Prova scritta di Istituzioni di Matematica I - 19 Giugno 2009
Corso di Laurea in Scienze Ambientali - Ravenna

1. Dopo aver determinato il dominio di definizione della funzione
$$f(x) = \frac{x - x^3}{x^2 + 1}$$
determinarne gli estremi relativi e assoluti. Studiare infine la convessità della funzione.

2. Calcolare, se esiste, il seguente limite
$$\lim_{x \to 1} \frac{\exp(x^2 - 1) - 1}{x^2 - 1}$$

3. Calcolare il seguente integrale
$$\int_{-\pi/8}^{\pi/8} |\tan(2x)| dx$$

4. Determinare autovalori e autovettori della seguente matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Determinare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione
$$z^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} i(1 + i)$$

6. Determinare la retta r passante per $P_0 = (1, 3, -2)$ e $P_1 = (-1, 1, 1)$. Determinare quindi il piano π ortogonale ad r e passante per l'origine. Individuare quindi i punti su r che distano 1 dal piano.

Soluzione:

1. $f'(x) = (-x^4 + 4x^2 + 1)/(x^2 + 1)^2$. $f'(x) = 0$ se e solo se $x^2 = 2 + \sqrt{5}$, $x^2 = 2 - \sqrt{5}$. La seconda equazione non ha soluzioni in $\mathbb{R}$. Dalla prima si ottiene $x_\pm = \pm\sqrt{2 + \sqrt{5}}$. $f' > 0$ per valori interni, quindi x_- è un minimo locale e x_+ è un massimo locale. Non ci sono massimi o minimi assoluti perché la funzione non è limitata ($\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$). Vale $f''(x) = x(1 - 3x^2)/(x^2 + 1)^3$, quindi f cambia la concavità in $x = 0, \pm 1/\sqrt{3}$.

2. Per l'Hôpital, $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{y\to 0} e^y = 1$

3. Vale $\int_\alpha^\beta \tan(2x)dx = -1/2 \ln(|\cos(2x)|)|_\alpha^\beta$. Quindi

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/8}^{\pi/8} |\tan(2x)|dx &= -\int_{-\pi/8}^{0} \tan(2x)dx + \int_0^{\pi/8} \tan(2x)dx \\ &= 1/2 \ln(\cos(2x))|_{-\pi/8}^{0} - 1/2 \ln(\cos(2x))|_0^{\pi/8} = ...\end{aligned}$$

4. Si trova $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3 + \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 3 - \sqrt{2}$, con autovettori rispettivamente $x_1 = e_3$, $x_2 = (1, 2 + \sqrt{2}, 0)^T$, $x_3 = (1, 2 - \sqrt{2}, 0)^T$.

5. $z_k = \sqrt[3]{1/2}\exp(2/3(3/4 + 2k)\pi i)$, $k = 0, 1, 2$.

6. $\mathbf{v} = P_1 - P_0 = (-2, -2, 3)$, $r : P = P_0 + t\mathbf{v}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. $\pi \perp r$ se e solo se $\langle (x, y, z) - O, \mathbf{v}\rangle = 0$, cioè $-2x - 2y + 4z = 0$. $r \ni H = P_0 + t_H\mathbf{v}$. Imponendo che $H \in \pi$ si ottiene $t_H = 14/17$. Quindi, per ottenere $P = P_0 + t\mathbf{v}$: $\|P - H\| = 1$ si scrive $1 = \|P - H\| = \|t\mathbf{v} - t_H\mathbf{v}\| = |t - t_H|\,\|\mathbf{v}\|$, da cui $t = t_H \pm 1/\|\mathbf{v}\| = 14/17 \pm 1/\sqrt{17}$.