{2c^2} \Re \left( \frac{2w}{w^2 - k^2} \right) \right) \\
&= \sum_{c \text{ pari}} \sum_{\substack{d < 2c \\ (c,d)=1}} \frac{\pi}{2c^2} \Re(\cot \pi w) \\
&= \sum_{c \text{ pari}} \sum_{\substack{d < 2c \\ (c,d)=1}} \frac{\pi}{2c^2} \Re \left( \cot \frac{\pi}{1} \left( z + \frac{d}{c} \right) \right) \\
&= \Re \left[ \sum_{c \text{ pari}} \frac{i\pi}{2c^2} \sum_{\substack{d < 2c \\ (c,d)=1}} \frac{1 + e^{\pi i(z + \frac{d}{c})}}{1 + e^{\pi i(z - \frac{d}{c})}} \right] \\
&= \Re \left[ \sum_{n=0}^{\infty} e^{\pi i n z} \sum_{c \text{ pari}} \frac{i\pi}{2c^2} \sum_{\substack{d < 2c \\ (c,d)=1}} \left( e^{\pi i n \frac{d}{c}} + e^{\pi i z} e^{\pi i(n+1)\frac{d}{c}} \right) \right] \\
&= \Re \left[ \sum_{n=0}^{\infty} e^{\pi i n z} \sum_{c \text{ pari}} \frac{i\pi}{2c^2} \sum_{\substack{d < c \\ (c,d)=1}} \left( e^{\pi i n \frac{d}{c}} + e^{\pi i z} e^{\pi i(n+1)\frac{d}{c}} + e^{\pi i n \frac{2c-d}{c}} + e^{\pi i z} e^{\pi i(n+1)\frac{2c-d}{c}} \right) \right] \\
&= \Re \left[ \sum_{n=0}^{\infty} e^{\pi i n z} \sum_{c \text{ pari}} \frac{i\pi}{2c^2} \sum_{\substack{d < c \\ (c,d)=1}} \left( e^{\pi i n \frac{d}{c}} + e^{-\pi i n \frac{d}{c}} + e^{\pi i z} \left( e^{\pi i(n+1)\frac{d}{c}} + e^{-\pi i(n+1)\frac{d}{c}} \right) \right) \right] \\
&= \Re \left[ \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n z} \sum_{c \text{ pari}} \frac{i\pi}{2c^2} (S(n, 2c) + e^{\pi i z} S(n+1, 2c)) \right] \\
&= \Re \left[ 4\pi i \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n z} \sum_{c \text{ pari}} \frac{S(n, 2c)}{4c^2} + 2\pi i \sum_{c \text{ pari}} \frac{\varphi(2c)}{4c^2} \right] \\
&= \Re \left[ 4\pi i \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S(n, 4k)}{16k^2} + 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(4k)}{16k^2} \right] \\
&\stackrel{?}{=} \Re \left[ 4\pi i \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n z} \frac{6}{\pi^2} \Sigma_{-1}(n) \right] = \Re \left[ 4\pi i \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n z} \frac{6}{\pi^2} \frac{\Sigma_1(n)}{n} \right] \\
&= \Im \left[ \frac{24}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n z} \frac{\Sigma_1(n)}{n} \right] = \frac{24}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Sigma_1(n)}{n} \sin(\pi n x) e^{-\pi n y}
\end{aligned}$$

dove  $\Sigma_l(n) = \sum_{d|n} d^l$  e  $S(n, c) := \sum_{\substack{0 < d \leq c \\ (d, c) = 1}} e^{2\pi i n \frac{d}{c}}$  è la somma di Ramanujan.

L'identità  $\sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(n, c)}{c^2} = \frac{6}{\pi^2} \Sigma_{-1}(n) \equiv \frac{6}{\pi^2} \frac{\Sigma_1(n)}{n}$  è un caso particolare della formula di Ramanujan  $\sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(n, c)}{c^s} = \frac{\Sigma_{1-s}(n)}{\zeta(s)}$  valida per  $\Re s > 1$  ed  $s = 1$ .

Il simbolo  $\stackrel{?}{=}$  nella somma sta ad indicare che si sta trascurando un termine immaginario che è proporzionale alla somma divergente  $\sum_{c=1}^{\infty} \frac{\varphi(c)}{c^2}$  del totiente di Eulero  $\varphi$ .

Purtroppo, andando a calcolare il potenziale si scopre che, seppur è invariante per  $G_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , manca l'invarianza rispetto a  $G_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  (l'altro generatore di  $\Gamma(2)$ ) e dunque manca l'invarianza per  $\Gamma(2)$ . Infatti  $d\psi = 24 \sum_{n=1}^{\infty} \Sigma_1(n) [\cos(\pi n x) e^{-\pi n y} dx - \sin(\pi n x) e^{-\pi n y} dy]$  e, dunque,

$$A(x, y) = dx + 24 \sum_{n=1}^{\infty} \Sigma_1(n) [\cos(\pi n x) e^{-\pi n y} dx - \sin(\pi n x) e^{-\pi n y} dy].$$

E' sufficiente una semplice graficazione numerica di  $A(x, y)$  e di  $A(\hat{G}_2(x, y))$  per osservare che non c'è invarianza.

Si potrebbe pensare, a questo punto, di risommare anche sul gruppo degli elementi generati da  $G_2$  ma i tentativi fatti fino a questo momento sono stati vani.

# Capitolo 4

## Il problema semplificato

### 4.1 Introduzione

Viste le difficoltà nell'affrontare il problema su  $\Gamma(2)$ , si può sperare di semplificarlo cercando una metrica iperbolica su un nuovo spazio che soddisfi le condizioni dei teoremi del [GM08].

Come già osservato, lo studio è stato affrontato su superfici asintoticamente omeomorfe (vicino alle cuspidi) ad un cilindro iperbolico, dunque si può immaginare di considerare il cilindro  $\mathcal{C} = \mathbb{R}_y \times S_x^1$  per ottenere un problema più semplice che mantenga una certa somiglianza (almeno asintotica) con la situazione iniziale.

È un fatto noto che  $\mathcal{C}$  presenti una coomologia non banale  $H^1(\mathcal{C}) = \mathbb{R}$  e che su di esso possa essere indotta una struttura di superficie di Riemann. Su tale spazio si cerca una metrica iperbolica conforme completa della forma (1.1) con  $\lambda$  funzione della sola variabile  $y$  e tale che

$$\lambda(y) = \lambda(-y),$$

per cui l'area di  $\mathcal{C}$  rispetto alla metrica sia finita, la curvatura

$$K(x, y) = -\Delta \log \lambda,$$

almeno nel limite  $|y| \rightarrow \infty$ , tenda a  $-1$ , ed, infine, che presenti almeno due cuspidi.

Ponendo

$$\lambda^2(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

si definisce una funzione pari  $C^\infty(\mathbb{R})$  che, inserita nella (1.1) definisce una metrica riemanniana iperbolica conforme e completa. La varietà che si ottiene ha volume

$$\begin{aligned} \text{area}(\mathcal{C}) &= \int_{\mathcal{C}} \star(1) = \int_M \frac{1}{1+y^2} dy dx \\ &= \int_0^{2\pi} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} \\ &= x \Big|_0^{2\pi} \arctan(y) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi^2, \end{aligned}$$

e funzione di curvatura

$$K(y) = 1 - \frac{2y^2}{1+y^2} \xrightarrow{|y| \rightarrow \infty} -1.$$

Inoltre, i due punti all'infinito sono cuspidi in quanto  $\int_0^\infty \lambda(y) dy = \infty$ .

## 4.2 Operatore di Laplace

Si consideri, dunque, la varietà riemanniana

$$(M := \mathbb{R}_y \times S_x^1, \quad g := (1+y^2)^{-1} \delta_{ij}). \quad (4.1)$$

Sia  $A_c := c dx$  con  $c \in \mathbb{R}$ , vettore potenziale di campo nullo. Se definiamo

$$d_c = d + iA = d + ic dx,$$

allora l'operatore di Laplace sulle funzioni su  $M$  sarà dato da

$$\Delta_c = d_c^* d_c \quad (4.2)$$

dove  $d_c^* := \star d_c \star$  con  $\star$  ad indicare l'operatore "star" di Hodge.

Nel nostro caso si ha:

$$\begin{aligned} \star(1) &= \frac{dy \wedge dx}{1+y^2}; \\ \star(dy \wedge dx) &= 1+y^2; \\ \star(dy) &= dx; \\ \star dx &= -dy. \end{aligned}$$

Sia  $f = f(x, y) \in C^2(M)$ , allora

$$\begin{aligned} \star d_c f &= \star \left[ \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial x} dx + icf dx \right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy - icf dy; \end{aligned}$$

$$d_c \star d_c f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy \wedge dx - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx \wedge dy - ic \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy - ic \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy + c^2 f dx \wedge dy;$$

$$\begin{aligned} d_c^* d_c f &= \star d_c \star d_c f \\ &= (1 + y^2) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2ic \frac{\partial f}{\partial x} - c^2 f \right). \end{aligned}$$

In altre parole, come operatore sulle funzioni  $C^2(M)$

$$\Delta_c = (1 + y^2) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2ic \frac{\partial}{\partial x} - c^2 \right) \quad (4.3)$$

### 4.3 Calcolo di autovalori ed autofunzioni

È evidente che i teoremi enunciati in §1.7.2 sono validi anche in questo caso. Quindi, per  $c \neq 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , l'operatore  $\Delta_c$  appena definito è essenzialmente autoaggiunto, presenta spettro puramente discreto e la funzione di conteggio degli autovalori  $N_{A_c,1}$  è tale che  $N_{A_c,1}(\lambda) \approx C_1 \lambda$  con  $C_1$  che dipende solo dal volume della varietà che siamo considerando. Recuperando il valore già ottenuto per l'area di  $M$ , si ha  $C_1 = (4\pi^3)/(8\pi^2)$  e dunque

$$N_{A_c,1}(\lambda) \approx \frac{\pi}{2} \lambda.$$

Come osservato nel capitolo precedente, questo andamento asintotico non permette di osservare come lo spettro dipenda da  $c$ . C'è dunque da operare un'analisi più approfondita.

Sia  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si cerca  $f_{c,\lambda} \in C^2(\mathbb{R} \times S^1)$  tale che

$$\Delta_c f_{c,\lambda} = \lambda f_{c,\lambda}. \quad (4.4)$$

Per comodità si indicheranno le derivate parziali con la notazione abbreviata  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \partial_t$ .

Una strada che potrebbe essere valida per affrontare il problema è sfruttare la separazione delle variabili. Sia  $f := U(x)V(y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ <sup>1</sup>, allora

$$\begin{aligned}\Delta_c f &= \lambda f \\ (1+y^2)(\partial_y^2 + \partial_x^2 + 2ic\partial_x - c^2)U(x)V(y) &= \lambda U(x)V(y) \\ U(x)V''(y) + U''(x)V(y) + 2icU'(x)V(y) - c^2U(x)V(y) &= \frac{\lambda}{(1+y^2)}U(x)V(y)\end{aligned}$$

e, supponendo di poter dividere per  $U(x)V(y)$ ,

$$\frac{U''(x)}{U(x)} + 2ic\frac{U'(x)}{U(x)} = \left(c^2 + \frac{\lambda}{1+y^2}\right) - \frac{V''(y)}{V(y)} \quad (4.5)$$

in cui al primo membro la dipendenza è solo da  $x$  mentre al secondo la dipendenza è solo da  $y$ , cioè i termini “a sinistra” e “a destra” dell’uguaglianza devono essere costanti. Sia  $K_{\lambda,c}$  tale costante, si ha

$$\begin{cases} \frac{V''(y)}{V(y)} - \left(c^2 + \frac{\lambda}{1+y^2}\right) = -K_{\lambda,c} \\ \frac{U''(x)}{U(x)} + 2ic\frac{U'(x)}{U(x)} = K_{\lambda,c} \end{cases}$$

o, meglio,

$$\begin{cases} V''(y) - \left(\frac{\lambda}{1+y^2} + c^2 - K_{\lambda,c}\right)V(y) = 0 \\ U''(x) + 2icU'(x) - K_{\lambda,c}U(x) = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

che sono due equazioni differenziali ordinarie di secondo grado omogenee.

La seconda equazione, che è quella su cui sarà necessario imporre la periodicità rispetto a  $2\pi$ , non è altro che un’esponenziale complesso della forma

$$U(x) = \sum_{i=1,2} A_i \exp(\alpha_i x)$$

dove  $\alpha \in \mathbb{C}$  è tale che  $\alpha^2 + 2ic\alpha - K_{\lambda,c} = 0$ , cioè  $\alpha_{1,2} = ic \pm \sqrt{-c^2 + K_{\lambda,c}}$ .

<sup>1</sup>Si noti che successivamente sarà necessario imporre una periodicità nella variabile  $x$ .

Devono ancora essere discusse le costanti (per questo sarà necessario imporre delle condizioni al contorno), d'altra parte c'è anche da periodicizzare la funzione in modo che sia ben definita su  $S^1$ . Per farlo si impone che  $U(x + 2\pi) = U(x)$ , ottenendo che l'esponentiale deve necessariamente avere  $\alpha$  di parte reale nulla e parte immaginaria intera: in simboli  $\Re\alpha_{1,2} = 0$  e  $\Im\alpha_{1,2} \in \mathbb{Z}$ , ovvero  $K_{\lambda,c} - c^2$  negativo e quadrato perfetto. In altre parole  $K_{\lambda,c} < 0$ , quindi si può scrivere  $K_{\lambda,c} = -h_{\lambda,c}^2$  con

$$h_{\lambda,c} \in \{h \in \mathbb{R} \mid \exists q_h \in \mathbb{Z} : h^2 + c^2 = q_h^2\}$$

in modo che

$$\alpha_{1,2} = ic \pm i\sqrt{h_{\lambda,c}^2 + c^2} = i(c \pm q_{h_{\lambda,c}}) = iH$$

con  $H \in \mathbb{Z}$ , ottenendo automaticamente la periodicità modulo  $2\pi$ .

Un altro problema sorge analizzando la prima equazione in (4.6) che sembra non essere risolvibile in forma chiusa, almeno in una forma così generale.

## 4.4 Conclusioni

Lo scopo che ci si prefigge è riuscire a trovare gli autovalori e le autofunzioni dell'operatore  $\Delta_c$  per poter scrivere una sorta di Legge di Weyl<sup>2</sup> in cui sia esplicita la dipendenza da  $c$ . La speranza è che, passando al limite  $c \rightarrow 0$  (o  $c \rightarrow 2\pi$ ), si riesca a studiare ed analizzare come gli autovalori si innestino nello spettro continuo. La perdita dell'autoessenzialità infatti, oltre a comportare la distruzione dello spettro in uno puramente continuo, potrebbe portare alla comparsa di "risonanze" il cui andamento sembrerebbe avere un legame profondo con particolari composizioni di funzioni Zeta.

Anche se il problema semplificato potrebbe non comportare la comparsa delle risonanze si spera di poter sfruttare i metodi che saranno necessari alla

---

<sup>2</sup>Teorema che dia un andamento asintotico per la funzione di conteggio degli autovalori nel caso di spettro discreto.

sua risoluzione per affrontare in modo più efficace il problema originale sulla superficie modulare.

Nonostante la tesi si interrompa a quest punto, i lavori su questo problema stanno andando avanti. Alcune approssimazioni asintotiche e l'applicazione delle leggi di Weyl classiche hanno permesso già di verificare la correttezza dei risultati del capitolo §1.7.2 relativi all'andamento della funzione di conteggio degli autovalori, purtroppo senza porre l'accento sulla dipendenza di questo dal parametro  $c$ . Nel frattempo si è ottenuta una panoramica più chiara sul comportamento dello spettro al variare dei parametro  $K$ .

Inoltre, tramite metodi di approssimazione semiclassica di tipo WKB, è stato possibile dare un andamento asintotico almeno per le autofunzioni relative ad autovalori dello spettro discreto (quando presente). Anche in questo caso la dipendenza dal parametro  $c$  non è ancora esplicita, ma si spera per il futuro di riuscire a migliorare i procedimenti adottati per ottenere un migliore grado di approssimazione che chiarifichi l'importanza di tale parametro.

Oltre a questi risultati positivi, lo studio più approfondito del problema semplificato ha chiarito che se è vero che approssima bene il problema originale, non è probabilmente un buon modello per cercare le risonanze quando il parametro  $c$  tende a 0. A differenza del suo predecessore sulla superficie modulare  $M_{\Gamma(2)}$ , infatti, sembrerebbe che non si verifichi la loro comparsa.

Nonostante i progressi fatti fin'ora, la necessità di utilizzare tecniche più raffinate di quelle note ad un laureando specialistico di matematica e la complessità del problema, richiedono ancora molto lavoro prima che si possano ottenere concretamente i risultati cercati.

# Capitolo 5

## Alcuni risultati concernenti le trasformate di Mellin della Mappa di Gauss e le funzioni $\zeta$ di Riemann e Hurwitz

*La saggezza più alta si cela dietro  
la disposizione semplice e naturale delle cose,  
e proprio perché tutto è semplice e naturale  
nessuno la riconosce.*

J.P. Hebel

### 5.1 La mappa di Gauss

Si chiama *Mappa di Gauss* l'applicazione  $T_G : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  definita

$$T_G x = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{x} \right\} = \frac{1}{x} \bmod 1 = \frac{1}{x} - \left[ \frac{1}{x} \right] & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

dove  $[x]$  indica la *Parte Intera*<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Si tratta del più grande intero non maggiore di  $x$ . Formalmente,  $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ .

Le relazioni che legano la Mappa di Gauss, le Superfici Modulari e la Teoria dei Numeri sono innumerevoli, a titolo informativo si possono consultare [Ser06], [May91], [CM00], [Kna99] e [Sar03].

## 5.2 La $\zeta$ di Riemann

La funzione  $\zeta(s) : \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 1\} \rightarrow \mathbb{C}$  definita

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad (5.2)$$

è detta *Zeta di Riemann*, ammette un'unica estensione analitica a tutto il piano complesso  $\mathbb{C}$  e presenta un solo polo semplice in  $z = 1$ . È ben noto che vale la seguente relazione (cfr. [Ser06], [Iso]):

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{\{y\}}{y^{s+1}} dy. \quad (5.3)$$

## 5.3 Alcuni valori della trasformata di Mellin della Mappa di Gauss

Ci si potrebbe fermare all'equazione (5.3), ma con il semplice cambio di variabile  $y = 1/x$ , si ottiene

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^0 \frac{\{\frac{1}{x}\}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{s+1}} \frac{-dx}{x^2}$$

e, cioè,

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_0^1 T_G(x) x^{s-1} dx \quad (5.4)$$

in cui l'integrale che compare è una sorta di "Trasformata di Mellin" (cfr. [Iso]) della Mappa di Gauss e converge assolutamente per  $\Re s > 1$ . Studiare tale integrale potrebbe apportare qualche informazione sulla funzione  $\zeta$  e, forse, potrebbe essere utile per approssimarne numericamente alcuni valori.

### 5.3 Alcuni valori della trasformata di Mellin della Mappa di Gauss 80

Si può pensare di sfruttare l'equazione (5.4) per estendere la Trasformata di Mellin della Mappa di Gauss anche a valori della  $s$  con  $\Re s \leq 1$  e calcolarla almeno per le  $s$  che corrispondono a valori noti della  $\zeta$  di Riemann: è sufficiente notare che:

$$\int_0^1 T_G(x)x^{s-1} dx = \frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s}. \quad (5.5)$$

#### 5.3.1 I “momenti dispari” della Mappa di Gauss

Si considerino ora i *numeri di Bernoulli*, cioè quei numeri  $B_n$  definiti dallo sviluppo in serie

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} B_{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

in cui la seconda identità deriva dalla parità<sup>2</sup> della funzione  $\frac{x}{e^x-1} - \frac{x}{2}$ . I primi numeri di Bernoulli non nulli sono

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, & B_1 &= -\frac{1}{2}, & B_2 &= \frac{1}{6}, & B_4 &= -\frac{1}{30}, \\ B_6 &= \frac{1}{42}, & B_8 &= -\frac{1}{30}, & B_{10} &= \frac{5}{66}, & B_{12} &= -\frac{691}{2730}, \end{aligned}$$

e, in generale, possono essere calcolati ricorsivamente mediante la seguente formula:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0.$$

Il fatto interessante è che vale l'identità

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k}.$$

e, dunque, per ogni intero positivo  $k$  si possono calcolare i valori della  $\zeta$  per gli interi pari positivi  $2k$ . A titolo di esempio, si ha

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \frac{\pi^2}{6}, & \zeta(4) &= \frac{\pi^4}{90}, & \zeta(6) &= \frac{\pi^6}{945}, \\ \zeta(8) &= \frac{\pi^8}{9450}, & \zeta(10) &= \frac{\pi^{10}}{93555}, & \zeta(12) &= \frac{691\pi^{12}}{638512875}. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Una funzione pari ha i coefficienti dispari delle potenze dello sviluppo in serie nulli, quindi per  $k > 0$  si ha  $B_{2k+1} = 0$ .

### 5.3 Alcuni valori della trasformata di Mellin della Mappa di Gauss 81

Questo risultato, insieme alla (5.5), permette di calcolare i “momenti dispari” della Mappa di Gauss, infatti:

$$\begin{aligned} k = 1 &\Rightarrow \int_0^1 x T_G(x) dx = 1 - \frac{\zeta(2)}{2} = 1 - \frac{\pi^2}{12}, \\ k = 2 &\Rightarrow \int_0^1 x^3 T_G(x) dx = \frac{1}{3} - \frac{\pi^4}{360}, \\ k = 3 &\Rightarrow \int_0^1 x^5 T_G(x) dx = \frac{1}{5} - \frac{\pi^6}{5670}. \end{aligned}$$

Più in generale, per ogni  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , si ha

$$\int_0^1 x^{2k-1} T_G(x) dx = \frac{1}{2k-1} - \frac{\zeta(2k)}{2k} \quad (5.6)$$

$$= \frac{1}{2k-1} + (-1)^k \cdot \frac{2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{B_{2k}}{2k}. \quad (5.7)$$

È interessante, a questo punto, notare che riuscire a calcolare i “momenti pari” della Mappa di Gauss, rende automaticamente possibile calcolare i valori della  $\zeta$  per gli interi dispari positivi. Per dimostrare che tali valori sono irrazionali, sarebbe sufficiente dimostrare che lo sono i “momenti pari”.

#### 5.3.2 Ha senso estendere l'integrale a $\Re s \leq 1$ ?

È ben noto che tutti gli interi pari negativi sono gli zeri banali della  $\zeta$ , così come è ben noto che nel caso più generale degli interi negativi vale la seguente formula:

$$\zeta(-k) = -\frac{B_{k+1}}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Quindi, è abbastanza naturale pensare che abbia senso scrivere, per  $k$  intero positivo,

$$\int_0^1 \frac{T_G(x)}{x^k} dx = \frac{1}{k} \left( \frac{B_k}{k-1} - 1 \right). \quad (5.8)$$

Di certo tale integrale non è assolutamente convergente, per di più, andando a 0, sorge il problema non banale per cui

$$-\frac{1}{2} = \zeta(0) = 0 \cdot \int_0^1 \frac{T_G(x)}{x} dx.$$

Dunque, prima di poter affermare che l'estensione ottenibile tramite la  $\zeta$  da (5.5) ha senso, bisogna trovare una qualche forma di convergenza per questi integrali.

Ad esempio, si può provare a studiare la convergenza in media:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{T_G(x) - \frac{1}{2}}{x^z} dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\frac{1}{x} - (n+1) - \frac{1}{2}}{x^z} dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{n^z - (n+1)^z}{-z} - \left(n + \frac{3}{2}\right) \frac{n^{z-1} - (n+1)^{z-1}}{-z+1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^z \left( \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}{-z} - \left(1 + \frac{3}{2n}\right) \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{z-1}}{-(z-1)} \right) \end{aligned}$$

ma sfortunatamente sembra non convergere per i valori della  $z$  che si stanno considerando. Bisogna quindi cambiare approccio o tentare analisi asintotiche differenti, cercando di dare un senso a tale estensione o dimostrando definitivamente che non può essere considerata tale.

## 5.4 La derivata della $\zeta$

Si può anche tentare, per ora solo con un calcolo formale, di studiare cosa accade all'equazione (5.5) derivando rispetto alla  $s$ :

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_0^1 T_G(x) x^{s-1} dx = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s-1} - \frac{\zeta(s)}{s} \right).$$

Osservando che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^1 T_G(x) x^{s-1} dx &= \int_0^1 T_G(x) \frac{\partial x^{s-1}}{\partial s} dx \\ &= (s-1) \int_0^1 T_G(x) x^{s-2} dx, \end{aligned}$$

si ricava l'equazione

$$\int_0^1 T_G(x) x^{s-2} dx = -\frac{1}{(s-1)^3} + \frac{\zeta(s)}{s^2(s-1)} - \frac{\zeta'(s)}{s(s-1)} \quad (5.9)$$

che alla luce della (5.5) diventa

$$\int_0^1 T_G(x)x^{s-2} dx = -\frac{1}{s(s-1)} \left( \zeta'(s) + \frac{s}{(s-1)^2} + \int_0^1 T_G(x)x^{s-1} dx \right),$$

o, opportunamente riordinata,

$$\zeta'(s) = -\frac{s}{(s-1)^2} - s(s-1) \int_0^1 T_G(x)x^{s-2} dx - \int_0^1 T_G(x)x^{s-1} dx \quad (5.10)$$

che potrebbe essere interessante per calcolare i valori della derivata della  $\zeta$  almeno dove c'è la convergenza delle Trasformate di Mellin della Mappa di Gauss e, se fossero validi il calcolo e l'estensione ipotizzata, anche per gli altri valori.

Conoscendo i valori di  $\zeta'(s)$  per  $s \in \mathbb{Z}_+$  dispari,  $s > 1$ , se si scrive  $s = 2k + 1$  con  $k \geq 1$  si ricava che

$$\begin{aligned} \zeta'(2k+1) &= -\frac{2k+1}{4k^2} - 2k(2k+1) \int_0^1 T_G(x)x^{2k-1} dx - \int_0^1 T_G(x)x^{2k} dx \\ &= -\frac{16k^4 + 8k^3 + 8k^2 - 2k - 1}{4k^2(2k-1)} + (-1)^{k+1}(2k+1) \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k} + \frac{\zeta(2k+1)}{2k+1}, \end{aligned}$$

che riscritta in una forma un pò più maneggevole mette in luce la stretta relazione tra i valori della  $\zeta$  per i dispari positivi e i valori della  $\zeta'$  per i dispari positivi:

$$\begin{aligned} \zeta(2k+1) &= (2k+1)\zeta'(2k+1) + (-1)^k(2k+1)^2 \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k} + \\ &\quad + \frac{(2k+1)(16k^4 + 8k^3 + 8k^2 - 2k - 1)}{4k^2(2k-1)}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Purtroppo, per quanto riguarda i valori per interi negativi accade che (se  $m \in \mathbb{Z}_+$ )

$$\zeta'(-m) = \frac{m^3 + 2m^2 + 2m + 2}{(m+1)(m+2)} - m \frac{B_{m+2}}{m+2} - \frac{1}{m} \frac{B_{m+1}}{m+1}$$

che è lontana da valori noti come

$$\zeta'(-2m) = \frac{(-1)^m \zeta(2m+1)(2m)!}{2^{2m+1}\pi^{2m}},$$

per la precisione si ottengono cose come

$$\frac{37}{20} = \zeta'(-2) = -\frac{\zeta(3)}{4\pi^2}$$

che è completamente errato!

## 5.5 Trasformata di Mellin della Mappa di Gauss e Operatore di Trasferimento

Nella teoria delle “funzioni iterate”, il comportamento di una mappa può essere studiato per mezzo del cosiddetto *Operatore di Trasferimento* (o Operatore di Perron-Frobenius) della mappa (cfr. [Rue02]). Data una mappa dell'intervallo unitario in se stesso, l'Operatore di Trasferimento descrive come si comporta una distribuzione sull'intervallo sotto l'azione della mappa, in particolare si riesce ad estrarre un legame tra le proprietà frattali tipiche dell'iterazione di certe funzioni e la descrizione analitica dello stesso processo.

Ci sono vari modi equivalenti di definire l'Operatore di Trasferimento, ognuno con le sue peculiarità. Una semplice definizione può essere (cfr. [Vep05])

$$\mathcal{L}_T\phi(x) = \int \delta(x - T(y))\phi(y) dy \quad (5.12)$$

dove  $T$  è la mappa che viene iterata,  $\delta$  è la *Delta di Dirac* e  $\phi$  è la densità su cui agisce l'Operatore di Trasferimento  $\mathcal{L}_T$ . È evidente da questa definizione che l'operatore mette in luce come viene mappata la densità dall'azione di  $T$ .

Per gli scopi di questa sezione, tuttavia, è più utile un'altra definizione (equivalente). Sia  $T : X \rightarrow X$  una mappa da un insieme arbitrario  $X$  in se stesso, sia  $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$  una valutazione di tale insieme su  $\mathbb{C}$  e  $\Phi$  lo spazio di tutte le valutazioni del tipo considerato. Allora l'Operatore di Trasferimento  $\mathcal{L}_T$  è un funzionale lineare su  $\Phi$ ,  $\mathcal{L}_T : \Phi \rightarrow \Phi$ , tale che

$$\mathcal{L}_T\phi(x) = \sum_{y \in T^{-1}(x)} \phi(y). \quad (5.13)$$

A volte è più conveniente studiare  $\mathcal{L}_T$  su un sottospazio denso di  $\Phi$  piuttosto che sull'intero spazio.

Per la Mappa di Gauss, l'Operatore di Trasferimento è meglio conosciuto come l'operatore di Gauss-Kuzmin-Wirsin (GKW) (cfr. [Kin64], [May91]) e

può essere rappresentato come

$$\mathcal{L}_{T_G}\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \phi\left(\frac{1}{n+x}\right) \quad (5.14)$$

Esistono svariati studi specifici riguardo tale operatore (cfr. [Kin64], [May91], [Wir74], [CM00]) ed una delle proprietà più interessanti che lo riguardano è che può essere visto come una “sorta di cambiamento di variabile” negli integrali della Mappa di Gauss. Considerando che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{T_G}x^{s-1} &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(x+k)^2} \left(\frac{1}{n+x}\right)^{s-1} \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(x+k)^{2-1+s}} \end{aligned}$$

e che la funzione Zeta di Hurwitz è definita

$$\zeta_H(s, x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+x)^s}, \quad (5.15)$$

la Trasformata di Mellin della Mappa di Gauss considerata fino a questo momento diventa

$$\begin{aligned} \int_0^1 T_G(x)x^{s-1} dx &= \int_0^1 x \mathcal{L}_{T_G}x^{s-1} dx \\ &= \int_0^1 x \sum_{k \geq 0} \frac{1}{((k+1)+x)^{s+1}} dx \end{aligned}$$

e cioè

$$\int_0^1 T_G(x)x^{s-1} dx = \int_0^1 x \zeta_H(s+1, x+1) dx \quad (5.16)$$

In altre parole, le relazioni (5.4), (5.10) trovate in precedenza possono essere riscritte in funzione della Zeta di Hurwitz e della Zeta di Riemann:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{s}{s-1} - s \int_0^1 x \zeta_H(s+1, x+1) dx, \\ \zeta'(s) &= -\frac{s}{(s-1)^2} - s(s-1) \int_0^1 x \zeta_H(s, x+1) dx - \int_0^1 x \zeta_H(s+1, x+1) dx \\ &\stackrel{?}{=} -\frac{s}{(s-1)^2} - s(s-1) \int_0^1 x \left( \zeta_H(s, x+1) + \frac{\zeta_H(s+1, x+1)}{s(s-1)} \right) dx. \end{aligned}$$

Recuperando i calcoli fatti in precedenza, dunque, è stato ricavato un modo per calcolare una “sorta di momento primo” della  $\zeta_H$  almeno per alcuni valori della  $s$ . Un ulteriore studio di queste relazioni ed in particolare dell’integrale in (5.16) potrebbero permettere di indagare ulteriormente sia le Trasformate di Mellin della Mappa di Gauss sia la Zeta di Hurwitz.

## 5.6 Rappresentazione differenziale per la $\zeta$

Combinando le equazioni (5.5) e (5.10) si arriva vicino ad una rappresentazione differenziale della  $\zeta$ , infatti

$$\zeta'(s) = \frac{\zeta(s)}{s} + s\zeta(s-1) - sP(s) \quad (5.17)$$

$$= s \left( \frac{\zeta(s)}{s^2} - \zeta(s-1) - P(s) \right), \quad (5.18)$$

dove

$$P(s) = \frac{s-1}{s-2} + \frac{1}{(s-1)^2} = \frac{(s-1)^3 + s-2}{(s-2)(s-1)^2}.$$

Il problema deriva dal termine  $\zeta(s-1)$ , per trasformarlo in  $\zeta(s)$  potrebbe essere una strada percorribile l’applicazione della Trasformata di Legendre.

D’altro canto, tale equazione potrebbe fornire una via di studio per la derivata della  $\zeta$  lontano da  $\Re s = 1$  e magari anche per valori più interessanti vicini ad aree più “delicate”.

Questo studio, seppure molto azzardato ed ancora embrionale, promette di mostrare nuovi legami interessanti tra trasformate e mappe particolari. Le idee da sviluppare e formalizzare bene sono ancora molte, ma come lo studio dell’operatore di Laplace sulla superficie modulare, si tratta di un buon punto di partenza per lavori futuri.

# Bibliografia

- [AB59] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, 115, 1959.
- [AM69] M.F. Atiyah and I.G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, 1969.
- [Apo90] T.M. Apostol. *Modular Functions And Dirichlet Series In Number Theory*. Springer, 1990.
- [Arn89] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, 1989.
- [BKS91] T. Bedford, M. Keane, and C. Series, editors. *Ergodic theory, symbolic dynamics and hyperbolic spaces*. Oxford University Press, 1991.
- [BM94] J.C. Baez and J.P. Muniain. *Gauge theories, knots, and gravity*. World Scientific, 1994.
- [BT82] R. Bott and L.W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*. Springer-Verlag, 1982.
- [Cha] C.-H. Chang. The transfer operator, from statistical mechanics to quantum chaos. Preprint available for download.
- [CM00] C.-H. Chang and D.H. Mayer. Thermodynamic formalism and Selberg's Zeta function for modular groups. *Regular and Chaotic Dynamics*, 5, 2000.

- 
- [Con85] J.B. Conway, editor. *A course in functional analysis*. Springer, 1985.
- [CP82] J. Chazarain and A. Piriou. *Introduction to the theory of linear partial differential equations*. North-Holland Publishing, 1982.
- [Dol05] I.V. Dolgachev. Lectures on modular forms. Fall 1997/1998. Lecture Notes, 2005.
- [GM08] S. Golénia and S. Moroianu. Spectral analysis of magnetic laplacians on conformally cusp manifolds. Submitted arXiv preprint, 2008.
- [Gri89] P. Griffiths. *Introduction to Algebraic Curves*. AMS, 1989.
- [Gru00] M.J. Gruber. Bloch theory and quantization of magnetic systems. *Journal of Geometrical Physics*, 34, 2000.
- [Gun66] R. Gunning. *Lectures on Riemann Surfaces*. Princeton, 1966.
- [Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer, 1977.
- [Iso] S. Isola. Funzioni speciali e trasformate integrali. Lecture Notes.
- [Jos99] M.S. Joshi. Introduction to pseudo-differential operators. arXiv Lecture Notes, 1999.
- [Jos05] J. Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Springer-Verlag, 2005.
- [Jos06] J. Jost. *Compact riemann surfaces*. Springer-Verlag, 2006.
- [Kin64] A.Y. Kinchin. *Continued Fraction*. Dover Publications, 1964.
- [Kna99] A. Knauf. Number theory, dynamical systems and statistical mechanics. *Reviews in Mathematical Physics*, 11, 1999.
- [Kob84] N. Koblitz. *Introduction to elliptic curve and modular forms*. Springer-Verlag, 1984.

- 
- [Kob94] N. Koblitz. *A course in number theory and cryptography*. Springer-Verlag, 1994.
- [Lan76] S. Lang. *Introduction to Modular Forms*. Springer-Verlag, 1976.
- [Lan99] S. Lang. *Fundamentals of Differential Geometry*. Springer, 1999.
- [May91] D.H. Mayer. The thermodynamic formalism approach to Selberg's Zeta function for  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . *Bullettin of the AMS*, 25, 1991.
- [Mil74] J.S. Milne. Modular functions and modular forms. Lecture Notes, 1974.
- [Miy89] T. Miyake. *Modular Forms*. Springer-Verlag, 1989.
- [Mor03] S. Moroianu. Weyl laws on open manifolds. Submitted arXiv preprint, 2003.
- [Neh82] Z. Nehari. *Conformal Mapping*. Dover, 1982.
- [Pol02] A.D. Polyanin. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Chapman & Hall/CRC, 2002.
- [Ran77] R. Rankin. *Modular forms and functions*. Cambridge University Press, 1977.
- [Ros97] S. Rosenberg. *The Laplacian on a Riemann Manifold*. Cambridge University Press, 1997.
- [RS80] M. Reed and B. Simon, editors. *Methods of modern mathematical physics I: functional analysis*. Academic Press, 1980.
- [Rue02] D. Ruelle. Dynamical Zeta functions and transfer operators, 2002.
- [Sar03] P. Sarnak. Spectra of hyperbolic surfaces. *Bullettin of the A.M.S.*, 40, 2003.
- [Sch74] B. Schoeneberg. *Elliptic Modular Functions*. Springer-Verlag, 1974.

- 
- [Ser06] M. Seri. Irrazionali quadratici, frazioni continue e flussi geodetici chiusi sulla superficie modulare. Tesi di Laurea Triennale, 2006.
- [Shu01] M. Shubin. Essential self-adjointness for semi-bounded magnetic Schrödinger operators on non-compact manifolds. *Journal of Functional Analysis*, 186, 2001.
- [Tof] C. Toffalori. Appunti di algebra. Lecture Notes.
- [Tul] S. Tulipani. Dispense di algebra. Lecture Notes.
- [Vep05] L. Vepstas. A series representation for the Riemann Zeta derived from the Gauss-Kuzmin-Wirsing operator. Preprint, 2005.
- [Wir74] E. Wirsing. On the theorem of Gauss-Kusmin-Levy and a Frobenius-type theorem for function spaces. *Acta Arithmetica*, 26, 1974.

# Ringraziamenti

*Gratus animus est una virtus non solum maxima,  
sed etiam mater virtutum omnium reliquarum.*

Marco Tullio Cicerone - Pro Plancio

*I thank God for my handicaps for, through them,  
I have found myself, my work, and my God*

Helen Keller

Eccoci arrivati al capitolo più difficile della tesi... Sembra strano, eppure sono giorni che cerco inutilmente di scrivere dei ringraziamenti degni di tale nome. È che prendere e pretendere è sempre più facile che ringraziare e, arrivati ad un certo punto, le parole non bastano più e qualunque cosa si scriva sembra riduttiva, insufficiente e inadeguata.

Ho rincorso invano qualche idea bizzarra: prima volevo codificare il testo (per farvi lavorare un pò), poi ho pensato ad un semplice elenco nello stile dei titoli di coda di un film, in ultimo l'idea era di lasciare un paio di pagine bianche da riempire con le firme di tutte le persone che devo ringraziare, così da costringermi a cercarle e raggiungerle. Eppure sono ancora in alto mare, ormai rassegnato a scrivere i soliti, banali, ringraziamenti.

Giunti a questo punto, potreste cominciare ad avere un dubbio: perché è importante scrivere questo capitolo? Se è così difficile non sarebbe più facile farne a meno? No, perché la gratitudine è importante, ed è importante rendersi conto di tutte le persone che in un modo o nell'altro sono state

presenti e mi hanno permesso di raggiungere questo traguardo. Perché è uno dei pochi momenti che si hanno per fermarsi e rendersi conto di essere circondati da tante persone eccezionali e credere che, forse, il mondo non è così terribile come vuole sembrare.

Se state leggendo questa pagina e siete arrivati fin qui, sono certo che meritate un caloroso *grazie*. Se per qualche motivo non siete stati nominati successivamente vi chiedo già da ora scusa: la memoria spesso fa brutti scherzi, siate comprensivi.

I primi doverosi ringraziamenti vanno alla mia famiglia. Senza di loro non sarei certamente arrivato fino a questo punto. Magari con qualche attrito ma mi hanno sempre incoraggiato, consigliato, educato e, non da ultimo, finanziato ;). Come se non bastasse continuano a sopportarmi e volermi un mondo di bene nonostante sia sempre così strano e nervoso: spero sappiano quanto ne voglio a loro anche se spesso e volentieri non lo dimostro. *Grazie di cuore* (e intendo proprio a tutti: Mamma, Papà, Leo, Ale, Giacomo, Nonno Nannì, Nonna Maria, Nonno Cosmo e Nonna Lilia!). Grazie! E grazie anche agli zii, siete forti!

In secondo luogo, un grande ringraziamento a tutto il gruppo di ricerca che mi ha accompagnato lungo la stesura della tesi (e oltre), con un occhio di riguardo per i professori Degli Esposti, Isola, Knauf e Bonanno. Grandi scienziati e persone magnifiche, sempre disponibili e gentili di fronte ai miei dubbi e alle mie domande. Spero di poter continuare a lavorare insieme per molto tempo.

Ed ora tocca agli amici: *grazie a tutti!* A partire da quelli di più vecchia data, i cari amici di Macerata. Tra i ragazzi della Parrocchia, quelli del GLM (Gruppo Linux Mc) e il gruppetto di Faber siete certamente troppi per essere elencati tutti ma sappiate che meritate tutti un grosso *grazie* personale. Tuttavia, non posso fare a meno di ringraziare esplicitamente Limp e Luca, Cipo e Cipa, Marco, Marta, Michela, Elisa, Massi, Picu, Sara, Francesco, Sam, Massei, Cristiano e Fabio. E grazie anche a tutti gli amici di FabulaeNoctis e PlayScape. Inoltre devo ringraziare la maestra Lucia e il maestro Mario, una

promessa è sempre una promessa. E non posso trascurare nemmeno Golini e la Fabiani, che sono riusciti a mostrarmi la bellezza della matematica.

Poi sono andato a Camerino. Un “festoso” grazie a tutti gli ex-coinquilini e vicini di casa, ai compagni di studio dell’“asilo nido”, agli amici dei barbecue, al gruppo di Spartani del Palietto, ai ragazzi del CameLug, ai compagni di corso e ai tanti professori che continuano a farmi sentire a casa quando torno a trovarli. In modo particolare un grandissimo e sentito ringraziamento va a Mauro, Brus, Marvin/Susan/Matt (a cui auguro presto un soprannome fisso), Fabiologia, Paolo, Luca, Andrea, Iacopo, Manuel, Silvia, Bebo e Nick che troppo spesso mi hanno sopportato e supportato. L’esperienza di Camerino è stata certamente una delle più belle della mia vita, e questo è soprattutto merito vostro! Siete incredibili!

Poi c’è il gruppetto di Civitanova e, visto che siamo arrivati alle località marittime, quello di Porto Potenza. Mi fate compagnia tutta l’estate, come faccio a non ringraziarvi tutti? A differenza dei gruppi precedenti potrei anche ringraziarvi di persona, ma che gusto ci sarebbe? Un grazie di cuore a Marco e Andrea, Lampi, Andrea Mazzieri, le baRRiste Silvia e Roberta, Marcoddi, Pri, Manu, Bice, le Laure e Angelo.

Andando avanti e restando in provincia arriviamo alle new entry. Grazie a tutti gli amici Tolentinati. E, in particolare, un grazie di cuore a Maurizio, Tiziana e Fra: ci conosciamo da poco eppure mi hanno da subito fatto sentire uno di casa.

Ultimi ma non per questo meno importanti ci sono tutti gli amici di Bologna! Non saranno tanti ma senza di loro il mio soggiorno bolognese sarebbe stato veramente sofferto: grazie a tutti i compagni di corso e di D&D, con un occhio di riguardo a Pesaro, Sofia, Lorenzo, Matte, Cris, Elisa, Alice, Marchino, Sarina, Paolo, Rossana e Laura. Grazie di cuore anche a Valerio, Giovanna, Dorianò, Gianluca e Agnese che mi hanno fatto sentire a casa quando ero appena arrivato e i ritmi della grande città mi spiazzavano. E come si possono dimenticare Riccardo, Elena e Trap? Mille grazie anche a voi e alla vostra allegria!

Dulcis in fundo, il ringraziamento che non poteva mancare... Ti sembrava che mi fossi dimenticato di te, eh? Un grazie dolce, affettuoso e spropositato va a Federica, Miso per gli amici, con cui spero di poter condividere ancora un'infinità non numerabile di bei momenti.

セルタメンテ ノん エシストノ パロレ アダッ  
テ ア デスクリヴェレ クウエッロ チェ  
ヴォッレイ エスプリメレ。 ロ ソ チェ ノん  
ヴォイ エッセレ リングラジアタ マ コメ  
ポッソ ツラスクラレ ラ ペルソナ チェ ミ  
ハ チモスツラト チェ エシステ ロ アモレ、  
チエ ハ レソ ロ ウルチモ アンオ コシ  
マギコ エ インテンソ エ チェ ピウ チ オ  
グニ アルツロ ミ ハ ソッポルタト クウエス  
チ メシ。。。 エ アンチェ セ オエアマイ  
レ パロレ ノん ソノ ピウ スッフイシエン  
チ、 グラジエ チ クオレ!

みそが愛してる。