Prova scritta di Istituzioni di Matematica I - 3 Settembre 2013
Corso di Laurea in Scienze Ambientali - Ravenna

1. Dopo aver determinato il dominio A della funzione
$$f\,:\,A\to\mathbb{R},\quad f(x)=\ln\left(\frac{(x-2)^2}{x+2}\right),$$
trovarne eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti. Determinare tutti i punti x_0 tali che $f''(x_0)=0$.

2. Calcolare, se esiste, il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\ln(1+x)}{x^2}$$

3. Calcolare, se esiste, il seguente integrale:
$$\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{(x+2)(x-3)}\,\mathrm{d}x$$

4. Determinare per quali valori di $\alpha\in\mathbb{R}$ il seguente sistema omogeneo ammette soluzioni non banali:
$$A\mathbf{x}=\mathbf{0},\qquad A=\begin{bmatrix}\alpha & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$
Determinare quindi tali soluzioni.

5. Determinare la retta r passante per $A=(0,2,3)$ e $B=(1,1,0)$. Determinare il punto medio P tra A e B.

6. i) Determinare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione
$$(iz)^3=\frac{i(1+i)}{(-1+i)^2}.$$
ii) Riportare sul piano complesso tali soluzioni. iii) Verificare se la seguente disuguaglianza è vera: $\left|2i-\frac{i+1}{(i-2)(i+1)}\right|>|i-1|$.

Prova scritta di Istituzioni di Matematica I - 3 Settembre 2013
Corso di Laurea in Scienze Ambientali - Ravenna
Domande di Teoria

1. Quale di questi enunciati corrisponde al Teorema di Fermat?

   ☐ Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$ un punto di estremo locale di f. Se f è derivabile, allora $f'(x_0) = 0$.

   ☐ Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$ un punto di estremo locale di f. Se f è derivabile, allora $f(x_0) = 0$.

   ☐ Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$ un punto di estremo locale di f. Allora f è derivabile in x_0 se e solo se $f'(x_0) = 0$.

2. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, e siano $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ tali che $A\mathbf{u} = \mathbf{u}\lambda$. Allora:

   ☐ Dev'essere necessariamente $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

   ☐ $(\lambda, \mathbf{u})$ è una *autocoppia* di A.

   ☐ $\mathbf{u}$ risolve il sistema lineare $A\mathbf{u} = 0$ qualunque sia λ.

3. Siano $A = \mathbb{R} \setminus [0,1)$ e $B = [1,2]$. Quale di queste affermazioni è vera?

   ☐ $A \cup B = \mathbb{R}$

   ☐ $A \cap B = \{1\}$

   ☐ $A \cup B = A$

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2xe^{x^2}$. Una sua primitiva F è data da:

   ☐ $F(x) = e^{x^2}$

   ☐ $F(x) = 2e^x$

   ☐ $F(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$

5. Quale di queste affermazioni corrisponde alla definizione di retta in forma parametrica in $\mathbb{R}^3$?

   ☐ Fissati $P_0 \in \mathbb{R}^3$ ed il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $r = \{P \in \mathbb{R}^3, \langle P, P_0\rangle = t\|\mathbf{v}\|, t \in \mathbb{R}\}$

   ☐ Fissati $P_0 \in \mathbb{R}^3$ ed il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $r = \{P \in \mathbb{R}^3, P = P_0 + t\mathbf{v}, t \in \mathbb{R}\}$

   ☐ Fissati $P_0 \in \mathbb{R}^3$ ed il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $r = \{P \in \mathbb{R}^3, \langle P - P_0, \mathbf{v}\rangle = 0\}$